

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ КРИТИЧЕСКИХ НАГРУЗОК ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОГИХ СТРОГО ВЫПУКЛЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

Л. С. С р у б щ и к

(Ростов-на-Дону)

Для исследования напряженно-деформированного состояния пологих строго выпуклых оболочек вращения под действием осесимметричной нагрузки применяется асимптотический метод, использующий наличие в нелинейных уравнениях теории оболочек естественного малого параметра (относительная тонкостенность). В частности, выводятся асимптотические значения верхних и нижних критических нагрузок потери устойчивости оболочек при различных краевых условиях и способах нагружения. Рассмотрен пример сферической оболочки при равномерном внешнем давлении. В случае жёсткого закрепления края для верхнего критического давления получается известный результат А. В. Погорелова [1]. Найденные значения верхних критических давлений сферических оболочек хорошо согласуются с результатами численных расчётов на ЭЦВМ [2-13] и позволяют продолжить их в область сколь угодно тонких оболочек, где машинный счёт становится малоэффективным.

1. К постановке задачи. Рассматривается система нелинейных дифференциальных уравнений осесимметричной деформации пологих оболочек вращения [14]

$$\varepsilon^2 A v - \frac{1}{2} u^2 + \theta u = 0, \quad \varepsilon^2 A u + u v - \theta v + \Phi(r) = 0 \quad (1.1)$$

$$A(\cdot) \equiv -r \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r(\cdot), \quad \Phi(r) = \int_0^r q(t) t dt$$

$$\theta = \frac{\partial z}{\partial r}, \quad u = \frac{\partial w}{\partial r}, \quad v = \frac{\partial F}{\partial r}, \quad \left\{ \frac{v}{r}, \frac{u}{r} \right\}_{r=0} < \infty$$

с различными краевыми условиями на контуре

$$\begin{aligned} 1) & \quad v(1) = 0, \quad \left[\frac{du}{dr} + \frac{v}{r} u \right]_{r=1} = 0 \\ 2) & \quad v(1) = 0, \quad u(1) = 0 \\ 3) & \quad \left[\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} v \right]_{r=1} = 0, \quad \left[\frac{du}{dr} + \frac{v}{r} u \right]_{r=1} = 0 \\ 4) & \quad \left[\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} v \right]_{r=1} = 0, \quad u(1) = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Все величины, входящие в (1.1), (1.2), безразмерные и связанные с размерными соотношениями

$$\begin{aligned} Z &= az, \quad W = aw, \quad \xi = ar, \quad \varepsilon^2 = h/a\gamma, \quad \gamma^2 = 12(1 - \nu^2) \\ \Phi &= E a^2 \varepsilon^2 F, \quad p = E \gamma \varepsilon^4 q, \quad \theta \leq -\alpha^2 r, \quad 0 < \nu < 0.5 \end{aligned}$$

Здесь Z — срединная поверхность оболочки вращения, W — прогиб, Φ — функция напряжений Эри, p — интенсивность внешней нагрузки (дав-

ление), $p \geq 0$, E — модуль Юнга. Малый параметр ε^2 характеризует относительную тонкостенность оболочки, h — толщина, ν — коэффициент Пуассона. Направление ξ совпадает с направлением внешней нормали к опорному контуру с радиусом a ; $\alpha = \text{const} > 0$.

Краевые условия 1) — 4) в (1.2) соответствуют: 1) подвижной шарнирной опоре края оболочки, 2) скользящему закреплению края, 3) неподвижной шарнирной опоре, 4) абсолютно глухой заделке края.

Задачи (1.1), (1.2) для случая сферической оболочки при равномерном внешнем давлении изучались во многих работах с целью исследования напряжённо-деформированного состояния и определения критических давлений. Однако при достаточно малых значениях $\varepsilon^2 = h/a\gamma$ (или, что эквивалентно, при больших значениях H/h , где H — подъём оболочки) применяемые численные методы сходятся слабо, и машинный счёт становится малоэффективным. Математически это вызвано наличием в уравнениях (1.1) малого параметра ε^2 при старших производных, а механически объясняется тем, что в окрестности границы (и в зоне действия сосредоточенных сил) достаточно тонких оболочек возникает явление краевого эффекта, характеризующееся резким изменением усилий, моментов и т. д.

В этой работе для исследования напряжённо-деформированного состояния полых оболочек вращения развивается асимптотический метод [15–18], основанный на малости параметра ε и тем более точный, чем меньше значения ε . Строятся асимптотические разложения для функций u - и v -решений задач (1.1), (1.2), а также выводятся простые формулы для асимптотических значений верхних и нижних критических нагрузок.

Дадим определение верхней критической нагрузки. Пусть $q = q(r, \sigma)$ зависит гладко от некоторого параметра σ , который определяется ходом нагружения конструкции и который будем называть параметром нагрузки. Предположим, что $q(r, 0) = 0$. Хорошо известно, что при малых значениях σ существует непрерывная ветвь решений $u(r, \sigma)$, $v(r, \sigma)$, которая однозначно определяется условиями $u(r, 0) = v(r, 0) = 0$. Верхней критической нагрузкой σ^* потери устойчивости оболочки будем называть наибольшее значение σ , при котором указанная однозначная ветвь существует. (Такое значение σ^* обычно называют наименьшей точкой ветвления). Иными словами, σ^* — наименьшее значение параметра σ , при котором в любой достаточно малой его окрестности наряду с основным решением, отвечающим невыпученной форме равновесия, появляется ещё одно решение, соответствующее новой форме равновесия [1].

В различных случаях параметр σ вводится по-разному. В случае положительного давления, которое рассматривается в данной работе, в качестве параметра σ удобно взять значение пропорциональное равнодействующей системы сил, действующих на оболочку, т. е. $\sigma = 2\varphi(1)$. В случае равномерно распределенного внешнего давления ($q(r) \equiv q = \text{const}$) обычно полагают $\sigma = q$ [2–13]. Отметим, что в случае знакопеременного давления такое введение параметра σ неудобно, а в случае самоуравновешенной нагрузки ($\varphi(1) = 0$) бессмысленно.

Пусть $\varepsilon = 0$. Тогда из (1.1) имеем

$$-1/2 u_0^2 + \theta u_0 = 0, \quad u_0 v_0 - \theta v_0 + \varphi(r) = 0 \quad (1.3)$$

Система (1.3) имеет два решения

$$1) v_0 = \varphi\theta^{-1}, \quad u_0 = 0, \quad 2) v_0 = -\varphi\theta^{-1}, \quad u_0 = 2\theta \quad (1.4)$$

которые с точностью до величин порядка ε^2 удовлетворяют уравнениям (1.1), но не удовлетворяют граничным условиям (1.2). Естественно ожидать, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ задачи (1.1), (1.2) имеют решения, которые ведут себя подобно (1.4) всюду внутри области и только в окрестности точки $r = 1$ претерпевают сильные изменения — такие, что краевые условия (1.2) выполняются. Эти изменения описываются функциями типа пограничного слоя.

2. Построение асимптотики. Асимптотические разложения решения каждой из задач (1.1), (1.2) строятся при $\varepsilon \rightarrow 0$ в виде

$$v \sim v_\varepsilon \equiv \sum_{i=0}^n \varepsilon^i [v_i(r) + h_i(r, \varepsilon)], \quad u \sim u_\varepsilon \equiv \sum_{i=0}^n \varepsilon^i [u_i(r) + g_i(r, \varepsilon)] \quad (2.1)$$

Функции v_i , u_i получаются при помощи первого итерационного процесса аналогично п. 2 работы [17]. В результате для определения v_0 , u_0 получаем систему (1.3), а для определения v_i , u_i ($i \geq 1$) — систему

$$\theta u_i - \sum_{k+j=i} u_k u_j + A v_{i-2} = 0, \quad \sum_{k+j=i} u_k v_j - \theta v_i + A u_{i-2} = 0 \quad (u_{-1} = v_{-1} \equiv 0) \quad (2.2)$$

Для нахождения решения, соответствующего форме равновесия в докритической стадии, асимптотические разложения строятся в окрестности первого решения (1.4). Функции пограничного слоя h_i , g_i сосредоточены в окрестности границы $r = 1$. Они описывают поведение оболочки в зоне краевого эффекта и отыскиваются при помощи второго итерационного процесса. Действуя аналогично [17], для h_0 , g_0 получаем систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$h_0'' + \frac{1}{2} g_0^2 - \theta_0 g_0 = 0, \quad g_0'' - g_0 h_0 + \theta_0 h_0 - \frac{\varphi_0}{\theta_0} g_0 = 0 \quad (2.3)$$

$$(\quad)' = \frac{d(\quad)}{dt}, \quad \theta_0 = \theta(1), \quad \varphi_0 = \varphi(1), \quad t = \frac{1-r}{\varepsilon}, \quad \{h_0, g_0\}_\infty \rightarrow 0$$

с соответствующими (1.2) краевыми условиями

$$\begin{aligned} 1) h_0(0) = \varphi_0 \theta_0^{-1}, \quad g_0'(0) = 0, \quad 2) h_0(0) = \varphi_0 \theta_0^{-1}, \quad g_0(0) = 0 \\ 3) h_0'(0) = 0, \quad g_0'(0) = 0, \quad 4) h_0'(0) = 0, \quad g_0(0) = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Заметим, что краевые условия на бесконечности вытекают из требования убывания функций пограничного слоя.

Для определения h_i , g_i получаем системы линейных дифференциальных уравнений. В случае краевых условий 1) и 2) в (1.2) имеем

$$\begin{aligned} h_i'' + g_i(g_0 - \theta_0) = t h_{i-1}'' + h_{i-1}' + \sum_{k+j+2=i} t^k h_j - \frac{1}{2} \sum_{m+n=i} g_m g_n + \\ + \sum_{l+p=i} \theta_l t^l g_p - \sum_{k+l+j+2=i} u_k t^l g_j \equiv F_{i1}, \quad g_i'' - h_i(g_0 - \theta_0) - g_i h_0 - \\ - v_0(1) g_i = t g_{i-1}'' + g_{i-1}' + \sum_{k+j+2=i} t^k g_j + \sum_{m+n=i} h_m g_n + \sum_{m+l+p=i} u_m t^l h_p + \\ + \sum_{m+l+p=i} v_m t^l g_p \equiv F_{i2}; \quad m \neq 0, \quad n \neq 0, \quad p \neq i \quad \{h_i, g_i\}_\infty \rightarrow 0 \quad (2.5) \\ \{\theta_l, u_{ml}, v_{ml}\} = \frac{1}{l!} \frac{\partial^l}{\partial r^l} \{\theta, u_m, v_m\} |_{r=1}, \quad l = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

с соответствующими краевыми условиями

$$\begin{aligned} 1) \quad h_i(0) &= -v_i|_{r=1}, & g_i'(0) &= \left[\frac{du_{i-1}}{dr} + \nu u_{i-1} \right]_{r=1} + \nu g_{i-1}(0) \\ 2) \quad h_i(0) &= -v_i|_{r=1}, & g_i(0) &= -u_i|_{r=1} \end{aligned} \quad (2.6)$$

В случае краевых условий 3) и 4) в (1.2) из (2.3), 3) в (2.4) и (2.3), 4) в (2.4) следует, что $h_0 = g_0 \equiv 0$. Тогда для определения h_i, g_i ($i \geq 1$) приходим к системам линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$h_i'' - \theta_0 g_i = f_{i1}, \quad g_i'' + \theta_0 h_i - \frac{\varphi_0}{\theta_0} g_i = f_{i2} \quad (2.7)$$

с условиями $\{h_i, g_i\} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и краевыми условиями при $t = 0$ в случае 3) и 4) в (1.2) соответственно

$$\begin{aligned} h_i'(0) &= \left[\frac{dv_{i-1}}{dr} - \nu v_{i-1} \right]_{r=1} - \nu h_{i-1}(0), & g_i'(0) &= \\ &= \left[\frac{du_{i-1}}{dr} + \nu u_{i-1} \right]_{r=1} + \nu g_{i-1}(0) \\ h_i'(0) &= \left[\frac{dv_{i-1}}{dr} - \nu v_{i-1} \right]_{r=1} - \nu h_{i-1}(0), & g_i(0) &= -u_i|_{r=1} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Здесь f_{i1} и f_{i2} совпадают соответственно с F_{i1} и F_{i2} из (2.5), если в последних положить $h_0 = g_0 \equiv 0$. В частности, при $i = 1$ находим $f_{11} = f_{12} = 0$. Тогда для главных членов h_1, g_1 в (2.1) в случаях 3) и 4) в (1.2) соответственно получаем

$$\begin{aligned} h_1 \left(\frac{1-r}{\varepsilon} \right) &= \frac{B}{2ab} \left[a \left(1 + \frac{Q}{2} \right) x + b \left(1 + \frac{Q}{2} \right) y \right], & g_1 \left(\frac{1-r}{\varepsilon} \right) &= \\ &= \frac{B}{2ab} [ax + by] \\ h_1 \left(\frac{1-r}{\varepsilon} \right) &= \frac{B}{b} \left[\frac{Q}{4} x - 2aby \right], & g_1 \left(\frac{1-r}{\varepsilon} \right) &= \frac{B}{b} x \end{aligned} \quad (2.9)$$

Здесь

$$x = e^{-a\tau} \sin b\tau, \quad y = e^{-a\tau} \cos b\tau, \quad \tau = \frac{1-r}{\varepsilon \sqrt{-\theta_0}}, \quad Q = \frac{2\varphi_0}{\theta_0^2}$$

$$B = [-\theta_0]^{1/2} [(\varphi\theta^{-1})' - \nu\varphi\theta^{-1}]_{r=1}, \quad a = \left(\frac{4-Q}{8} \right)^{1/2}, \quad b = \left(\frac{4+Q}{8} \right)^{1/2}$$

Очевидно, что формулы (2.9) справедливы только при $\varphi_0 < 2\theta_0^2$.

3. Решение уравнений краевого эффекта (2.3). Произведя замены

$$h_0 = -\theta_0 h, \quad g_0 = -\theta_0 g, \quad \varphi_0 = \frac{Q}{2} \theta_0^2, \quad t = (-\theta_0)^{1/2} \tau$$

из (2.3), (2.4) получим

$$\frac{d^2 h}{d\tau^2} + \frac{1}{2} g^2 + g = 0, \quad \frac{d^2 g}{d\tau^2} - gh - h + \frac{Q}{2} g = 0, \quad \{h, g\}_\infty \rightarrow 0 \quad (3.1)$$

с краевыми условиями

$$1) \quad h|_{\tau=0} = \frac{Q}{2}, \quad \frac{dg}{d\tau}|_{\tau=0} = 0 \quad 2) \quad h|_{\tau=0} = \frac{Q}{2}, \quad g|_{\tau=0} = 0 \quad (3.2)$$

Методом, аналогичным изложенному (см. [1], стр. 52), решение задач (3.1), (3.2) сведем к решению двух нелинейных алгебраических уравнений бесконечного порядка. Для этого решение ищется в виде

$$h = \sum_{k+m=1} a_{mk} e^{-a(m+k)\tau} x^m y^k, \quad g = \sum_{k+m=1} b_{mk} e^{-a(m+k)\tau} x^m y^k \quad (3.3)$$

$$x = \sin b\tau, \quad y = \cos b\tau, \quad a = \left(\frac{4-Q}{8}\right)^{1/2}, \quad b = \left(\frac{4+Q}{8}\right)^{1/2}$$

Подставляя (3.3) в (3.1) и приравнявая нулю после приведения подобных членов коэффициенты при $x^m y^k$, получаем для определения a_{01} , b_{01} , a_{10} , b_{10} систему двух уравнений

$$b_{01} = \frac{Q}{4} a_{01} + 2aba_{10}, \quad b_{10} = \frac{Q}{4} a_{10} - 2aba_{01} \quad (3.4)$$

а для определения $a_{m,k}$; $b_{m,k}$ ($m+k=n$; $m \geq 0$, $k \geq 0$, $n \geq 2$) — системы из $2(n+1)$ линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} A_{mk} a_{m,k} + B_{mk} a_{m+1,k-1} + C_{mk} a_{m-1,k+1} + D_{mk} a_{m+2,k-2} + \\ + E_{mk} a_{m-2,k+2} + b_{mk} = -\frac{1}{2} \sum_{r+l=m, t+p=k} b_{rt} b_{lp} \\ A_{mk} b_{m,k} + B_{mk} b_{m+1,k-1} + C_{mk} b_{m-1,k+1} + D_{mk} b_{m+2,k-2} + \\ + E_{mk} b_{m-2,k+2} + \frac{Q}{2} b_{mk} - a_{mk} = \sum_{r+l=m, t+p=k} a_{rt} b_{lp} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A_{mk} &= a^2 (m+k)^2 - b^2 (2km + m+k), & B_{mk} &= -2ab (m+1)(m+k) \\ C_{mk} &= -B_{km}, & D_{mk} &= b^2 (m+2)(m+1), & E_{mk} &= b^2 (k+2)(k+1) \end{aligned}$$

Система (3.5) записана в рекуррентной форме и позволяет найти неизвестные a_{ij} , b_{ij} , индексы которых удовлетворяют условию $i+j=m+k$, если a_{ij} , b_{ij} с индексами $i+j < m+k$ уже найдены.

Для определения неизвестных a_{01} и a_{10} используем граничные условия (3.2). Соответственно для случаев 1) и 2) при помощи (3.3) получаем

$$\begin{aligned} 1) \quad \sum_{m=1} a_{m0} = \frac{Q}{2}, \quad a \sum_{k=1} k b_{0k} - b \sum_{k=0} b_{1k} = 0 \\ 2) \quad \sum_{m=1} a_{m0} = \frac{Q}{2}, \quad \sum_{m=1} b_{m0} = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Здесь a_{mk} и b_{ij} ($m+k \geq 2$, $i+j \geq 1$) выражаются через a_{01} и a_{10} последовательно по формулам (3.4), (3.5). Поэтому относительно a_{01} и a_{10} формулы (3.6) представляют собой систему двух нелинейных алгебраических уравнений бесконечного порядка.

Будем искать решение задач (3.1), (3.2), ограничиваясь конечным числом членов в суммах (3.3), что приводит к решению нелинейных уравнений конечного порядка.

Как всегда в таких случаях, это число N подбирается из принципа практической сходимости. Соответствующие заданному значению N урав-

нения (3.4) — (3.6) решаются на ЭЦВМ при помощи алгоритма, сочетающего метод продолжения по параметру Q и метод Ньютона. Для этого уравнения (3.6) записываются в виде

$$F(a_{01}(Q), a_{10}(Q), Q) = 0, \quad G(a_{01}(Q), a_{10}(Q), Q) = 0 \quad (3.7)$$

При $Q = 0$ система (3.7) имеет тривиальное решение $a_{01} = a_{10} = 0$. Положим $Q = \Delta Q$. Тогда нулевое решение является приближенным, если ΔQ достаточно мало, и оно уточняется по методу Ньютона. Итерации при $Q = \Delta Q$ проводятся до тех пор, пока корень не будет найден с заданной степенью точности. После этого делается еще шаг по Q и для $Q = 2\Delta Q$ приближенным значением корня считается значение, полученное на предыдущем этапе и т. д. При приближении к точке ветвления Q^* производная da_{01}/dQ начинает сильно возрастать и тогда надо переходить к движению по a_{01} или a_{10} , что и позволяет определить Q^* .

При помощи указанного алгоритма для ЭЦВМ «Одра-1204» была составлена программа, в которой предусмотрен автоматический выбор шага, связанный с числом итераций по методу Ньютона. Были найдены значения $Q^* = 0.793$ в случае краевых условий 1) в (3.2) и $Q^* = 1.766$ в случае 2) в (3.2). (Последующие цифры не выписываются, хотя значения корней отыскивались с точностью до 10^{-9} при $N = 13$. Время, которое требуется для получения Q^* , равно 20 мин.)

Контроль расчетов производился в обоих случаях при помощи первого интеграла

$$\frac{1}{2}(h'^2 - g'^2) + \frac{1}{2}g^2h + gh - \frac{Q}{4}g^2 = 0, \quad ()' = \frac{d()}{d\tau} \quad (3.8)$$

который получается из (3.1), если умножить первое уравнение на h' , второе — на $-g'$, сложить и проинтегрировать от τ до ∞ . Полагая $\tau = 0$ и учитывая (3.2), из (3.8) находим соответствующие случаям 1) и 2) контрольные формулы

$$1) \quad h'^2(0) + Qg(0) = 0, \quad 2) \quad h'^2(0) - g'^2(0) = 0 \quad (3.9)$$

Отметим, что при указанной точности вычислений в окрестности Q^* левые части формул (3.9) давали значения в пределах от $2 \cdot 10^{-5}$ до $5 \cdot 10^{-5}$.

Возвращаясь к переменным φ_0 и θ_0 , получаем значения, которым отвечают наименьшие точки ветвления

$$1) \quad \frac{1}{2}\sigma_0 \equiv \varphi_0 = 0.3965 \theta^2(1), \quad 2) \quad \frac{1}{2}\sigma_0 \equiv \varphi_0 = 0.883 \theta^2(1) \quad (3.10)$$

4. Асимптотическое значение верхней критической нагрузки. Результат п. 3 позволяет сразу получить асимптотическое значение верхней критической нагрузки в случае свободной заделки края. Это значение можно уточнить, если разыскивать его в виде ряда теории возмущений

$$\sigma^* \equiv 2\varphi^*(1) = \sigma_0 + \varepsilon\sigma_1 + \dots + \varepsilon^n\sigma_n + \dots \quad \sigma_0 = 2\varphi_0(1) \quad (4.1)$$

При этом для соответствующей функции $\varphi(r)$ имеем

$$\varphi^*(r) = \varphi_0(r) + \frac{1}{2}(\varepsilon\sigma_1 + \varepsilon^2\sigma_2 + \dots + \varepsilon^n\sigma_n + \dots)r^2$$

Теперь при построении асимптотических разложений (2.1) в левой части второго уравнения (2.2) появится дополнительное слагаемое $1/2 \sigma_i r^2$, от которого будут зависеть все последующие функции итерационных процессов, начиная с номера i . Значения σ_i ($i \geq 1$) определяются из условий разрешимости уравнений (2.6), (2.5). Численного анализа и отыскания членов при $i \geq 1$ в (2.1) и (4.1) здесь не проводится.

Записывая формулы (3.10), (4.1) в размерных переменных, приходим к следующему результату.

Пусть $\varphi(r) \theta^{-1}(r)$ — достаточно гладкая функция при $0 \leq r \leq 1$. Тогда для достаточно тонких оболочек со свободной заделкой края значения верхней критической нагрузки P_n^* определяются формулой

$$P_n^* \equiv 2 \int_0^1 p_n^*(\xi) \xi d\xi = \frac{\alpha_n E h^2 a^{-2\theta^2(1)}}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} [1 + a_{1n}\varepsilon + a_{2n}\varepsilon^2 + \dots] \quad (4.2)$$

$$n = 1, 2, \quad \alpha_1 = 0.3965, \quad \alpha_2 = 0.883, \quad P = E h^2 \gamma^{-1} a^{-2\theta^2(1)} \varepsilon$$

Здесь индексы $n=1, 2$ соответствуют краевым условиям 1), 2) в (1.2).

В случае жесткого закрепления края (краевые условия 3), 4) в (1.2)) влияние краевого эффекта значительно слабее и главный член асимптотики в зоне краевого эффекта порядка ε . Он определяется однозначно из (2.9) при $\varphi(1) < 2\theta^2(1)$. Для $\varphi(1) = 2\theta^2(1)$ уравнения (2.7) не имеют убывающих решений и условия на бесконечности не удовлетворяются.

Чтобы показать, что $\sigma_0 \equiv 2\varphi(1) = 4\theta^2(1)$ есть асимптотическое значение верхней критической нагрузки в случае жесткого закрепления края оболочки, несколько изменим процесс построения асимптотики п. 2 в зоне краевого эффекта. Именно способ получения уравнений оставим тем же, а соответствующие граничные условия на каждом этапе будем удовлетворять точно. Это приводит к определению h_0, g_0 из системы (2.3) с соответствующими для случаев 3) и 4) в (1.2) краевыми условиями

$$\begin{aligned} 3) \quad h_0'(0) + \varepsilon \nu h_0(0) &= \varepsilon [(\varphi\theta^{-1})' - \nu\varphi\theta^{-1}]_{r=1}, & g_0'(0) - \varepsilon \nu g_0(0) &= 0 \\ 4) \quad h_0'(0) + \varepsilon \nu h_0(0) &= \varepsilon [(\varphi\theta^{-1})' - \nu\varphi\theta^{-1}]_{r=1}, & g_0(0) &= 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Задачи (2.3), (4.3) решаем так же, как и в п. 3. Значения наименьших точек ветвления получаются достаточно близкими к $2\theta^2(1)$ и тем ближе, чем меньше ε . Способ построения следующих членов асимптотики такой же, как и в случае свободной заделки края.

Таким образом, для достаточно тонких оболочек с жестким закреплением края значения верхней критической нагрузки P_n^* определяются формулой

$$P_n^* \equiv 2 \int_0^1 p_n^*(\xi) \xi d\xi = \frac{2E h^2 a^{-2\theta^2(1)}}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} [1 + a_{1n}\varepsilon + a_{2n}\varepsilon^2 + \dots] \quad (4.4)$$

($n = 3, 4$. Коэффициенты a_{in} здесь не найдены.)

5. Сферическая оболочка при равномерном внешнем давлении. В этом случае в формулах п. 2—4 надо положить

$$\varphi(r) = \frac{1}{2} q r^2, \quad \theta = -\lambda r, \quad \lambda = \frac{a}{R}, \quad P = \frac{qE}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} \left(\frac{h}{a}\right)^2$$

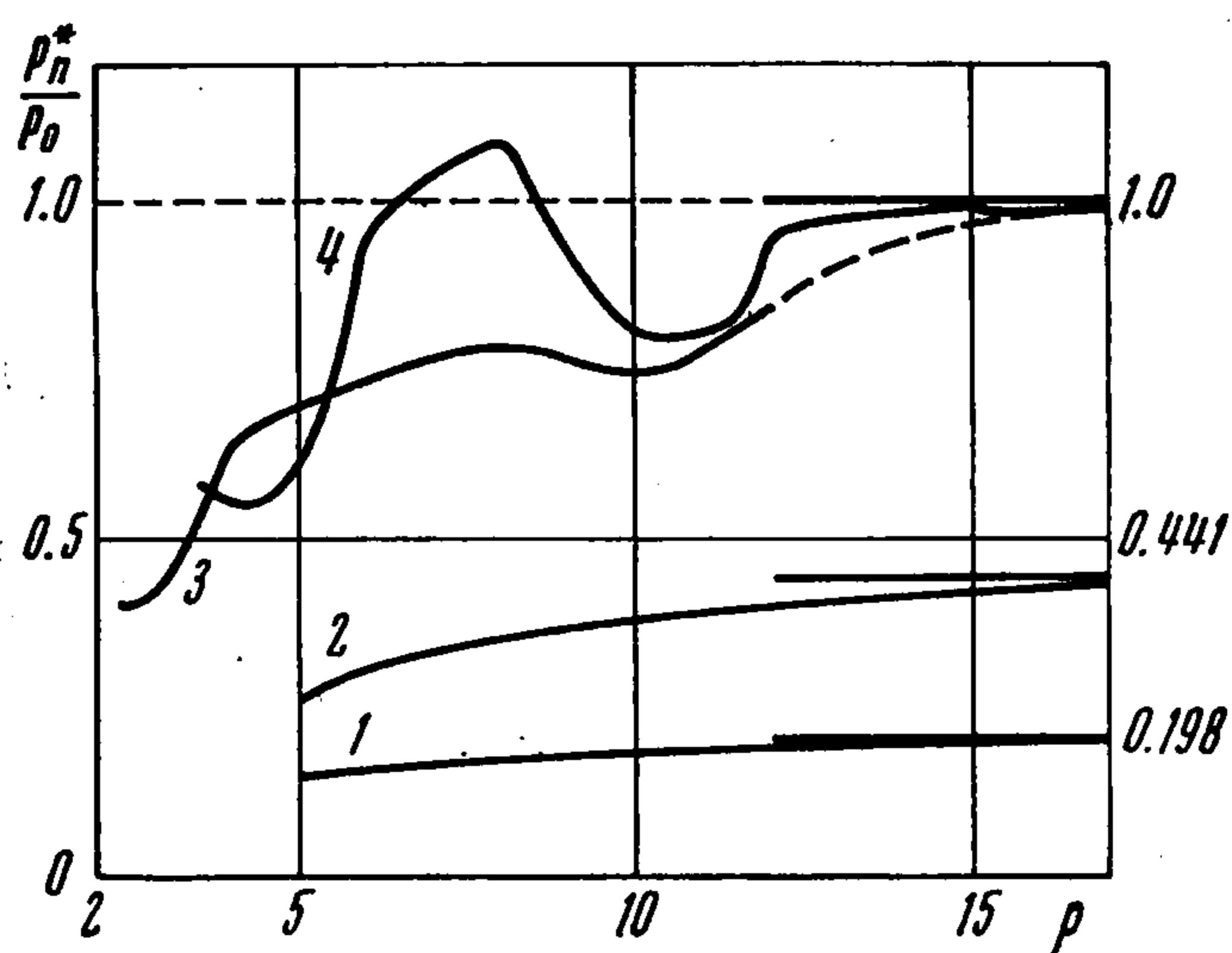
Тогда из (4.2), (4.4) для значений верхнего критического давления потери устойчивости достаточно тонких пологих сферических оболочек p_n^* получаем

$$p_n^* = \frac{\alpha_n E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \left(\frac{h}{R}\right)^2 [1 + a_{1n}\varepsilon + a_{2n}\varepsilon^2 + \dots] \quad (5.1)$$

$$n = 1, 2, 3, 4; \quad \alpha_1 = 0.3965, \quad \alpha_2 = 0.883, \quad \alpha_3 = \alpha_4 = 2$$

Здесь, как и в п. 4, индексы $n = 1, 2, 3, 4$ соответствуют крайвым условиям 1) — 4) в (1.2).

Значения p_n^* , вычисленные с учётом только первого члена по формулам (5.1), сравнивались с результатами верхних критических давлений, полученных на ЭЦВМ разными авторами. Для наименьших значений параметра $\varepsilon\lambda^{-1} \equiv h(2\gamma H)^{-1}$, приведенных в [4,12], при $n = 1, 2$ расхождение не превышает 7%.



В случае крайвых условий 3) и 4) в (1.2) формула (5.1) была получена ранее А. В. Погореловым (см. [1], стр. 145) геометрическим методом. Это хорошо известный результат линейной теории, однако в [1] подчёркивается, что формулу надо применять для достаточно тонких оболочек. При крайвых условиях 4) в (1.2) этот результат подтверждается результатами [8] для $3.5 \cdot 10^{-3} < \varepsilon\lambda^{-1} < 5 \cdot 10^{-3}$ (значений верхних критических давлений для меньших $\varepsilon\lambda^{-1}$ не приводится).

В случае условий 3) в (1.2) на основании известных автору данных [12] при $\varepsilon\lambda^{-1} \equiv h(2\gamma H)^{-1} > 7 \cdot 10^{-3}$ ещё нельзя судить о поведении p_3^* , когда $\varepsilon \rightarrow 0$. Значения верхнего критического давления для этого случая при $\varepsilon < \lambda/30$ меньше соответствующих значений p_4^* и чтобы выйти на асимптотику, надо проводить расчёты при меньших значениях ε . На фигуре, построенной с использованием результатов работ [4,8,12], а также формулы (5.1), приведена зависимость верхнего критического давления от геометрических параметров оболочки. Кривым 1—4 соответствуют условия закрепления 1) — 4) в (1.2). По оси ординат откладывается значение параметра p_n^*/p_0 , а по оси абсцисс — значение параметра ρ , причём

$$\rho = \frac{2\gamma H}{h} = \frac{a^2\gamma}{Rh} = \frac{\lambda}{\varepsilon}, \quad p_0 = \frac{4E}{\gamma} \left(\frac{h}{R}\right)^2, \quad \gamma^2 = 12(1-\nu^2)$$

Далее дается строгое доказательство формулы (5.1) для p_3^* . В связи с этим сначала доказывается следующая

Теорема. Пусть $\varepsilon \rightarrow 0$. Тогда для сколь угодно малого $\delta > 0$, ($\delta = O(\varepsilon)$) найдется такое значение ε_1 , что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ в задаче (1.1), 3) в (1.2) безразмерное значение верхнего критического давления q^* удовлетворяет неравенству $q^* \geq 4\lambda^2 - \delta$. При этом для всех $q < 4\lambda^2 - \delta$ в окрестности $v_\varepsilon, u_\varepsilon$ из (2.1) существует только одно решение и справедливы оценки

$$\max_r |v - v_\varepsilon| \leq m\varepsilon^n, \quad \max_r |u - u_\varepsilon| \leq m\varepsilon^n \quad (5.2)$$

$$(0 \leq r \leq 1, n = 1, 2, \dots)$$

Доказательство. Как следует из п. 2, асимптотические разложения (2.1) в случае задачи (1.1), (3) в (1.2) можно представить в виде

$$v_\varepsilon = -\frac{q}{2\lambda} r + \varepsilon s_1(r, \varepsilon), \quad u_\varepsilon = \varepsilon s_2(r, \varepsilon) \quad (5.3)$$

$$s_1(r, \varepsilon) = \sum_{i=1}^n \varepsilon^{i-1} (h_i + \alpha_i) + \varepsilon^n \varphi_1, \quad s_2(r, \varepsilon) = \sum_{i=1}^n \varepsilon^{i-1} (g_i + \beta_i) + \varepsilon^n \varphi_2$$

Здесь h_i, g_i определены в п. 2, α_i, β_i строятся так же, как и в п. 2 работы [17], а достаточно гладкие произвольные функции $\varphi_1(r)$ и $\varphi_2(r)$ отвечают единственному требованию — правые части (5.3) должны точно удовлетворять краевым условиям (3) в (1.2).

Сначала будем доказывать справедливость асимптотических разложений при $q < 4\lambda^2 - \delta$. Для этого воспользуемся теоремой 4.2 [18]. Способ получения априорных оценок, нужных для выполнения условий этой теоремы, аналогичен [17]. Рассматривая задачу (1.1), (3) в (1.2) как функциональное уравнение $P(V) = 0$, подобно [17] получаем оценки

$$\|P(V_\varepsilon)\|_{L_2} \leq c_1 \varepsilon^{n+1}, \quad \|P''\| \leq c_3, \quad V_\varepsilon \equiv \left(-\frac{qr}{2\lambda} + \varepsilon s_1, \varepsilon s_2 \right) \quad (5.4)$$

Несколько труднее получается оценка

$$\|P'_{V_\varepsilon}\|^{-1} \leq c_2 \varepsilon^{-4}, \quad P'_{V_\varepsilon}(V) \equiv \left\{ \varepsilon^2 A v - (\varepsilon s_1 + \lambda r) u, \varepsilon^2 A u - \frac{qr}{2\lambda} u + \varepsilon s_2 u + \varepsilon s_1 v + \lambda r v \right\} \quad (5.5)$$

Здесь P'_{V_ε} — производная Фреше на элементе V_ε .

Рассмотрим систему уравнений

$$P'_{V_\varepsilon}(V) = f, \quad f \equiv (f_1, f_2), \quad V \equiv (v, u) \quad (5.6)$$

Умножим первое уравнение (5.6) на $(\delta_1 v - u)$, а второе — на $\delta_1 v + u$, где δ_1 — некоторое малое положительное число, проинтегрируем от нуля до единицы и сложим. В результате получим

$$\begin{aligned} & \delta_1 \varepsilon^2 \left[\int_0^1 \left(r v'^2 + \frac{v^2}{r} + r u'^2 + \frac{u^2}{r} \right) dr + v u^2(1) - v v^2(1) \right] - \frac{q \delta_1}{2\lambda} \int_0^1 r u^2 dr + \\ & + \lambda \int_0^1 r (u^2 + v^2) dr - \frac{q}{2\lambda} \int_0^1 r u v dr + \varepsilon \int_0^1 (\delta_1 s_2 u^2 + s_2 u v + s_1 v^2 + s_1 u v) dr + \\ & + 2v \varepsilon^2 u(1) v(1) = \int_0^1 [(\delta_1 f_1 + f_2) v + (\delta_1 f_2 - f_1) u] dr \quad (5.7) \end{aligned}$$

Отметим следующие неравенства:

$$\begin{aligned} & \varepsilon \int_0^1 (\delta_1 s_2 u^2 + s_2 u v + s_1 v^2 + s_1 u v) dr \leq \delta_2 \int_0^1 r (u^2 + v^2) dr \\ & \delta_2 = O(\varepsilon), \quad 2v(1)u(1) \leq v^2(1) + u^2(1), \quad v^2(1) \leq a^2 \int_0^1 r v'^2 dr + (2 + a^{-2}) \int_0^1 r v^2 dr \quad (5.8) \end{aligned}$$

Первые два неравенства очевидны, а третье следует из следующей цепочки соотношений:

$$\begin{aligned} v^2(1) &= [r v(r)]_{r=1}^2 = 2 \int_0^1 (r^2 v' v + r v^2) dr \leq a^2 \int_0^1 r^2 v'^2 dr + \\ & + \frac{1}{a^2} \int_0^1 r^2 v^2 dr + 2 \int_0^1 r v^2 dr \leq a^2 \int_0^1 r v'^2 dr + \left(2 + \frac{1}{a^2} \right) \int_0^1 r v^2 dr \end{aligned}$$

Теперь, полагая $a^2 = 1/2 v^{-1} \delta_1 (1 + \delta_1)^{-1}$, при помощи (5.8) из (5.7) выводим

$$\left[\lambda - \delta_2 - \varepsilon^2 (1 + \delta_1) 2v - 2\varepsilon^2 v^2 (1 + \delta_1)^2 \delta_1^{-1} - \frac{q\delta_1}{2\lambda} \right] \int_0^1 r (u^2 + v^2) dr + \\ + \frac{\delta_1 \varepsilon^2}{2} \int_0^1 \left(r v'^2 + \frac{v^2}{r} + r u'^2 + \frac{u^2}{r} \right) dr - \frac{q}{2\lambda} \int_0^1 r u v dr \leq V \sqrt{2} \|f\|_{L_2} \|V\|_{L_2} \quad (5.9)$$

Пусть $\delta_1 = \varepsilon$ и $q < 4\lambda (\lambda - 2K\varepsilon)$, где $K > 0$ и

$$\left| \delta_2 - \varepsilon^2 (1 + \varepsilon) 2v - 2\varepsilon v^2 (1 + \varepsilon)^2 - \frac{q\varepsilon}{2\lambda} \right| \leq \frac{K\varepsilon}{2}$$

Тогда из (5.9) находим оценки

$$\|V\|_{L_2} \leq 2^{3/2} (\varepsilon K)^{-1} \|f\|_{L_2}, \quad \int_0^1 \left(r v'^2 + \frac{v^2}{r} + r u'^2 + \frac{u^2}{r} \right) dr \leq 8\varepsilon^{-4} K \|f\|_{L_2}^2$$

Отсюда на интервале $0 \leq r \leq 1$ имеем

$$\max_r |v| + \max_r |u| \leq m_3 \varepsilon^{-2}$$

и оценка (5.5) получается из (5.6).

При помощи (5.4) и (5.5) проверяем, что все условия теоремы 4.2 из [18] выполняются, если $n > 7$ и ε достаточно мало. Оценки (5.2) доказываются теперь при помощи неравенства треугольника.

Таким образом, при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $q < 4\lambda (\lambda - 2K\varepsilon)$ существует решение задачи (1.1), 3) в (1.2), для которого справедливы асимптотические разложения (5.3). Заметим, что теорема Л. В. Канторовича о сходимости операторного метода Ньютона, из которой была получена теорема 4.2 из [18] гарантирует единственность этого решения в окрестности (5.3). Последнее приводит к выводу о том, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ значение верхнего критического давления $q^* \geq 4\lambda^2 - \delta$, где $\delta = O(\varepsilon)$. Теорема доказана.

Далее заметим, что для $q \leq 4\lambda^2 - \delta$, где $\delta = O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, граничные значения v_ε и u_ε из (5.3), а следовательно, и решение задачи (1.1), 3) в (1.2) стремятся соответственно к значениям

$$v|_{r=1} = -\frac{q}{2\lambda}, \quad u|_{r=1} = 0, \quad \left\{ \frac{v}{r}, \frac{u}{r} \right\}_{r=0} < \infty \quad (5.10)$$

Задача (1.1), (5.10) при любом значении q имеет тривиальное решение $v = -1/2 \times q r \lambda^{-1}$, $u = 0$, отвечающее безмоментной форме равновесия. В работах [20, 19] показано, что в левой полукрестности наименьшего собственного значения соответствующей линейризованной краевой задачи $(4\lambda^2 - \mu, \mu)$, где μ — некоторое малое положительное число, может появиться от одного до трех новых решений задачи (1.1), (5.10). Следовательно, при $\varepsilon \rightarrow 0$ $q^* = 4\lambda^2$ является точкой ветвления.

Аналогичные рассуждения проводятся для случая 4) в (1.2).

6. Об асимптотическом значении нижней критической нагрузки. Для нахождения решения, соответствующего зеркально выпученной форме равновесия, асимптотические разложения (2.1) строятся в окрестности второго решения (1.4). Для определения h_0 , g_0 получаем систему уравнений краевого эффекта:

$$h_0'' + 1/2 g_0^2 + \theta_0 g_0 = 0, \quad g_0'' - g_0 h_0 - \theta_0 h_0 - \frac{\Phi_0}{\theta_0} g_0 = 0, \quad \{h_0, g_0\}_\infty \rightarrow 0 \quad (6.1)$$

с соответствующими (1.2) краевыми условиями

$$\begin{aligned} 1) \quad h_0(0) = -\varphi_0 \theta_0^{-'}, \quad g_0'(0) = 0, \quad 2) \quad h_0(0) = -\varphi_0 \theta_0^{-'}, \quad g_0(0) = -2\theta_0, \\ 3) \quad h_0'(0) = 0, \quad g_0'(0) = 0, \quad 4) \quad h_0'(0) = 0, \quad g_0(0) = -2\theta_0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

Последующие члены асимптотики определяются так же, как и в п. 2. Решая задачи (6.1), (6.2) по методу п. 3 и приводя рассуждения аналогичные п. 4, приходим к следующему результату.

Пусть $\varphi(r) \theta^{-1}(r)$ — достаточно гладкая функция при $0 \leq r \leq 1$. Тогда для достаточно тонких оболочек значение нижней критической нагрузки P_{*n} определяется формулой

$$P_{*n} \equiv 2 \int_0^a p_{*n}(\xi) \xi d\xi = \frac{\beta_n E h^2 a^{-2} \theta^2(1)}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} [1 + b_{1n} \varepsilon + \dots]$$

$$\beta_1 = -0.3965, \quad \beta_2 = -0.057, \quad \beta_3 = -2, \quad \beta_4 = 2.58 \cdot 10^{-3}$$

Индексы $n = 1, 2, 3, 4$ соответствуют краевым условиям 1) — 4) в (1.2).

Здесь нижняя критическая нагрузка определяется как наименьшее значение $\sigma_* \equiv 2\varphi_*(1)$, при котором существует непрерывная однозначная ветвь решений $u(r, \sigma)$, $v(r, \sigma)$, соответствующая зеркально выпученной форме равновесия. Заметим, что это определение не является вполне строгим, так как отсутствует доказательство того факта, что σ_* — значение наименьшей воспринимаемой оболочкой нагрузки [1].

Таким образом, в первых трех случаях закрепления края значение нижней критической нагрузки получается отрицательным и только в случае абсолютно глубокой заделки края положительным. В случае шарнирного опирания края (краевые условия 1) и 3) в (1.2)) этот факт имеет строгое математическое обоснование [17, 21].

Автор благодарит И. И. Воровича, В. И. Юдовича и М. Ю. Жукова за помощь в работе.

Поступила 12 IV 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Погорелов А. В. Геометрические методы в нелинейной теории упругих оболочек. М., «Наука», 1967.
2. Budiansky B. Buckling of clamped shallow spherical shells Proc. Symposium Theory of Thin Elastic Shells. Delft., 1959, Amsterdam, North-Holland Publ. Co., 1960.
3. Keller H. B., Reiss E. L., Spherical cap shapping. J. Aero/Space Sci., 1959, vol. 26, № 10, p. 643—652.
4. Weinitschke H. J. On the stability problem for shallow spherical shells. J. Math. and Phys., 1960, vol. 38, № 4, p. 209—231.
5. Murray F. J., Wright F. W. The buckling of thin spherical shells. J. Aero/Space Sci., 1961, vol. 28, № 3, p. 223—236.
6. Thurston G. A. A numerical solution of the nonlinear equations for axisymmetric bending of shallow spherical shells. Trans. ASME, Ser. E. J. Appl. Mech., vol. 28, № 4, p. 557—562.
7. Феодосьев В. И. Об одном способе решения нелинейных задач устойчивости деформируемых систем. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2.
8. Keller H. B., Wolfe A. W. On the nonunique equilibrium states and buckling mechanism of spherical shells., J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1965, vol. 13, № 3.

9. В о р о в и ч И. И., З и п а л о в а В. Ф. К решению нелинейных задач теории упругости методом перехода к задаче Коши, ПММ, 1965, т. 29, вып. 5.
 10. В о р о в и ч И. И., З и п а л о в а В. Ф. Анализ нелинейной деформации сферического купола в высших приближениях, Инж. ж. МТТ, 1966, № 2.
 11. В а л и ш в и л и Н. В., С т е г н и й В. Н. О формах равновесия пологих сферических оболочек. Инж. ж. МТТ, 1968, № 6.
 12. В а л и ш в и л и Н. В. Об устойчивости пологих сферических оболочек. Тр. 7 Всес. конф. по теории оболочек и пластинок. Днепропетровск, 1969, М., «Наука», 1970.
 13. Ш и л ь к р у т Д. И., Ш е в а н д р о н о в Н. В., М о р а р В. П., М а к с и м о в Ю. А. Решение задач нелинейной теории оболочек на аналоговых вычислительных машинах методом прямого моделирования и на ЭЦВМ методом непосредственного сведения к задаче Коши. Кишинев, Изд-во АН МолдССР, 1969.
 14. Ф е о д о с ь е в В. И. Упругие элементы точного приборостроения. М. Оборонгиз, 1949.
 15. С р у б щ и к Л. С. Асимптотика уравнений Рейснера в нелинейной теории симметрично нагруженных оболочек вращения. Докл. АН СССР, 1968, т. 182, № 3.
 16. В о р о в и ч И. И., С р у б щ и к Л. С. Асимптотический анализ общих уравнений нелинейной теории пологих оболочек. Тр. 7 Всес. конф. по теории оболочек и пластинок. Днепропетровск. 1969, М., «Наука», 1970.
 17. С р у б щ и к Л. С. Нежесткость сферической оболочки. ПММ, 1967, т. 31, вып. 4.
 18. С р у б щ и к Л. С., Ю д о в и ч В. И. Асимптотическое интегрирование системы уравнений большого прогиба симметрично нагруженных оболочек вращения. ПММ, 1962, т. 26, вып. 5.
 19. В о р о в и ч И. И. Некоторые вопросы устойчивости оболочек в большом. Докл. АН СССР, 1958, т. 122, № 1.
 20. R e i s s E. L. Bifurcation buckling of Spherical caps. *Communs. Pure and Appl. math.*, 1965, vol. 18, N 1/2, p. 65—82.
 21. С р у б щ и к Л. С. К вопросу о нежесткости в нелинейной теории пологих оболочек. Изв. АН СССР. Сер. матем. 1972, № 3.
-