Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 539.3

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

И. И. Ворович, Л. П. Лебедев

(Ростов-на-Дону)

Разрешимость уравнений равновесия изотропных однородных пологих оболочек постоянной толщины (вариант В. З. Власова) рассматривалась в работе [1]. В данной работе результаты [1] распространяются на случай ортотропных неоднородных пологих оболочек переменной толщины со значительно более общими граничными условиями. В качестве промежуточного результата получено обобщение неравенства Корна. Отмечается возможность применения проекционных методов. Определение обобщенного решения задачи и получение основной априорной оценки решений несколько отличаются от аналогичных в [1].

1. Основные соотношения. Пусть срединная поверхность оболочки S^* задается уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\alpha, \beta)$, которое гомеоморфно отображает S^* на некоторую область Ω плоскости переменных α, β. Рассматривается следующий вариант соотношений нелинейной теории для упругой ортотропной неоднородной пологой оболочки переменной толщины:

$$\begin{gathered}
\varepsilon_1 = A^{-1}u_\alpha + A_\beta v(AB)^{-1} + wR_1^{-1} + {}^1/_2 w_\alpha^2 A^{-2} \\
\varepsilon_2 = B^{-1}v_\beta + B_\alpha u(AB)^{-1} + wR_2^{-1} + {}^1/_2 w_\beta{}^2 B^{-2} \\
\varepsilon_3 = \frac{A}{B}\left(\frac{u}{A}\right)_\beta + \frac{B}{A}\left(\frac{v}{B}\right)_\alpha + \frac{w_\alpha w_\beta}{AB} - 2\frac{w}{R_{12}} \qquad (1.1) \\
\varkappa_1 = -\frac{1}{A}\left(\frac{w_\alpha}{A}\right)_\alpha - \frac{A_\beta w_\beta}{AB^2}, \qquad \varkappa_2 = -\frac{1}{B}\left(\frac{\omega_\beta}{B}\right)_\beta - \frac{B_\alpha w_\alpha}{A^2 B} \\
\tau = -(AB)^{-1}w_{\alpha\beta} + B_\alpha w_\beta A^{-1}B^{-2} + A_\beta w_\alpha A^{-2}B^{-1} \\
T_1 = E_{11}\varepsilon_1 + E_{12}\varepsilon_2, \qquad T_2 = E_{21}\varepsilon_1 + E_{22}\varepsilon_2, \qquad S = G_1\varepsilon_3 \\
M_1 = D_1\varkappa_1 + D_{12}\varkappa_2, \qquad M_2 = D_{21}\varkappa_1 + D_2\varkappa_2, \qquad M = D_k\tau \\
E_{ii} = 2hE_i(1-\mu_1\mu_2)^{-1} \quad (i=1,2), \quad E_{12} = \mu_2 E_{11}, \quad E_{21} = \mu_1 E_{22}, \quad G_1 = 2hG \\
3D_i = 2h^3 E_i (1-\mu_1\mu_2)^{-1} \quad (i=1,2), \quad D_{12} = \mu_2 D_1, \quad D_{21} = \mu_1 D_2, \quad 3D_k = 4Gh^3
\end{gathered}$$

В формулах (1.1) используются следующие обозначения: u, v, w — смещения точки срединной поверхности оболочки, A^2, B^2, $2C = 0$ — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности, R_1, R_2, R_{12} — радиусы кривизны срединной поверхности, ε_1, ε_2, ε_3 — деформации растяжения и сдвига, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, τ — изменения кривизны срединной поверхности оболочки, T_1, T_2, S — тангенциальные усилия, M_1, M_2, M — изгибающие и крутящий моменты, E_1, E_2, G, μ_1, μ_2 — упругие характеристики материала; нижний индекс α (β) обозначает дифференцирование по α (β соответственно).

Дифференциальные уравнения равновесия изотропной однородной пологой оболочки постоянной толщины в перемещениях имеются в [1], поэтому дифференциальные уравнения, соответствующие данным условиям, здесь не приводятся.

На частях γ_i $(i=1, 2, 3, 4)$ границы Γ области Ω задаются следующие геометрические условия:

$$w|_{\gamma_1}=0, \qquad \left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_{\gamma_2}=0, \qquad u|_{\gamma_3}=0, \qquad v|_{\gamma_4}=0 \tag{1.2}$$

причем пересечение $\gamma_1 \cap \gamma_2$ содержит некоторую дугу γ_1^0.

На части контура $\gamma_5 = \Gamma \setminus \gamma_1 \cap \gamma_2$ действуют перерезывающая сила $N_3(s)$, момент $\mathrm{M}^* = (M_1^*, M_2^*)$ и упругая реакция заделки так, что полная перерезывающая сила Q_n (s) определена на $\Gamma \setminus \gamma_1$, а изгибающий момент M_n (s) на $\Gamma \setminus \gamma_2$

$$Q_n(s) = N_3 + \frac{\partial}{\partial s}\,[M_1^*\cos(\beta, n) + M_2^*\cos(\alpha, n)] - a_{11}w - a_{12}\frac{\partial w}{\partial n} \tag{1.3}$$

$$M_n(s) = M_1^*\cos(\alpha, n) + M_2^*\cos(\beta, n) - a_{21}w - a_{22}\frac{\partial w}{\partial n}$$

На части контура $\Gamma \setminus \gamma_3$ задается тангенциальное усилие T_1^*, на части границы $\Gamma \setminus \gamma_4$ — тангенциальное усилие T_2^*

$$T_1^*(s) = N_1(s) - b_{11}u - b_{12}v, \qquad T_2^*(s) = N_2(s) - b_{21}u - b_{22}v \tag{1.4}$$

где N_1, N_2 — внешние тангенциальные усилия, $\|b_{ij}\|$ — матрица, характеризующая реакцию упругой заделки.

2. Функциональные пространства. Далее считаются выполненными следующие условия:

1) область Ω — ограниченная область, являющаяся конечной суммой звездных областей Ω_k;

2) граница Γ области Ω состоит из конечного числа замкнутых контуров класса Ляпунова Л_1 $(m, 0)$;

3) коэффициенты первой квадратичной формы поверхности S^* A, B и их производные A_α, A_β, B_α, B_β принадлежат пространству $L^\infty(\Omega)$, причем

$$A \geqslant m_1, \qquad B \geqslant m_1 > 0 \tag{2.1}$$

почти всюду в Ω, где m_1 — некоторая постоянная;

4) кривизны срединной поверхности R_1^{-1}, R_2^{-1}, R_{12}^{-1} принажлежат пространству $L^2(\Omega)$;

5) h, E_1, E_2, G, μ_1, μ_2 принадлежат пространству $L^\infty(\Omega)$, причем почти всюду в Ω выполняются неравенства

$$0 < m_2 \leqslant h, E_1, E_2, \qquad G < \infty, \qquad 0 \leqslant \mu_1, \qquad \mu_2 \leqslant m_3 < 1 \tag{2.2}$$

где m_2, m_3 — некоторые постоянные;

6) матрица $\|b_{ij}(s)\|$ — равномерно положительно определенная на Γ, функции $a_{ij}(s)$, $b_{ij}(s)$ — кусочно-непрерывны.

1°. Пространство $H_1(\Omega)$. На множестве C_1 функций $w \in C^{(2)}(\Omega)$ и удовлетворяющих первым двум граничным условиям (1.2) вводится скалярное произведение

$$(w^{(1)}\cdot w^{(2)})_{H_1(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} [(D_1\varkappa_1^{(1)} + D_{12}\varkappa_2^{(1)})\varkappa_1^{(2)} + (D_{21}\varkappa_1^{(1)} + D_2\varkappa_2^{(1)})\varkappa_2^{(2)} + + 2D_k\tau^{(1)}\tau^{(2)}]\, ABd\alpha d\beta \tag{2.3}$$

Замыкание множества C_1 в соответствущей норме (2.3) называется пространством $H_1(\Omega)$.

2°. Пространство $H_2(\Omega, \gamma)$. Пусть C_2 — множество пар функций $\omega^*(u, v) \in C^{(1)}(\Omega)$, удовлетворяющих двум последним граничным условиям (1.2).

На множестве C_2 вводится скалярное произведение

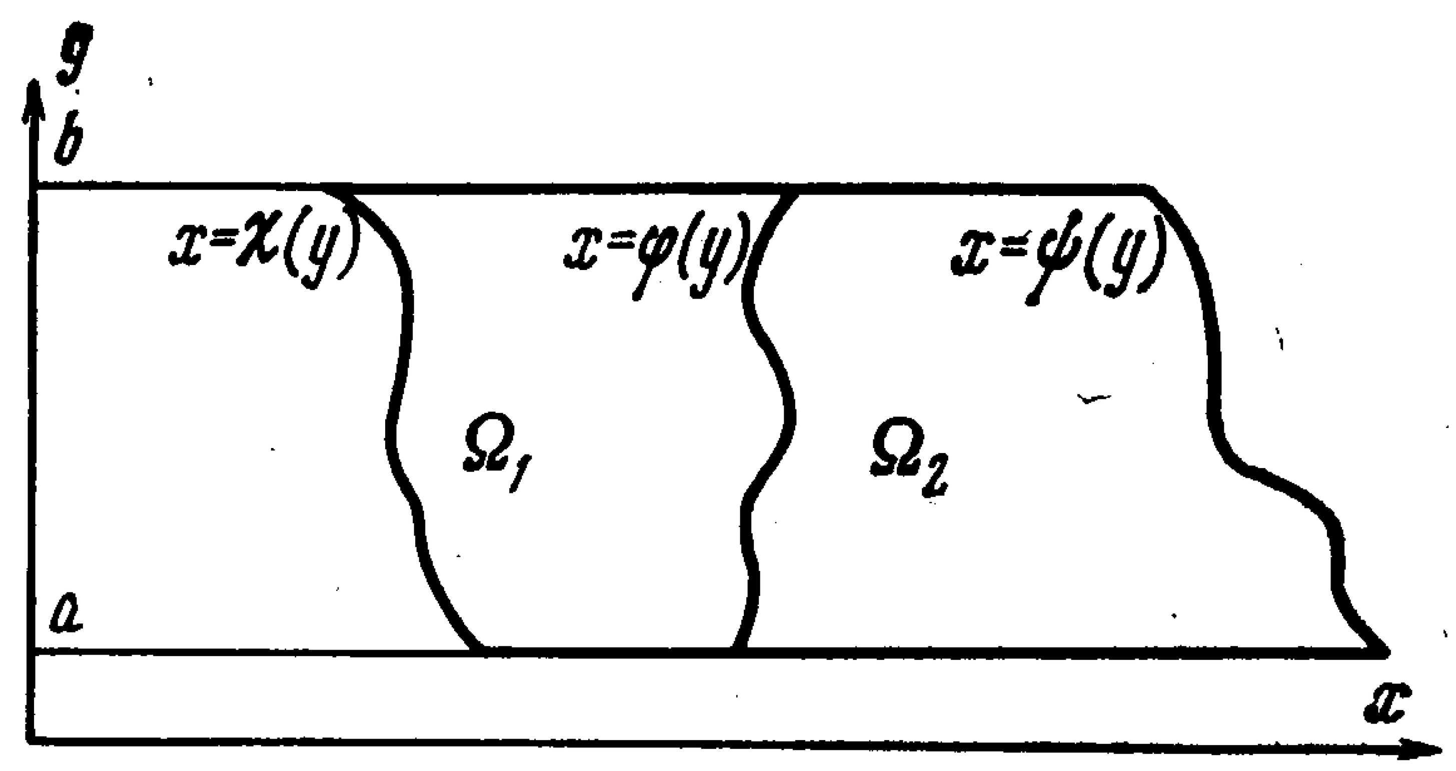
$$(\omega^{*(1)}\cdot\omega^{*(2)})_{H_2(\Omega,\gamma)} = \int\limits_{\Omega} [(E_{11}\varepsilon_{10}^{(1)} + E_{12}\varepsilon_{20}^{(1)})\varepsilon_{10}^{(2)} + + (E_{21}\varepsilon_{10}^{(1)} + E_{22}\varepsilon_{20}^{(1)})\varepsilon_{20}^{(2)} + G_1\varepsilon_{30}^{(1)}\varepsilon_{30}^{(2)}]\, ABd\alpha d\beta + + \int\limits_{\gamma} [(b_{11}u^{(1)} + b_{12}v^{(1)})u^{(2)} + (b_{21}u^{(1)} + b_{22}v^{(1)})v^{(2)}]\, ds \tag{2.4}$$

$$\varepsilon_{10}^{(i)} = A^{-1}u_\alpha^{(i)} + A_\beta v^{(i)}(AB)^{-1}, \qquad \varepsilon_{20}^{(i)} = B^{-1}v_\beta^{(i)} + B_\alpha u^{(i)}(AB)^{-1}$$

$$\varepsilon_{30}^{(i)} = \frac{A}{B}\left(\frac{u^{(i)}}{A}\right)_\beta + \frac{B}{A}\left(\frac{v^{(i)}}{B}\right)_\alpha, \qquad i = 1, 2$$

где γ — некоторая часть контура Г. Замыкание множества C_2 в соответствующей норме (2.4) называется пространством $H_2(\Omega, \gamma)$.

3°. Пространство $H_3(\Omega)$. Пространством $H_3(\Omega)$ называется гильбертово пространство вектор-функций $\omega(u, v, w)$ таких, что $\omega^*(u, v) \in H_2(\Omega, \gamma)$; $w \in H_1(\Omega)$ с естественно введенным скалярным произведением. $H_3(\Omega) = H_2(\Omega, \gamma) \times H_1(\Omega)$.



Фиг. 1

4°. Пространство $H_4(\Omega, \gamma)$. Пространство $H_4(\Omega, \gamma)$ есть частный случай пространства $H_2(\Omega, \gamma)$: $b_{11} = b_{22} = 1$, $b_{12} = b_{21} = 0$.

5°. Пространство $H_5(\Omega, \gamma)$. Замыкание множества вектор-функций $\omega^*(u, v) \in C^{(1)}(\Omega)$ в норме

$$\|\omega^*\|^2_{H_5(\Omega,\gamma)} = \int\limits_{\Omega} \left[u_\alpha^2 + v_\beta^2 + \frac{1}{2}(u_\beta + v_\alpha)^2\right] d\alpha d\beta + \int\limits_{\gamma} (u^2 + v^2)\, ds \tag{2.5}$$

есть пространство $H_5(\Omega, \gamma)$.

Далее будут рассмотрены свойства введенных пространств. Области Ω_1, Ω_2 представляют собой смежные части полосы между прямыми $y = a$ и $y = b$, как это указано на фиг. 1. Область Ω_1 описывается соотношением $\chi(y) \leqslant x \leqslant \varphi(y)$, а Ω_2 — соотношением $\varphi(y) \leqslant x \leqslant \psi(y)$. Функции $\chi(y)$, $\varphi(y)$, $\psi(y)$ — кусочно-непрерывные на $[a, b]$. Пусть $c = \inf[\varphi(y) - \chi(y)]$, $c_1 = \sup[\varphi(y) - \chi(y)]$, $d = \sup[\psi(y) - \chi(y)]$, $d_1 = \sup[\varphi(y) - \varphi(y)]$ на $[a, b]$.

Лемма 2.1. Для функций $u \in W_2^{(1,0)}(\Omega_1 \cup \Omega_2)$, $v \in W_2^{(1,0)}(\Omega_2)$ справедливы неравенства

$$c\|u\|^2_{L^2(\Omega_1\cup\Omega_2)} \leqslant 2d\,[\,\|u\|^2_{L^2(\Omega_1)} + c_1 d\,\|u_x\|^2_{L^2(\Omega_1\cup\Omega_2)}] \tag{2.6}$$

$$\|v\|^2_{L^2(\Omega_2)} \leqslant 2d_1\Big[\int\limits_{x=\varphi(y)} v^2 ds + d_1\|v_x\|^2_{L^2(\Omega_2)}\Big] \tag{2.7}$$

Доказательство достаточно провести для функций $u \in C^{(1)}(\Omega_1 \cup \Omega_2)$, $v \in C^{(1)}(\Omega_2)$. Соответствующие утверждения для функций из пространства $W_2^{(1,0)}(\Omega)$ получаются предельным переходом.

Для функции $u \in C^{(1)}(\Omega_1 \cup \Omega_2)$ справедливо представление

$$u(x, y) = u(x_0, y) + \int\limits_{x_0}^{x} u_t(t, y)\,dt$$

После возведения в квадрат обеих частей этого неравенства и оценки правой части при помощи неравенства Гельдера получается неравенство

$$u^2(x, y) \leqslant 2u^2(x_0, y) + 2d\int\limits_{\chi(y)}^{\psi(y)} u_t^2\,dt$$

Последовательное интегрирование по переменной x_0 в пределах от $\chi(y)$ до $\varphi(y)$, а затем по области $\Omega_1 \cup \Omega_2$ (по переменным x, y) приводит к неравенству

$$c\int\limits_a^b\int\limits_{\chi(y)}^{\psi(y)} u^2 dx dy \leqslant \int\limits_a^b\int\limits_{\chi(y)}^{\psi(y)} [\varphi(y) - \chi(y)]\,u^2 dx\,dy \leqslant$$
$$\leqslant 2d\left\{\int\limits_a^b\int\limits_{\chi(y)}^{\varphi(y)} u^2 dx\,dy + 2cd\int\limits_a^b\int\limits_{\chi(y)}^{\psi(y)}\Big[\int\limits_{\chi(y)}^{\psi(y)} u_t^2\,dt\Big]dx\,dy\right\}$$

Отсюда и следует (2.6).

Для получения оценки (2.7) строится новая функция

$$u(x, y) = \begin{cases} v(x, y), & x \geqslant \varphi(y) \\ v(\varphi(y), y), & x \leqslant \varphi(y) \end{cases}$$

Учитывая, что в области $\Omega_1 = \{x, y : \varphi(y) - 1 < x < \varphi(y)\}$ будет $u_x = 0$, и незначительно видоизменяя приведенное выше доказательство, можно получить неравенство

$$\int\limits_a^b\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} u^2 dx\,dy \leqslant 2d_1\Big[\int\limits_a^b\int\limits_{\varphi(y)-1}^{\varphi(y)} u^2 dx\,dy + d_1\|u_x\|^2_{L^2(\Omega_2)}\Big]$$

Из определения функции u следует равенство

$$\int\limits_a^b\int\limits_{\varphi(y)-1}^{\varphi(y)} u^2 dx\,dy = \int\limits_{x=\varphi(y)} u^2 ds$$

которое и завершает доказательство леммы 2.1.

Примечание. Если $u(x, y) = 0$ на контуре $x = \varphi(y)$, то справедливо неравенство

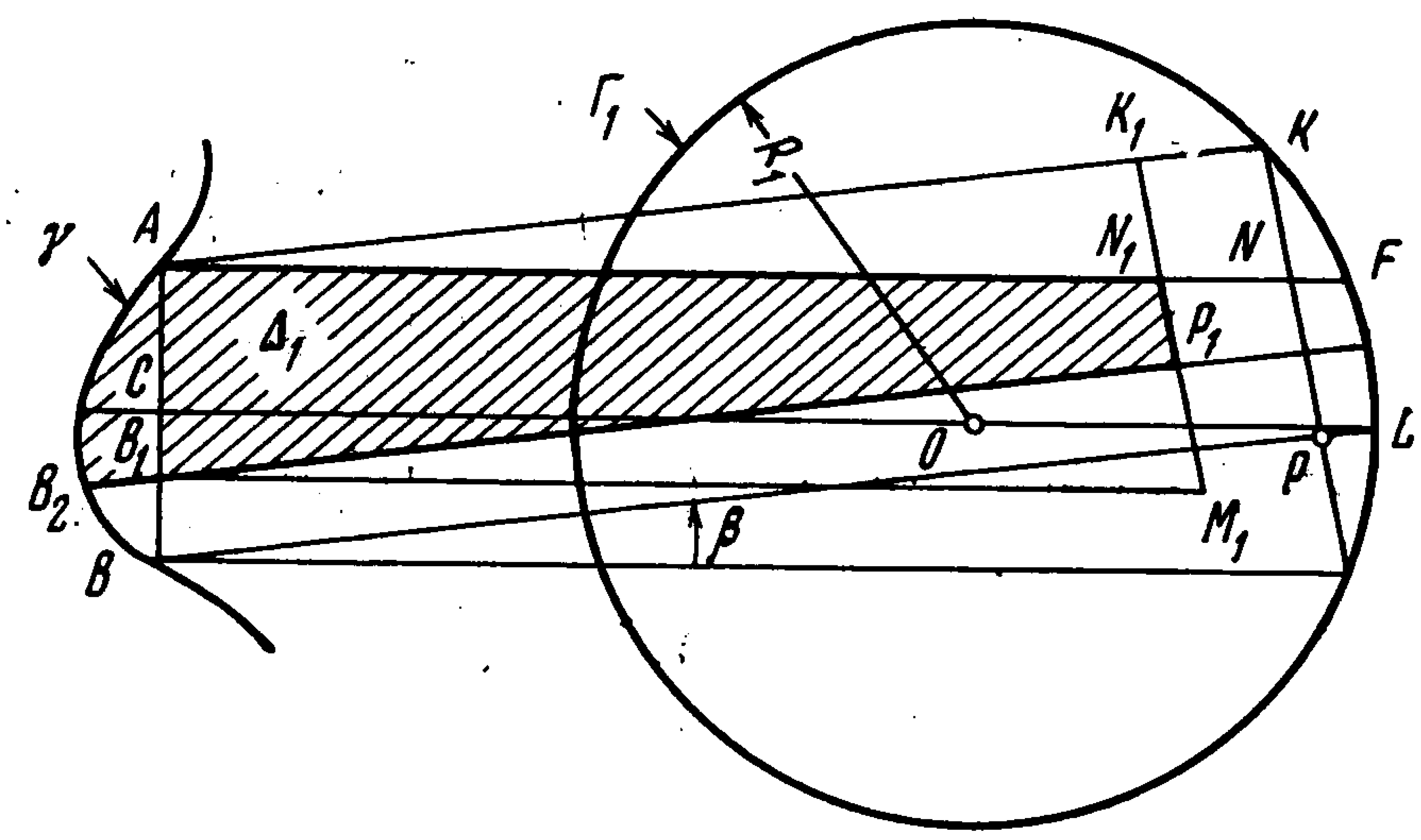
$$\|u\|_{L^2(\Omega_2)} \leqslant \sqrt{2}\,d_1\,\|u_x\|_{L^2(\Omega_2)} \tag{2.8}$$

Лемма 2.2. Пусть γ — часть границы Γ области Ω, содержащая некоторую связную дугу длины $2l > 0$ и пусть далее вектор-функция $\omega^* \in H_5(\Omega, \gamma)$. Тогда $\omega^* \in W_2^{(1)}(\Omega)$, причем имеет место соотношение

$$0 < m \leqslant \frac{\|\omega^*\|_{H_5(\Omega,\gamma)}}{\|\omega^*\|_{W_2^{(1)}(\Omega)}} \leqslant M \tag{2.9}$$

с постоянными m, M, не зависящими от выбора элемента ω^*.

Доказательство леммы 2.2 в основных пунктах совпадает с доказательством неравенства Корна [2]. Небольшое дополнение позволяет доказать лемму 2.2 (и само неравенство Корна) в случае границы $\Gamma \in$ Л$_1(m, 0)$.



Фиг. 2

Далее будет построено покрытие Ω областями Δ_k специального вида и установлены некоторые неравенства для элементов пространств $W_2^{(1)}(\Delta_k) \times W_2^{(1)}(\Delta_k)$.

Пусть $\gamma = AB$ (фиг. 2) — связная дуга контура Γ длины $2l > 0$, принадлежащая также границе области Ω_1 (см. условие 1)). Через точки A, B и середину C хорды AB проводятся параллельные прямые $OC \parallel AF \parallel BM$, где O — центр круга звездности Ω_1 (радиуса R_1).

Пусть $2l < R_1$. В противном случае можно взять часть дуги γ такой длины. Прямая $AK \parallel BL$, где L — дальняя от точки C точка пересечения прямой OC с окружностью Γ_1, ограничивающей круг звездности области Ω_1. Точки N, p — точки пересечения прямой KM с прямыми AF и BL соответственно. Подсчет показывает, что угол $\beta^* = \angle LBM$ таков, что $\sin\beta^* > 8^{-1}lR_1^2D^{-3}$, где D — диаметр области Ω_1. Четырехугольник $AKMB$ уменьшается так, что новый четырехугольник $AK_1M_1B_1$ подобен $AKMB$ и угол $\angle BAK$ неподвижен. Пусть B_2—точка пересечения P_1B_1 с границей γ, которая может лежать как вне, так и внутри четырехугольника $AK_1M_1B_1$; Δ_1 определяется как область, ограниченная частью дуги γ $AB_2 = \sigma_1$ и ломаной $AN_1P_1B_2$.

Пусть δ_1—диаметр области Δ_1.

Лемма 2.3. Для вектор-функций $\omega^* \in W_2^{(1)}(\Delta_1)$ справедливо неравенство

$$\int_{\Delta_1} (u^2+v^2)\,d\alpha d\beta \leqslant 2^8\delta_1 D^6 l^{-2} R_1^{-4}\Big\{2\int_{\sigma_1}(u^2+v^2)\,ds + \\ +\delta_1\int_{\Delta_1}[2u_\alpha^2+2v_\beta^2+(u_\beta+v_\alpha)^2]\,d\alpha d\beta\Big\} \tag{2.10}$$

где l, D, R_1, σ_1 определены выше.

Для доказательства вводятся две системы координат x_1Oy_1 и x_2Oy_2 такие, что ось Ox_1 параллельна прямой AN, ось Ox_2 параллельна BL. Видно, что в обеих системах координат область Δ_1 обладает свойствами области Ω леммы 2.1.

Пусть u_1, v_1, u_2, v_2 — проекции вектор-функции ω^* (u, v) на оси Ox_1, Oy_1, Ox_2, Oy_2 соответственно. Можно показать

$$2^{-1} \leqslant \frac{u^2+v^2}{u_1^2+u_2^2} \leqslant \frac{128D^6}{l^2R_1^4} \tag{2.11}$$

$$2u_\alpha^2+2v_\beta^2+(u_\beta+v_\alpha)^2 = 2u_{ix_i}^2+2v_{iy_i}^2+(u_{iy_i}+v_{ix_i})^2 \quad (i=1,\,2) \tag{2.12}$$

Применение леммы 2.1 и соотношений (2.11), (2.12) приводит к следующему:

$$\int_{\Delta_1}(u^2+v^2)\,d\alpha\,d\beta \leqslant 2^8\delta_1 D^6 l^{-2}R_1^{-4}\Big\{\int_{\sigma_1}(u_1^2+u_2^2)\,ds+\delta_1\Big[\int_{\Delta_1}u_{1x_1}^2dx_1dy_1 + \\ +\int_{\Delta_1}u_{2x_2}^2dx_2dy_2\Big]\Big\} \leqslant 2^8\delta_1 D^6 l^{-2}R_1^{-4}\Big\{2\int_{\sigma_1}(u^2+v^2)ds+\delta_1\int_{\Delta_1}\Big[2u_\alpha^2+2v_\beta^2+(u_\beta+v_\alpha)^2\Big]d\alpha d\beta\Big\}$$

что и доказывает лемму 2.3.

Лемма 2.4. Область Ω можно покрыть конечной системой областей Δ_i $(i=1, 2, \ldots, N(\delta))$, диаметр каждой из которых меньше произвольно заданного числа $\delta > 0$, со следующими свойствами:

1) Δ_1 — область построенная выше;

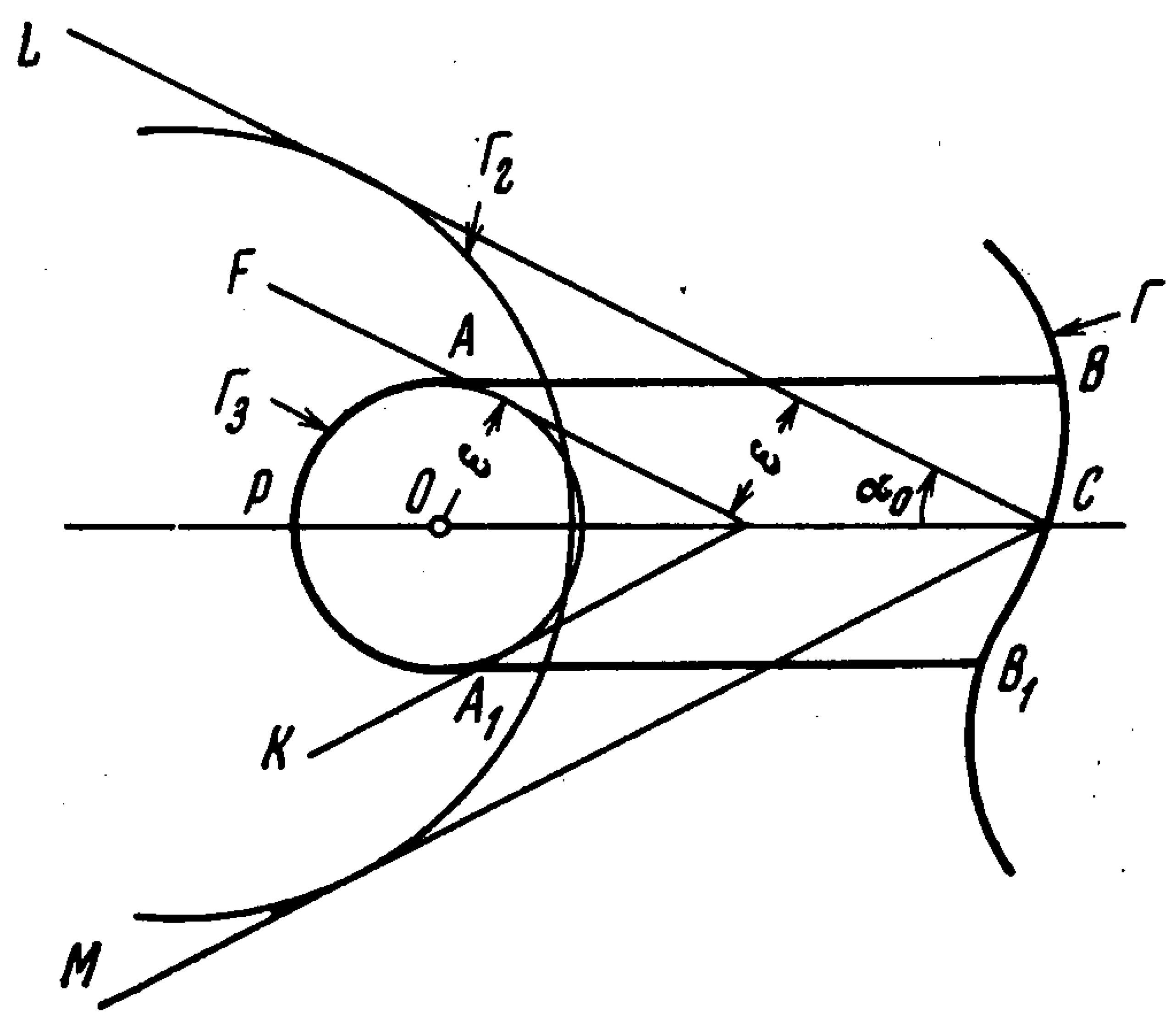
2) каждая из областей Δ_i $(i=1, 2, \ldots, N(\delta))$ — звездная относительно каждой точки некоторого своего внутреннего круга K_i радиуса ρ_i, причем

$$K_i \subset \bigcup_{j=1}^{i-1}\Delta_j$$

3) при всех $\delta > 0$ имеют место неравенства

$$\frac{\operatorname{diam}\Delta_i}{\rho_i} \leqslant \frac{10D}{R_0}, \qquad i=2, 3, \ldots, N(\delta) \tag{2.13}$$

Действительно, круг, лежащий в Ω, диаметра меньше δ с центром в середине отрезка N_1P_1 (фиг. 2) можно считать областью Δ_2. Такой же круг, но с центром на границе области $\Delta_1 \cup \Delta_2$ есть Δ_3 и т. д. Конечным числом таких кругов можно покрыть любую строго внутреннюю подобласть Ω. Видно, что эта часть покрытия удовлетворяет условиям леммы. Остается построить покрытие пограничной полоски Ω_ε ширины ε области Ω. Очевидно, его достаточно построить для какой-нибудь из областей Ω_k, например Ω_1. В области Ω_1 строится окружность Γ_2 радиуса $2^{-1}R_1$, концентрическая с окружностью Γ_1, ограничивающей круг звездности области Ω_1 (фиг. 3). Из произвольной точки C границы Ω_1 проводятся две касательные CL и CM к окружности Γ_2, угол между которыми $2\alpha_0$. Очевидно, что $\sin\alpha_0 \geqslant 2^{-1}R_1D^{-1}$. Внутри угла LCM строится угол FNK, стороны которого FN и KN находятся на расстоянии ε от сторон LC и MC соответственно. В угол FNK вписывается окружность Γ_3 радиуса ε с центром O. Область, ограниченная полуокружностью APA_1, касательными к окружности $AB \parallel A_1B_1 \parallel OC$ и частью границы $\Omega_1 - BCB_1$, называется Δ_C. Видно, что при достаточно малом ε часть полосы Ω_ε заключенная между прямыми AB и A_1B_1 и соответствующая окрестности дуги BCB_1, не пересекается с кругом Γ_3, т. е. свойство 2) выполнено. Прямой подсчет показывает, что $\operatorname{diam} \Delta_C \varepsilon^{-1} < 10\, DR_1^{-1}$, т. е. свойство 3) также выполнено. В каждой точке границы Ω проводится описанное выше построение, а затем с помощью леммы Больцано выбирается конечное покрытие, что и заканчивает доказательство.

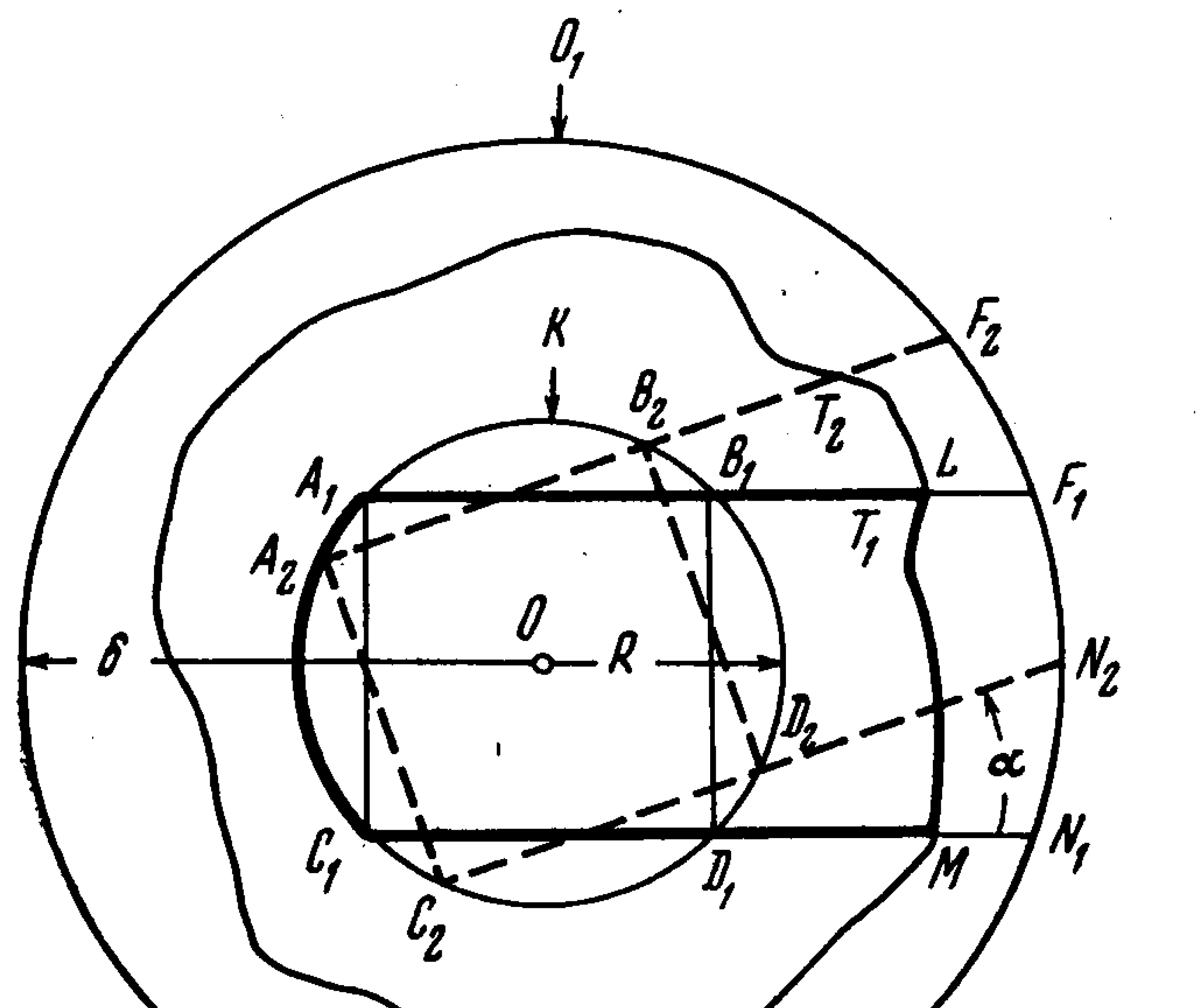


Фиг. 3

Лемма 2.5. Пусть Δ — звездная относительно круга K радиуса R область с границей класса $Л_1(m, 0)$, диаметр которой равен δ. Тогда для вектор-функции $\omega^*(u, v) \in W_2^{(1)}(\Delta)$ справедливо неравенство

$$\int_\Delta (u^2 + v^2)\, d\alpha d\beta \leqslant 11 \cdot 2^{-1} \delta^4 R^{-4} \Big\{ \int_K (u^2 + v^2)\, d\alpha d\beta + $$
$$+ 3\delta^2 \int_\Delta [2u_\alpha{}^2 + 2v_\beta{}^2 + (u_\beta + v_\alpha)^2]\, d\alpha d\beta \Big\} \qquad (2.14)$$

Для доказательства проводится окружность O_1 радиуса δ, концентрическая с окружностью K (фиг. 4). Стороны A_1B_1 и C_1D_1 некоторого квадрата $A_1B_1C_1D_1$, вписанного в окружность K, продолжаются до пересечения с окружностью O_1 в точках F_1, N_1. Область, ограниченная прямыми A_1L, C_1M, дугой $A_1A_2C_1$ и частью границы LM, обозначается T_1. Фигура $A_1F_1N_1C_1$ поворачивается относительно точки O на некоторый угол α^* так, что точка N_1 перемещается в середину дуги F_1N_1. Соответствующая часть области Δ обозначается через T_2. Далее фигура $A_1F_1N_1C_1$ поворачивается относительно точки O на углы $2\alpha^*, 3\alpha^*, \ldots, n\alpha^*$, и соответствующие им части Δ обозначаются через $T_3, T_4, \ldots, T_{n+1}$, где n выбирается наименьшим из условия $(n+1)\alpha^* \geqslant 2\pi$. Можно подсчитать, что $\sin \alpha^* = \sqrt{2} R\delta^{-1}$ и, следовательно, $\alpha^* > \sqrt{2}\, R\delta^{-1}$, откуда $n \leqslant \sqrt{2}\pi\delta R^{-1}$. В каждой из областей T_i вводится местная система координат x_iOy_i.



Фиг. 4

Пусть u_i — проекция вектора $\omega^*(u, v)$ на ось Ox_i, идущую вдоль ON_{i+1}. В силу леммы 2.1 имеет место неравенство

$$\int_{T_i} u_i^2 dx_i dy_i \leqslant \sqrt{2}\,(1 + \delta R^{-1}) \Big\{ \int_{T_i \cap K} u_i^2 dx_i dy_i + 2R\,(R + \delta) \int_{T_i} u_{ix_i}^2 dx_i dy_i \Big\} \qquad (2.15)$$

$$\sum_{i=1}^{n+1}\int_{T_i} u_i^2 dx_i dy_i \leqslant \sqrt{2}\,(1+\delta R^{-1})(n+1)\left\{\int_K (u^2+v^2)\,d\alpha d\beta + \right.$$

$$\left. + R(R+\delta)\int_\Delta [2u_\alpha^2 + 2v_\beta^2 + (u_\beta + v_\alpha)^2]\,d\alpha\,d\beta\right\} \tag{2.16}$$

Очевидно, что

$$\bigcup_{i=1}^{n}(T_i \cap T_{i+1}) = \Delta$$

В каждой из областей $T_i \cap T_{i+1}$ имеет место неравенство

$$u^2 + v^2 \leqslant 2(\sin\alpha^*)^{-2}(u_i^2 + u_{i+1}^2) \tag{2.17}$$

Отсюда

$$\int_\Delta (u^2+v^2)\,d\alpha\,d\beta \leqslant \sum_{i=1}^{n}\int_{T_i\cap T_{i+1}}(u^2+v^2)\,d\alpha\,d\beta \leqslant 2(\sin\alpha^*)^{-2}\sum_{i=1}^{n}\left[\int_{T_i\cap T_{i+1}} u_i^2 dx_i dy_i + \right.$$

$$\left. + \int_{T_i\cap T_{i+1}} u_{i+1}^2\, dx_i dy_i\right] \leqslant 4(\sin\alpha^*)^{-2}\sum_{i=1}^{n+1}\int_{T_i} u_i^2 dx_i dy_i \tag{2.18}$$

Из неравенств (2.16), (2.18) следует неравенство

$$\int_\Delta (u^2+v^2)\,d\alpha d\beta \leqslant 4(n+1)(1+\delta R^{-1})(\sin\alpha^*)^{-2}\left\{\int_K (u^2+v^2)\,d\alpha\,d\beta + \right.$$

$$\left. + R(R+\delta)\int_\Delta [2u_\alpha^2 + 2v_\beta^2 + (u_\beta + v_\alpha)^2]\,d\alpha\,d\beta\right\}$$

из которого и вытекает оценка (2.14).

Лемма 2.6. Пусть γ — часть границы области Ω — содержит связную дугу длины $2l > 0$. Пусть, далее, вектор-функция $\omega^* \in H_4(\Omega, \gamma)$. В этом случае $\omega^* \in H_5(\Omega, \gamma)$, причем имеет место соотношение

$$0 < m \leqslant \frac{\|\omega^*\|_{H_4(\Omega,\gamma)}}{\|\omega^*\|_{H_5(\Omega,\gamma)}} \leqslant M \tag{2.19}$$

с константами m, M, не зависящими от выбора ω^*.

Правая часть неравенства (2.19) доказывается при помощи леммы 2.2. Доказательство левого неравенства проводится от противного. Пусть неравенство $m\,\|\omega^*\|_{H_5(\Omega,\gamma)} \leqslant \|\omega^*\|_{H_4(\Omega,\gamma)}$ не выполняется. В этом случае найдется последовательность $\omega_n^* \in C^{(1)}(\Omega)$ такая, что

$$\|\omega_n^*\|_{H_5(\Omega,\gamma)} = 1, \quad \|\omega_n^*\|_{H_4(\Omega,\gamma)} \to 0 \quad \text{при } n\to\infty \tag{2.20}$$

Можно считать, что ω_n^* слабо сходится к ω_0^* в $H_5(\Omega, \gamma)$. Из соотношения (2.20) следует, что последовательности

$$\varepsilon_{10n} = A^{-1}u_{n\alpha} + A_\beta v_n (AB)^{-1}, \qquad \varepsilon_{20n} = B^{-1}v_{n\beta} + B_\alpha u\,(AB)^{-1}$$

$$\varepsilon_{30n} = \frac{A}{B}\left(\frac{u_n}{A}\right)_\beta + \frac{B}{A}\left(\frac{v_n}{B}\right)_\alpha \tag{2.21}$$

сходятся сильно к нулю в пространстве $L^2(\Omega)$ и

$$\lim_{n\to\infty}\int_\gamma (u_n^2 + v_n^2)\,ds = 0$$

Вводится новая функция $\theta(\varphi, \psi) = (B^{-1}u, \quad A^{-1}v)$. Из того, что $\|\theta_n\|_{H_s(\Omega, \gamma)} \to 0$ при $n \to \infty$, следует $\|\omega_n^*\|_{H_s(\Omega, \gamma)} \to 0$ при $n \to \infty$ и обратно. Для функций θ_n справедливо почти всюду в Ω неравенство

$$2\varphi_{n\alpha}^2 + 2\psi_{n\beta}^2 + (\varphi_{n\beta} + \psi_{n\alpha})^2 \leqslant 2c_1(\varepsilon_{10n}^2 + \varepsilon_{20n}^2 + \varepsilon_{30n}^2) + 2c_2({\varphi_n}^2 + {\psi_n}^2) \tag{2.22}$$

где постоянные c_1, c_2 зависят лишь от оценки коэффициентов первой квадратичной формы A, B и в силу условия 3) конечны.

Построив покрытие области Ω (лемма 2.4) и применяя лемму 2.3, можно получить неравенство

$$\int\limits_{\Delta_1} [2\varphi_{n\alpha}^2 + 2\psi_{n\beta}^2 + (\varphi_{n\beta} + \psi_{n\alpha})^2]\, d\alpha\, d\beta \leqslant 2c_1 \int\limits_{\Omega} (\varepsilon_{10n}^2 + \varepsilon_{20n}^2 + \varepsilon_{30n}^2)\, d\alpha\, d\beta +$$

$$+ 64c_2\delta_1 D^6 l^{-2} R_1^{-4} \left\{ 4\int\limits_{\gamma} ({\varphi_n}^2 + {\psi_n}^2)\, ds + \delta_1 \int\limits_{\Delta_1} [2\varphi_{n\alpha}^2 + 2\psi_{n\beta}^2 + (\varphi_{n\beta} + \psi_{n\alpha})^2]\, d\alpha d\beta \right\} \tag{2.23}$$

Из неравенства (2.23) следует, что

$$\int\limits_{\Delta_1} [2\varphi_{n\alpha}^2 + 2\psi_{n\beta}^2 + (\varphi_{n\beta} + \psi_{n\alpha})^2]\, d\alpha d\beta \leqslant 4c_1 \int\limits_{\Delta_1} (\varepsilon_{10n}^2 + \varepsilon_{20n}^2 + \varepsilon_{30n}^2)\, d\alpha d\beta +$$

$$+ 2^{11} c_2 \delta_1 D^6 l^{-2} R_1^{-4} \int\limits_{\gamma} ({\varphi_n}^2 + {\psi_n}^2)\, ds \tag{2.24}$$

при $\delta_1^2 = 2^{-8} l^2 R_1^4 D^{-6} c_2^{-1}$.

Отсюда и из леммы 2.2 следует, что $\theta_n \to 0$ в $W_2^1(\Delta_1)$ и, следовательно, $\|\theta_n\|_{L^2(\Delta_1)} \to 0$ при $n \to \infty$. В областях Δ_i справедливы неравенства

$$\int\limits_{\Delta_i} [2\varphi_{n\alpha}^2 + 2\psi_{n\beta}^2 + (\varphi_{n\beta} + \psi_{n\alpha})^2]\, d\alpha d\beta \leqslant 4 \int\limits_{\Delta_i} (\varepsilon_{10n}^2 + \varepsilon_{20n}^2 + \varepsilon_{30n}^2)\, d\alpha d\beta +$$

$$+ 88c_2 (10D)^4 R_0^{-4} \int\limits_{K_i} ({\varphi_n}^2 + {\psi_n}^2)\, d\alpha d\beta \tag{2.25}$$

при $\delta^2 \leqslant 66^{-1}(10D)^{-4} R_0^4 c_2^{-1}$.

Последовательно рассматривая неравенства (2.25) в областях $\Delta_2, \Delta_3, \ldots, \Delta_{N(\delta)}$ и учитывая свойства покрытия, можно заключить, что $\|\theta_n\|_{H_s(\Omega, \gamma)} \to 0$ при $n \to \infty$, что и доказывает лемму.

Лемма 2.7. Пусть $\omega^*(u, v) \in H_2(\Omega, \gamma)$, где γ определена, как и в лемме 2.6. В этом случае $\omega^* \in W_2^{(1)}(\Omega)$ и

$$0 < m \leqslant \frac{\|\omega^*\|_{H_2(\Omega, \gamma)}}{\|\omega^*\|_{W_2^{(1)}(\Omega)}} \leqslant M \tag{2.26}$$

с постоянными m, M, не зависящими от выбора ω^*.

Лемма 2.8. Пусть функция $w \in H_1(\Omega)$, тогда $w \in W_2^{(2)}(\Omega)$ и

$$0 < m \leqslant \frac{\|\omega\|_{H_1(\Omega)}}{\|w\|_{W_2^{(2)}(\Omega)}} \leqslant M \tag{2.27}$$

с постоянными m, M, не зависящими от выбора элемента w.

Для доказательства вводятся новые функции $u = A^{-1}w_\alpha$, $v = B^{-1}w_\beta$. Такой подстановкой лемма 2.8 сводится к лемме 2.6.

Леммы 2.6—2.8 означают, что в пространствах $H_1(\Omega)$, $H_2(\Omega, \gamma)$ справедливы соответствующие теоремы вложения Соболева [3], которые и будут использоваться.

3. Обобщенное решение и разрешимость задачи. Пусть выполняются следующие условия:

$$Z \in H_{-1}(\Omega), \quad X \in L^p(\Omega), \quad Y \in L^p(\Omega), \quad M_1^* \in L^p(\Gamma) \tag{3.1}$$
$$M_2^* \in L^p(\Gamma), \quad N_1 \in L^p(\Gamma), \quad N_2 \in L^p(\Gamma), \quad N_3 \in L(\Gamma) \quad (p > 1)$$

где $H_{-1}(\Omega)$ — негативное пространство с нормой

$$\|Z\|_{H_{-1}(\Omega)} = \sup\left\{\left|\int\limits_\Omega Zw d\alpha d\beta\right| \|w\|^{-1}_{H_1(\Omega)}\right\}$$

В частности, $L^p(\Omega) \subset H_{-1}(\Omega)$, $p \geqslant 1$.
В точках Γ, где усилия N_i и моменты M_i^* не заданы, эти величины доопределяются нулем.

Известно, что условие равновесия оболочки можно выразить при помощи принципа возможных перемещений Лагранжа, который в данном случае имеет вид

$$\begin{aligned}
(\omega \cdot \mathbf{a})_{H_3(\Omega)} = &-\int\limits_\Omega \Big\{T_1(R_1^{-1}\chi + w_\alpha\chi_\alpha A^{-2}) + T_2(R_2^{-1}\chi + w_\beta\chi_\beta B^{-2}) - \\
&- S[2R_{12}^{-1}\chi - (AB)^{-1}(w_\alpha\chi_\beta + w_\beta\chi_\alpha)] + \left[E_{11}\left(R_1^{-1}w + \frac{1}{2}A^{-2}w_\alpha^2\right) + \right.\\
&\left.+ E_{12}\left(R_2^{-1}w + \frac{1}{2}B^{-2}w_\beta^2\right)\right][A^{-1}\varphi_\alpha + A_\beta\psi(AB)^{-1}] + \left[E_{21}\left(R_1^{-1}w + \right.\right.\\
&\left.\left.+ \frac{1}{2}A^{-2}w_\alpha^2\right) + E_{22}\left(R_2^{-1}w + \frac{1}{2}B^{-2}w_\beta^2\right)\right][B^{-1}\psi_\beta + B_\alpha\varphi(AB)^{-1}] + \\
&+ G_1\left(\frac{w_\alpha w_\beta}{AB} - \frac{2w}{R_{12}}\right)\left[\frac{A}{B}\left(\frac{\varphi}{A}\right)_\beta + \frac{B}{A}\left(\frac{\psi}{B}\right)_\alpha\right]\Big\} ABd\alpha d\beta + \\
&+ \int\limits_\Omega [(Z - Xw_\alpha A^{-1} - Yw_\beta B^{-1})\chi + X\varphi + Y\psi]\, ABd\alpha d\beta + \\
&+ \int\limits_\Gamma \left[N_1\varphi + N_2\psi + N_3\chi + A^{-1}M_1^*\chi_\alpha + B^{-1}M_2^*\chi_\beta - \left(a_{11}w + a_{12}\frac{\partial w}{\partial n}\right)\chi - \right.\\
&\left.- \left(a_{21}w + a_{22}\frac{\partial w}{\partial n}\right)\frac{\partial\chi}{\partial n}\right] ds
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Здесь вектор-функция $\mathbf{a}(\varphi, \psi, \chi)$ — возможное перемещение.

Определение 3.1. Обобщенным решением задачи о равновесии оболочки называется вектор-функция $\omega(u, v, w) \in H_3(\Omega)$, обращающая интегральное равенство (3.2) в тождество для любой вектор-функции $\mathbf{a}(\varphi, \psi, \chi) \in H_3(\Omega)$.

Оценивая каждый член в (3.2) при помощи неравенства Гельдера, можно убедиться, что при условиях, наложенных на параметры оболочки, внешние силы и вектор-функции ω, $\mathbf{a}$, равенство (3.2) имеет смысл. Рассматривая правую часть (3.2) отдельно при фиксированном $\omega(u, v, w) \in H_3(\Omega)$ как функционал относительно вектор-функции $\mathbf{a}(\varphi, \psi, \chi) \in H_3(\Omega)$, непосредственно проверяется, что он линеен и непрерывен в пространстве $H_3(\Omega)$ и, следовательно, по теореме Рисса представим в виде скалярного произведения в $H_3(\Omega)$. Это представление определяет некоторый нелинейный оператор $K\omega$ в пространстве $H_3(\Omega)$, а само уравнение (3.2) принимает вид

$$(\omega\cdot a)_{H_3(\Omega)} = (K\omega\cdot a)_{H_3(\Omega)} \tag{3.3}$$

Таким образом, нахождение обобщенного решения задачи эквивалентно решению операторного уравнения в пространстве $H_3(\Omega)$

$$\omega = K\omega \tag{3.4}$$

Лемма 3.1. Оператор K усиленно непрерывен в пространстве $H_3(\Omega)$. Утверждение леммы проверяется непосредственно при помощи неравенства Гельдера и теорем Соболева — Кондрашева о полной непрерывности оператора вложения в пространствах $W_p^{(l)}(\Omega)$ [3].

Для доказательства разрешимости уравнения (3.4) используется принцип Шаудера — Лерея о неподвижной точке оператора.

Пусть $S(1, 0)$ — сфера единичного радиуса в пространстве $H_3(\Omega)$ с центром в нуле: $\|\omega\|_{H_3(\Omega)} = 1$. Проекция сферы $S(1, 0)$ при помощи отображения

$$w = Rw_1, \qquad \omega^* = h^*R^2\omega_1^* \tag{3.5}$$

где $R > 0$, $h^* > 0$ — некоторые постоянные, определяет «эллипсоид» $C(h^*, R, 0)$ в пространстве $H_3(\Omega)$. При фиксированных постоянных $h^* > 1$, $R > 1$ эллипсоид является границей некоторой связной выпуклой области, содержащей внутри себя единичный шар с центром в нуле пространства $H_3(\Omega)$.

По принципу Шаудера — Лерея для разрешимости уравнения (3.4) достаточно доказать, что вполне непрерывное векторное поле гомотопно на некотором эллипсоиде $C(h^*, R, 0)$ вполне непрерывному векторному полю $I\omega$, где I — тождественный оператор, для которого вращение [4] равно плюс единице. Для гомотопности же достаточно показать, что

$$(I - tK)\,\omega \neq 0 \quad \text{при } \omega \in C(h^*, R, 0), \ t \in [0, 1] \tag{3.6}$$

и некоторых $h^* > 0$, $R > 0$.

Для доказательства соотношения (3.6) рассматриваются некоторые свойства функционала

$$\Phi(\omega, t) = ((\omega - tK\omega)\cdot a)_{H_3(\Omega)} \tag{3.7}$$

где вектор-функция $a = (2u, 2v, w)$.

Лемма 3.2. Пусть последовательность $\omega_k \in H_3(\Omega)$, слабо сходящая к $\omega_0 \in H_3(\Omega)$, такова, что последовательность

$$\Phi_{41}(\omega_k) \to 0 \quad \text{при } k \to \infty \tag{3.8}$$

Здесь

$$\Phi_{41}(\omega) = \int_\Omega [(E_{11}\varepsilon_4 + E_{12}\varepsilon_5)\,\varepsilon_4 + (E_{21}\varepsilon_4 + E_{22}\varepsilon_5)\,\varepsilon_5 + G_1\varepsilon_6^2]\,ABd\alpha d\beta +$$
$$+ h^{*2}\int_\Gamma [(b_{11}u + b_{12}v)\,u + (b_{21}u + b_{22}v)\,v]\,ds, \quad 2\varepsilon_4 = 2h^*\,[A^{-1}u_\alpha +$$
$$+ A_\beta v\,(AB)^{-1}] + A^{-2}w_\alpha^2, \quad 2\varepsilon_5 = 2h^*\,[B^{-1}v_\beta + B_\alpha u\,(AB)^{-1}] + B^{-2}w_\beta^2$$
$$\varepsilon_6 = h^*\left[\frac{A}{B}\left(\frac{u}{A}\right)_\beta + \frac{B}{A}\left(\frac{v}{B}\right)_\alpha\right] + \frac{w_\alpha w_\beta}{AB}, \qquad h^* > 0 \tag{3.9}$$

В этом случае $\omega_0 = 0$.

Из выражений (3.8) и (3.9) следует, что

$$\int_\Omega AB\,[\varepsilon_4(\omega_k) + \varepsilon_5(\omega_k)]\,d\alpha d\beta \to 0, \qquad k\to\infty \tag{3.10}$$

$$2h^* \int_\Omega [(Bu_k)_\alpha + (Av_k)_\beta]\,d\alpha d\beta + \int_\Omega (BA^{-1}w_{k\alpha}^2 + AB^{-1}w_{k\beta}^2)\,d\alpha d\beta \to 0, \quad k\to\infty \tag{3.11}$$

В силу теоремы о полной непрерывности вложения $H_1(\Omega)$ в $W_2^{(1)}(\Omega)$ и того, что первый интеграл есть непрерывный линейный функционал в $H_2(\Omega)$, в соотношении (3.11) можно перейти к пределу

$$2h^* \int_\Omega [(Bu_0)_\alpha + (Av_0)_\beta]\,d\alpha d\beta + \int_\Omega (BA^{-1}w_{0\alpha}^2 + AB^{-1}w_{0\beta}^2)\,d\alpha d\beta = 0 \tag{3.12}$$

а так как

$$\int_\Gamma [(b_{11}u_0 + b_{12}v_0)\,u_0 + (b_{21}u_0 + b_{22}v_0)\,v_0]\,ds = 0 \tag{3.13}$$

то

$$\int_\Omega [(Bu_0)_\alpha + (Av_0)_\beta]\,d\alpha d\beta = 0 \tag{3.14}$$

Из (3.12) и (3.14) вытекает $w_0 \equiv 0$, поэтому из (3.8) и теоремы Соболева о полной непрерывности вложения $H_1(\Omega)$ в $W_4^{(1)}(\Omega)$ следует, что $\omega_k^* \Rightarrow 0$ при $k\to\infty$ в пространстве $H_2(\Omega)$, что и доказывает лемму полностью.

Лемма 3.3. При некотором фиксированном h^* и при достаточно больших R на эллипсоиде $C(h^*, R, 0)$ имеет место неравенство

$$\Phi(\omega, t) \geqslant \sigma R^2, \qquad \omega \in C(h^*, R, 0) \tag{3.15}$$

где $\sigma > 0$—некоторая константа.

Доказательство разбивается на три части.

1°. На единичной сфере $S(1,0)$ рассматривается множество $T(1,0)$

$$T(1,0) = \{\omega : \|\omega\|_{H_3(\Omega)} = 1, \quad \|\omega^*\|_{H_2(\Omega)} \geqslant 1/2\}$$

На эллипсоиде $C(h^*, R, 0)$ функционал $\Phi(\omega, t)$ имеет следующую структуру:

$$\Phi(\omega, t) = \sum_{k=1}^{4} R^k \Phi_k(\omega_1, t)$$

где ω_1 — прообраз ω на единичной сфере. $\Phi_k(\omega, t)$ — некоторые «однородные» функционалы степени $k = 1,2,3,4$. Видно, что все функционалы $\Phi_k(\omega_1, t)$ ограничены на единичной сфере $\|\omega_1\|_{H_3(\Omega)} = 1$ при всех $t \in [0,1]$

$$|\Phi_k(\omega_1, t)| \leqslant \sigma_k < \infty, \qquad k = 1, 2, 3, 4$$

где $\sigma_k > 0$ — некоторые константы, зависящие лишь от параметров оболочки и внешней нагрузки.

На множестве $T(1,0)$ рассматривается функционал $\Phi_4(\omega, t)$

$$\Phi_4(\omega, t) = 2h^{*2}\|\omega^*\|_{H_2(\Omega)}^2 + th^* \int_\Omega \Big\{ (E_{11}w_\alpha^2A^{-2} + E_{12}w_\beta^2B^{-2})\,[A^{-1}u_\alpha + A_\beta v\,(AB)^{-1}] +$$
$$+ (E_{21}w_\alpha^2A^{-2} + E_{22}w_\beta^2B^{-2})\,[B^{-1}v_\beta + B_\alpha u\,(AB)^{-1}] + G_1\frac{w_\alpha w_\beta}{AB}\left[\frac{A}{B}\left(\frac{u}{A}\right)_\beta + \right.$$
$$\left.+ \frac{B}{A}\left(\frac{v}{B}\right)_\alpha\right]\Big\}\,ABd\alpha d\beta + \frac{1}{2}\,t\int_\Omega \Big[(E_{11}w_\alpha^2A^{-2} + E_{12}w_\beta^2B^{-2})\,w_\alpha^2A^{-2} +$$
$$+ (E_{21}w_\alpha^2A^{-2} + E_{22}w_\beta^2B^{-2})\,w_\beta^2B^{-2} + 4G_1\frac{w_\alpha^2w_\beta^2}{A^2B^2}\Big]\,ABd\alpha d\beta \tag{3.16}$$

Видно, что

$$\Phi_4(\omega, t) \geqslant h^{*2} - th^* c_3, \qquad \omega \in T(1, 0) \tag{3.17}$$

где c_3 — константа, ограничивающая первый интеграл в (3.16) на единичной сфере. Второй интеграл всегда неотрицателен. Пусть постоянная $h^* > 0$ фиксируется равенством

$$h^{*2} - h^* c_3 = 1 \tag{3.18}$$

Тогда на множестве $C_1(h^*, R, 0)$, являющемся образом $T(1,0)$, справедливо неравенство

$$\Phi(\omega, t) \geqslant R^4 - \sum_{k=1}^{3} \sigma_k R^k - \sigma_2 R^3 \tag{3.19}$$

2°. Функционал $\Phi(\omega, t)$ можно привести к виду

$$\begin{gathered}\Phi(\omega, t) = \| w \|^2_{H_1(\Omega)} + 2(1-t) \| \omega^* \|^2_{H_2(\Omega)} + 2t \int_\Omega (T_1 \varepsilon_1 + T_2 \varepsilon_2 + S \varepsilon_3) AB d\alpha d\beta - \\ - t \int_\Omega (T_1 R_1^{-1} + T_2 R_2^{-1} - 2 S R_{12}^{-1}) w AB d\alpha d\beta - t \int_\Omega [2Xu + 2Yv + (Z - X w_\alpha A^{-1} - \\ - Y w_\beta B^{-1}) w] AB d\alpha d\beta - t \int_\Gamma [2N_1 u + 2N_2 v + N_3 w + M_1^* w_\alpha A^{-1} + M_2^* w_\beta B^{-1} - \\ - \left(a_{11} w + a_{12} \frac{\partial w}{\partial n}\right) w - \left(a_{21} w + a_{22} \frac{\partial w}{\partial n}\right) \frac{\partial w}{\partial n} - 2(b_{11} u + b_{12} v) u - 2(b_{21} u + b_{22} v) v] ds\end{gathered} \tag{3.20}$$

В силу оценок (2.2) почти всюду в Ω

$$| (T_1 R_1^{-1} + T_2 R_2^{-1} - 2 S R_{12}^{-1}) w | \leqslant {}^1\!/_2 (T_1 \varepsilon_1 + T_2 \varepsilon_2 + S \varepsilon_3) + c_4 w^2 (R_1^{-2} + R_2^{-2} + R_{12}^{-2}) \tag{3.21}$$

где c_4 — константа, зависящая от констант m_1, m_2, m_3. На части единичной сферы $S_1(1,0) = S(1,0) \setminus T(1,0)$ рассматривается множество

$$\begin{gathered}\| w \|^2_{H_1(\Omega)} - 2h^* \left| \int_\Omega (Xu + Yv) AB d\alpha d\beta \right| - \left| \int_\Omega (X w_\alpha A^{-1} + Y w_\beta B^{-1}) w AB d\alpha d\beta \right| - \\ - 2h^* \left| \int_\Gamma (N_1 u + N_2 v) ds \right| - \left| \int_\Gamma \left[\left(a_{11} w + a_{12} \frac{\partial w}{\partial n}\right) w + \left(a_{21} w + a_{22} \frac{\partial w}{\partial n}\right) \frac{\partial w}{\partial n} \right] ds \right| - \\ - c_4 \int_\Omega (R_1^{-2} + R_2^{-2} + R_{12}^{-2}) AB d\alpha d\beta \, (\max_\Omega w^2) \geqslant 4^{-1}\end{gathered} \tag{3.22}$$

На проекции $S_1(1,0)$ на $C(h^*, R, 0)$ выполняется неравенство

$$\Phi(\omega, t) \geqslant 4^{-1} R^2 - c_5 R \tag{3.23}$$

3°. Функционал $\Phi(\omega, t)$ рассматривается на образе множества $S_2(1,0) = S(1,0) \setminus \setminus \{T(1,0) \cup S_1(1,0)\}$. На множестве $S_2(1,0)$ не может существовать последовательности $\{\omega_k, t_k\}$ такой, что $0 \leqslant t_k \leqslant 1$ и ω_k слабо сходится к нулю. Действительно, на $S_2(1,0)$ выполняются два неравенства: неравенство, обратное неравенству (3.22), и

$$\| w \|^2_{H_1(\Omega)} \geqslant {}^3\!/_4 \tag{3.24}$$

Из первого неравенства и теорем Соболева — Кондрашева о полной непрерывности оператора вложения следует, что

$$\| w_n \|^2_{H_1(\Omega)} \leqslant 4^{-1} + r_n$$

где $r_n \to \infty$ при $n \to \infty$, что противоречит (3.27).

На множестве S_2 (1,0) форма $\Phi_{41}(\omega) \geqslant \lambda > 0$, где λ — некоторая константа. В противном случае существует слабо сходящаяся к ω_0 последовательность $\{\omega_k\} \in S_2$ (1,0) такая, что

$$\Phi_{41}(\omega_k) \to 0 \quad \text{при } k \to \infty$$

Из леммы 3.2 следует, что $\omega_0 = 0$, но это противоречит первому утверждению п. 3. Таким образом, на образе множества S_2 (1,0) в C (h^*, R, 0) справедлива оценка

$$\Phi(\omega, t) \geqslant {}^3/_4 R^2 + t(\lambda R^4 - \sigma_3 R^3 - \sigma_5 R^2 - \sigma_1 R) \tag{3.25}$$

Из неравенств (3.19), (3.23), (3.25) и следует утверждение леммы 3.3.

Из лемм 3.1, 3.3 непосредственно вытекает лемма 3.4.

Лемма 3.4. На эллипсоиде C (h^*, R, 0) при всех достаточно больших R и h^*, фиксированном равенством (3.18), вращение вполне непрерывного векторного поля $I - K$ равно плюс единице.

Теорема. Пусть выполнены условия 1) — 6) п. 2 и (3.1). В этом случае существует обобщенное решение задачи о равновесии оболочки в смысле определения 3.1, причем все возможные решения задачи находятся внутри некоторой сферы пространства H_3 (Ω) конечного радиуса.

Теорема следует из леммы 3.4 и принципа Шаудера — Лерея о неподвижной точке оператора.

Замечание 1. Незначительно видоизменяя доказательство, можно получить теорему существования решения задачи о равновесии оболочки со следующими граничными условиями: условия (1.3), (1.4) сохраняются, а условия (1.2) заменяются соответственно на следующие:

$$w|_{\gamma_1} = 0, \qquad M_n|_{\gamma_2} = M_1^* \cos(\alpha, n) + M_2^* \cos(\beta, n) - k(s)\frac{\partial w}{\partial n}$$
$$u|_{\gamma_3} = f_1(s), \quad v|_{\gamma_4} = f_2(s), \quad f_1 \in H_{1/2}(\gamma_3), \quad f_2 \in H_{1/2}(\gamma_4)$$

где $k(s) \geqslant k_0 > 0$ — кусочно-непрерывная функция, k_0 — некоторая постоянная, $H_{1/2}(\gamma)$ — пространство Соболева — Слободецкого.

Замечание 2. Используя явный вид оператора K, можно получить достаточные условия единственности решения, изучить дифференциальные свойства решений, а также обосновать применимость метода Бубнова — Галеркина

Поступила 30 XII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Ворович И. И. О существовании решений в нелинейной теории оболочек. Докл. АН СССР, 1957, т. 117, № 2.
2. Михлин С. Г. Проблема минимума квадратичного функционала. М.— Л., Гостехиздат, 1952.
3. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд-во ЛГУ, 1950.
4. Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М., Гостехиздат, 1956.