Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 539.3

ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ, ОСЛАБЛЕННОЙ КОНГРУЭНТНЫМИ ГРУППАМИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ОТВЕРСТИЙ

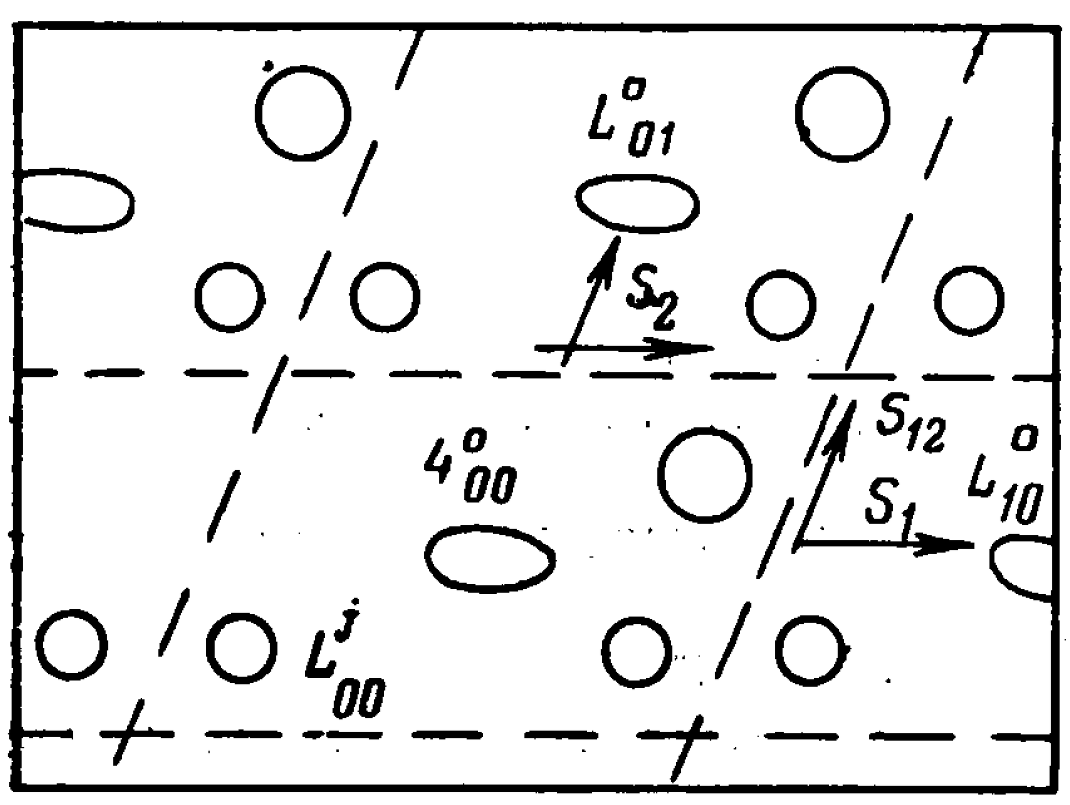
Л. А. Фильштинский

(Новосибирск)

Рассматривается общая двоякопериодическая задача теории упругости для изотропной среды, когда в пределах параллелограмма периодов имеется группа непересекающихся произвольных отверстий. Задача сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, разрешимость которого доказывается. Рассматривается также задача приведения для анизотропной двоякопериодической решетки.

Впервые одна из двоякопериодических задач была изучена в работе [1]. Различные классы двоякопериодических задач растяжения и изгиба решеток рассмотрены в [2]. Исследованию двоякопериодических задач, когда в пределах параллелограмма периодов имеется одно отверстие общего вида, посвящены работы [3,4]. Решетка с группами конгруэнтных круговых отверстий рассматривалась в [5]. Решение ряда двоякопериодических задач для физически нелинейных, а также анизотропных сред дано в работах [6–8]. В [9] исследована упруго-пластическая задача для правильной изотропной решетки с круговыми отверстиями. Общая двоякопериодическая задача для анизотропной среды изучена в [10], а общая постановка задачи приведения для решетки дана в [11].

1. Пусть ω_1 и ω_2 ($\operatorname{Im}\omega_1 = 0$, $\operatorname{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$) — основные периоды решетки. Будем предполагать, что в пределах каждого параллелограмма периодов имеется группа из k непересекающихся отверстий общего вида и эти группы конгруэнтны друг другу.



Пусть L^j_{00} $(j = 0, 1, \ldots, k-1)$ — контур j-го отверстия в пределах основного параллелограмма периодов, $l_{00} = UL_{00}{}^j$, $L = Ul_{mn}$. Область, занятую решеткой, обозначим через D, граница области — совокупность всех L^j_{mn}, т. е. L. Будем предполагать, что $L_{00}{}^j$ $(j = 0, 1, \ldots, k-1)$ — простой гладкий замкнутый контур. Конечный континуум, ограниченный кривой L^j_{00}, обозначим через D^j_{00} (фигура).

Под первой основной двоякопериодической задачей для описанной решетки понимаем краевую задачу об определении напряжений в D, когда на каждом из конгруэнтных контуров действует одинаковая нагрузка, а в пределах параллелограмма периодов имеют место средние напряжения S_1, S_2 и S_{12} (фигура).

Средние напряжения на площадках, перпендикулярных координатным осям, выражаются через S_1, S_2 и S_{12} при помощи соотношений

$$\sigma_1 \sin\alpha = S_1 + 2S_{12}\cos\alpha + S_2\cos^2\alpha,\quad \tau = S_{12} + S_2\cos\alpha,\quad \sigma_2 = S_2\sin\alpha \qquad (1.1)$$

Главный вектор внешней нагрузки на L_{00}^{j} ($j = 0, 1, \ldots, k-1$) считаем равным нулю. В этих условиях распределение напряжений в решетке носит двоякопериодический характер.

Функции Колосова — Мусхелишвили $\varphi(z)$, $\psi(z)$, описывающие напряженное и деформированное состояние в решетке, целесообразно представить так, чтобы отразить двоякопериодический характер задачи. Это удобнее всего сделать путем модификации известных интегральных представлений Д. И. Шермана [12].

По условию $\varphi(z)$ и $\bar{z}\varphi'(z) + \psi(z)$ должны быть квазипериодическими функциями. Поэтому можем записать для $\varphi(z)$

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_{00}} \omega(t)\,[\zeta(t-z) - \zeta(t)]\,dt + \sum_{j=0}^{k-1} b_j \zeta(z - z_j) + Az \tag{1.2}$$

Здесь $\zeta(z)$ — дзета-функция Вейерштрасса, $\omega(t)$ — искомая плотность, $z_j \in D_{00}^{j}$ ($z_0 = 0$), постоянные b_j — некоторые функционалы, которые будут заданы ниже. В (1.2) интегральный член представляет квазипериодическую функцию. Интегралы такого типа использовались в работах [13, 14]. Систематическое изложение теории интегралов типа Коши с автоморфными ядрами содержится в [15].

Структура функции $\psi(z)$ несколько сложнее, и при её построении, кроме интегралов с ядрами типа дзета-функции Вейерштрасса, необходимы еще некоторые специальные интегралы с регулярными ядрами.

Введем функцию [11]

$$\rho_1(z) = \sum_{mn}{}' \left\{ \frac{\bar{P}}{(z-P)^2} - 2z\,\frac{\bar{P}}{P^3} - \frac{\bar{P}}{P^2} \right\}, \qquad P = m\omega_1 + n\omega_2 \tag{1.3}$$

Эта мероморфная функция удовлетворяет следующим соотношениям в конгруэнтных точках:

$$\begin{aligned} \rho_1(z+\omega_1) - \rho_1(z) &= \bar{\omega}_1 \rho(z) + \gamma_1 \\ \rho_1(z+\omega_2) - \rho_1(z) &= \bar{\omega}_2 \rho(z) + \gamma_2 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Здесь $\rho(z)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса, γ_1 и γ_2 — известные постоянные [11].

Запишем представление для функции $\psi(z)$, обладающее требуемыми свойствами

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_{00}} (\overline{\omega(t)}\,dt + \omega(t)\,\overline{dt})\,[\zeta(t-z) - \zeta(t)] -$$

$$- \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_{00}} \omega(t)\,[\bar{t}\rho(t-z) - \rho_1(t-z)]\,dt + \sum_{j=0}^{k-1} b_j [\zeta(z-z_j) + \rho_1(z-z_j)] + Bz \tag{1.5}$$

Константы b_j, входящие в представления (1.2) и (1.5), определим так же, как в [12], лишь несущественно изменив формулы

$$b_j = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_{00}^{j}} \{\omega(t)\,\overline{dt} - \overline{\omega(t)}\,dt\}, \qquad j = 0, 1, \ldots, k-1 \tag{1.6}$$

Представления (1.2), (1.5) обеспечивают квазипериодичность функций $\varphi(z)$ и $\bar{z}\varphi'(z) + \psi(z)$. В самом деле, из (1.2) с учетом квазипериодичности дзета-функции Вейерштрасса получаем

$$\varphi(z+\omega_\nu) - \varphi(z) = A\omega_\nu + b\delta_\nu, \qquad \nu = 1, 2 \tag{1.7}$$
$$b = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_{00}} \{\omega(t)\,\overline{dt} - \omega(t)\,dt - \overline{\omega(t)}\,dt\}, \quad \delta_\nu = 2\zeta\left(\frac{\omega_\nu}{2}\right)$$

Далее имеем в силу периодичности $\varphi'(z)$

$$[\bar{z}\varphi'(z) + \psi(z)]\,\big|_z^{z+\omega_\nu} = \bar{\omega}_\nu\varphi'(z) + \psi(z+\omega_\nu) - \psi(z) \tag{1.8}$$

Подставляя в (1.8) функции φ, φ' и ψ из (1.2) и (1.5) и имея в виду соотношения (1.4), находим

$$[\bar{z}\varphi'(z) + \psi(z)]\,\big|_z^{z+\omega_\nu} = A\bar{\omega}_\nu + B\omega_\nu - a\delta_\nu + b\gamma_\nu, \qquad \nu = 1, 2$$
$$a = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{l_{00}} \overline{\omega(t)}\,dt \tag{1.9}$$

Формулы (1.7) и (1.9) доказывают высказанное утверждение.

Переходим к статическим условиям, из которых необходимо определить постоянные A и B, фигурирующие в (1.2) и (1.5). Введем функцию

$$g(z) = \varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} \tag{1.10}$$

Главный вектор сил, действующих вдоль произвольной дуги AB в пределах параллелограмма периодов, выражается соотношением [16]

$$X + iY = -ig(z)\,\big|_A^B \tag{1.11}$$

Имеем с учетом (1.1) и (1.10) статические условия

$$g(z+\omega_2) - g(z) = i(S_1 + S_{12}e^{i\alpha})\,|\omega_2| \tag{1.12}$$
$$g(z+\omega_1) - g(z) = -i(S_{12} + S_2e^{i\alpha})\,\omega_1$$

Вычисляя приращения функции $g(z)$ в конгруэнтных точках, придем в силу (1.7) и (1.9) к следующим уравнениям относительно постоянных A и B:

$$(A+\bar{A})\,\omega_1 + \bar{B}\bar{\omega}_1 + \delta_1 b + \bar{\gamma}_1\bar{b} - \bar{a}\,\bar{\delta}_1 = -i\omega_1(S_{12} + S_2e^{i\alpha})$$
$$(A+\bar{A})\,\omega_2 + \bar{B}\,\bar{\omega}_2 + \delta_2 b + \bar{\gamma}_2\bar{b} - \bar{a}\,\bar{\delta}_2 = i\,|\omega_2|\,(S_1 + S_{12}e^{i\alpha}) \tag{1.13}$$
$$[\delta_1\omega_2 - \delta_2\omega_1 = 2\pi i, \quad \gamma_2\omega_1 - \gamma_1\omega_2 = \delta_1\bar{\omega}_2 - \delta_2\bar{\omega}_1]$$

Соотношения (1.13) содержат четыре вещественных уравнения относительно трех неизвестных констант $\operatorname{Re}A$, $\operatorname{Re}B$, $\operatorname{Im}B$. Умножив первое уравнение (1.13) на ω_2, а второе — на ω_1 и вычтя затем одно из другого, получим с учетом соотношений [11], приведенных в квадратных скобках в (1.13), выражение для константы B

$$B = \frac{\delta_1 - \gamma_1}{\omega_1}b - \frac{2\pi}{S}\operatorname{Re}b - \left(\frac{\pi}{S} - \frac{\delta_1}{\omega_1}\right)\operatorname{Re}a - \frac{1}{2\sin\alpha}(S_1 + 2S_{12}e^{+i\alpha} + S_2e^{+2i\alpha}) \tag{1.14}$$

Здесь $S = \omega_1 \operatorname{Im} \omega_2$ — площадь параллелограмма периодов.

Аналогичным образом, умножив первое из уравнений в (1.13) на $\bar{\omega}_2$, а второе — на $\bar{\omega}_1$ и вычтя затем одно из другого, находим

$$\operatorname{Re} A = -\frac{1}{\omega_1}\operatorname{Re}(b\delta_1) + \frac{\pi}{S}\operatorname{Re} b + \frac{\pi}{2S}\operatorname{Re} a + \frac{1}{4\sin\alpha}(S_1 + 2S_{12}\cos\alpha + S_2) \quad (1.15)$$

Условием совместности равенств (1.13) является соотношение

$$\operatorname{Im} a = 0 \quad (1.16)$$

В силу (1.9) условие (1.16) преобретает вид

$$\operatorname{Re}\int_{l_{00}} \omega(t)\,\overline{dt} = 0 \quad (1.17)$$

Таким образом, при выполнении условия (1.17) представления (1.2) и (1.5) с постоянными $\operatorname{Re} A$ и B, определяемыми формулами (1.14) и (1.15), обеспечивают наличие в решетке заданных средних напряжений S_1, S_2 и S_{12} и, следовательно, гарантируют равенство нулю главного вектора и главного момента всех сил, действующих вдоль границы параллелограмма периодов. Величина $\operatorname{Im} A$ остается, естественно, произвольной.

2. Краевое условие первой основной задачи имеет вид [16].

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = f(t) + C_{mn}^j, \qquad j = 0, 1, \ldots, k-1 \quad (2.1)$$

$$f(t) = i\int_{t_0}^{t}(X_n + iY_n)\,dS, \quad C_{mn}^j = C_{00}^j + C_0 m + D_0 n, \quad m, n = 0, \pm 1, \pm, \ldots$$

где X_n, Y_n — компоненты заданной на l_{00} нагрузки, $t \in l_{00}$. Постоянную C_{00}^j, следуя Д. И. Шерману [12], определим формулой

$$C_{00}^j = -\int_{L_{00}^j} \omega(t)\,dS \quad (2.2)$$

Переходя при помощи формул Сохоцкого — Племеля к предельным значениям в (1.2), (1.5) и подставляя их в краевое условие (2.1), получаем после преобразований интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно плотности $\omega(t)$

$$\omega(t_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_{l_{00}} \omega(t)\, d\left\{\ln\frac{\sigma(t-t_0)\,\overline{\sigma(t)}}{\overline{\sigma(t-t_0)}\,\sigma(t)}\right\} + \frac{1}{2\pi i}\int_{l_{00}} \overline{\omega(t)}\, d\,\{\overline{\zeta_1(t-t_0)} - \quad (2.3)$$

$$- (t-t_0)\overline{\zeta(t-t_0)}\} + M\{\omega(t), t_0\} = F^*(t_0)$$

$$M\{\omega(t), t_0\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{l_{00}} \overline{\omega(t)}\,\overline{\zeta(t)}\,dt + \sum_{j=0}^{k-1} b_j\,[2\operatorname{Re}\zeta(t_0 - z_j) +$$

$$+ \overline{\rho_1(t_0 - z_j)} - t_0\overline{\rho(t_0 - z_j)}] + t_0\left[\frac{2\pi}{S}\operatorname{Re} b - \frac{2}{\omega_1}\operatorname{Re}(b\delta_1) + \frac{\pi}{S}\operatorname{Re} a\right\} +$$

$$+ \bar{t}_0\left[\frac{\bar{\delta}_1 - \bar{\gamma}_1}{\omega_1}\,\bar{b} - \frac{2\pi}{S}\operatorname{Re} b - \left(\frac{\pi}{S} - \frac{\bar{\delta}_1}{\omega_1}\right)\bar{a}\right] - C_{00}^j$$

$$F^*(t_0) = f(t_0) - \frac{t_0}{2\sin\alpha}(S_1 + 2S_{12}\cos\alpha + S_2) + \frac{\bar{t}_0}{2\sin\alpha}(S_1 + 2S_{12}e^{+i\alpha} + S_2 e^{+2i\alpha})$$

где $\sigma(z)$ — сигма-функция Вейерштрасса, $\zeta_1(z)$ определяется соотношением

$$\zeta_1'(z) = -\rho_1(z), \qquad \zeta_1(0) = 0 \tag{2.4}$$

Задача сводится, таким образом, к решению уравнения (2.3) при дополнительном условии (1.16). Можно исключить дополнительное условие прибавив к левой части уравнения (2.3) выражение $\pi i t_0 \operatorname{Im} \bar{a}/S$. Тогда всякое решение полученного видоизмененного уравнения будет одновременно решением уравнения (2.3), удовлетворяющим (1.16), если главный момент заданных на l_{00} усилий равен нулю.

В самом деле, заменив в (2.3) член $M\{\omega(t), t_0\}$ выражением $M\{\omega(t), t_0\} + \pi i t_0 \operatorname{Im} \bar{a}/S$, умножив полученное таким образом уравнение на dt_0 и интегрируя его по контуру l_{00}, получим, меняя при необходимости порядок интегрирования

$$2i \operatorname{Im}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_{00}} \overline{dt_0} \int\limits_{l_{00}} \omega(t)\zeta(t-t_0)\,dt - \frac{1}{2}\int\limits_{l_{00}} \overline{\omega(t)}\,dt + \sum_{j=0}^{k-1} b_j \int\limits_{l_{00}} \zeta(t-z_j)\,\overline{dt}\right\} +$$
$$+\left(2i \operatorname{Re} A - \frac{\pi}{S}\operatorname{Im}\bar{a}\right)\int\limits_{l_{00}} (y\,dx - x\,dy) = \int\limits_{l_{00}} f(t)\,\overline{dt} \tag{2.5}$$

Так как

$$\int\limits_{l_{00}} (y\,dx - x\,dy) \neq 0$$

и все выражения в (2.5), за исключением члена, содержащего $\operatorname{Im}\bar{a}$,—чисто мнимые величины, приходим к требуемому результату.

3. Докажем, что интегральное уравнение

$$\omega(t_0) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_{00}} \omega(t)\, d\left\{\ln \frac{\sigma(t-t_0)\,\overline{\sigma(t)}}{\overline{\sigma(t-t_0)}\,\sigma(t)}\right\} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_{00}} \overline{\omega(t)}\, d\{\overline{\zeta_1(t-t_0)} -$$
$$-(t-t_0)\overline{\zeta(t-t_0)}\} + M\{\omega(t), t_0\} + \frac{\pi i t_0}{S}\operatorname{Im}\bar{a} = F^*(t_0) \tag{3.1}$$

всегда разрешимо. Рассмотрим для этого однородное интегральное уравнение, соответствующее уравнению (3.1) при $F^*(t_0) = 0$. Очевидно, для $F^*(t) = 0$ необходимы и достаточны условия

$$S_1 = S_{12} = S_2 = 0, \qquad f(t) = 0$$

Таким образом, однородное интегральное уравнение соответствует первой основной задаче теории упругости при нулевой внешней нагрузке.

Обозначим решение однородного интегрального уравнения через $\omega_0(t)$. Всем функционалам и функциям, отвечающим этому решению, будем приписывать верхний или нижний индекс нуль.

Имеем, согласно (1.2) и (1.5)

$$\varphi_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_{00}} \omega_0(t)\,[\zeta(t-z) - \zeta(t)]\,dt + \sum_{j=0}^{k-1} b_j^0 \zeta(z-z_j) + A_0 z$$

$$\psi_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_{00}} (\overline{\omega_0(t)}\,dt + \omega_0(t)\,\overline{dt})\,[\zeta(t-z) - \zeta(t)] - \tag{3.2}$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_{00}} \omega_0(t)\,[\bar{t}\rho(t-z) - \rho_1(t-z)]\,dt + \sum_{j=0}^{k-1} b_j^0\,[\zeta(z-z_j) + \rho_1(z-z_j)] + B_0 z$$

Краевое условие для функций $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ приобретает, согласно (2.1), вид

$$\varphi_0(t) + t\overline{\varphi_0'(t)} + \overline{\psi_0(t)} = B_0^j \tag{3.3}$$

$$B_0^j = -\int\limits_{L_{00}^j} \omega_0(t)\,ds, \qquad j = 0, 1, \ldots, k-1$$

Следовательно, $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$, описывающие первую основную задачу при нулевых внешних силах, представимы в форме

$$\varphi_0(z) = i\varepsilon z + c, \qquad \psi_0(z) = -\bar{d} \tag{3.4}$$

При этом

$$B_0^j = c - \bar{d}, \qquad j = 0,1, \ldots, k-1 \tag{3.5}$$

Сравнивая между собой соответствующие приращения функций из (3.2) и (3.4) в конгруэнтных точках, приходим к равенствам

$$A_0 = i\varepsilon,\ B_0 = 0,\ a_0 = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{l_{00}} \overline{\omega_0(t)}\,dt = 0,\ b_0 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_{00}} \{\omega_0\,\overline{dt} - \omega_0\,dt - \overline{\omega}_0\,dt\} = 0 \tag{3.6}$$

В силу (3.6), (3.4) и (3.2) можно записать

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_{00}} \omega_0(t)\,[\zeta(t-z) - \zeta(t)]\,dt + \sum_{j=0}^{k-1} b_j^0 \zeta(z - z_j) - c = 0, \qquad z \in D$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_{00}} (\overline{\omega_0(t)}\,dt + \omega_0(t)\,\overline{dt})\,[\zeta(t-z) - \zeta(t)] - \tag{3.7}$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_{00}} \omega_0(t)\,[\bar{t}\rho(t-z) - \rho_1(t-z)]\,dt + \sum_{j=0}^{k-1} b_j^0\,[\zeta(z-z_j) + \rho_1(z-z_j)] + \bar{d} = 0$$

Интегрируя во втором из соотношений (3.7) по частям и учитывая формулу Коши для всякой квазипериодической функции $F(z)$ с заданными циклическими весами α_1 и α_2 [14]:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_{00}} F(t)\,[\zeta(t-z) - \zeta(t)]\,dt - \frac{z}{2\pi i}(\alpha_1\delta_2 - \alpha_2\delta_1) \tag{3.8}$$

можно представить соотношения (3.7) в виде

$$\frac{1}{i}\,\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_{00}} \left[\omega_0(t) + \sum_{j=0}^{k-1} b_j^0 \zeta(t - z_j) - c\right][\zeta(t-z) - \zeta(t)]\,dt =$$

$$= \begin{cases} 0, & z \in D \\ \dfrac{1}{i}\,\varphi_*(z), & z \in D_{00}^j \end{cases} \tag{3.9}$$

$$\frac{1}{i}\,\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_{00}} \left[\overline{\omega_0(t)} - \bar{t}\omega_0'(t) + \sum_{j=0}^{k-1} b_j^0 \zeta(t - z_j) + e\right][\zeta(t-z) - \zeta(t)]\,dt +$$

$$+ Q(z) = \begin{cases} 0, & z \in D \\ \dfrac{1}{i}\,\psi_*(z), & z \in D_{00}^j, \quad j = 0, 1, \ldots, k-1 \end{cases} \tag{3.10}$$

Здесь

$$Q(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_{00}} \omega_0(t)\,\rho_1(t-z)\,dt + \sum_{j=0}^{k-1} b_j^0 \rho_1(z - z_j) \tag{3.11}$$

$$e = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_{00}} \bar{t}\omega_0(t)\,\rho(t)\,dt + \bar{d}$$

Вычисляя разность предельных значений интеграла в (3.9), находим

$$i\Phi^-(t) = i\varphi_*(t) = \omega_0(t) + \sum_{j=0}^{k-1} b_j^0 \zeta(t - z_j) - c \tag{3.12}$$

Отсюда следует, что выражение в правой части (3.12) является граничным значением регулярных в областях $D_{00}{}^j$ $(j = 0, 1, \ldots, k-1)$ функции $i\varphi_*(z)$.

Если подставить выражение для $\omega_0(t)$ из (3.12) в формулу для $Q(z)$ из (3.11), то получим $Q(z) \equiv 0$. В таком случае имеем

$$i\Psi^-(t) = i\psi_*(t) = \overline{\omega_0(t)} - \bar{t}\omega_0'(t) + \sum_{j=0}^{k-1} b_j^0 \zeta(t - z_j) + e \tag{3.13}$$

т. е. правая часть формулы (3.13) является граничным значением регулярных в $D_{00}{}^j$ $(j = 0, 1, \ldots, k-1)$ функций $i\psi_*(z)$.

Исключая, как это обычно делается, из (3.12) и (3.13) $\omega_0(t)$, придем к функциональному соотношению на l_{00}

$$\overline{\varphi_*(t)} + \bar{t}\varphi_*'(t) + \psi_*(t) = i \sum_{j=0}^{k-1} b_j^0 \left[\overline{\zeta(t - z_j)} - \zeta(t - z_j) + \bar{t}\wp(t - z_j)\right] - i(\bar{c} + e) \tag{3.14}$$

Умножим (3.14) на dt и проинтегрируем по каждому из контуров $L_{00}{}^m$, $(m = 0, 1, \ldots, k-1)$. Учитывая, что $\psi_*(t)$ является граничным значением регулярной в $D_{00}{}^m$ функции $\psi_*(z)$, получим

$$\int_{L_{00}^m} \{\overline{\varphi_*(t)}\, dt - \varphi_*(t)\, \overline{dt}\} = -2\pi b_m^0 + i \sum_{j=0}^{k-1} b_j^0 \int_{L_{00}^m} [\overline{\zeta(t - z_j)}\, dt + \zeta(t - z_j)\, \overline{dt}]$$

Отсюда следуют равенства

$$b_m = 0, \qquad m = 0, 1, \ldots, k-1 \tag{3.15}$$

Условие (3.14) приобретает вид

$$\overline{\varphi_*(t)} + \bar{t}\varphi_*'(t) + \psi_*(t) = -i(e + \bar{c}) \tag{3.16}$$

Следовательно, функции $\varphi_*(z)$ и $\psi_*(z)$ решают первую основную задачу теории упругости для областей $D_{00}{}^j$ $(j = 0, 1, \ldots, k-1)$ при нулевой внешней нагрузке. Имеем

$$\varphi_*(z) = i\varepsilon_j z + c_j, \qquad \psi_*(z) = -\bar{d}_j, \qquad j = 0, 1, \ldots, k-1 \tag{3.17}$$

Причем постоянные c_j, d_j и $e + c$ связаны соотношением $c_j - d_j - i(c + \bar{e}) = 0$. Выражая $\omega_0(t)$ из (3.12) и (3.17), находим

$$\omega_0(t) = t\varepsilon_j - c - ic_j \tag{3.18}$$

Подставляя $\omega_0(t)$ из (3.18) в равенство (3.15) и (1.6), имеем

$$\varepsilon_j = 0, \qquad j = 0, 1, \ldots, k-1 \tag{3.19}$$

Из формул (3.9), (3.10), (3.15), (3.18) и (3.19) следуют равенства

$$c_j = d_j = 0, \qquad e + \bar{c} = 0, \qquad j = 0, 1, \ldots, k-1 \tag{3.20}$$

Наконец, используя (3.5), (3.18), (3.20) и независимость константы $B_0{}^j$ в (3.3) от индекса j, получаем $c = d = 0$. Таким образом $\omega_0(t) = 0$ и интегральное уравнение (3.1) имеет единственное решение.

4. Переходим к решению задачи приведения для рассматриваемой обобщенной решетки. Смысл этой задачи заключается в определении макроскопических упругих параметров решетки из условия, что жесткость решетки на растяжение совпадает с жесткостью некоторой сплошной анизотропной среды. Согласно общей постановке задач такого рода [11], необходимо отождествить соответствующие приращения смещений в конгруэнтных точках решетки и анизотропной сплошной среды.

Ниже будем рассматривать лишь симметричные относительно координатных осей решетки. Основные периоды возьмем в виде

$$\omega_2 = iH, \quad \operatorname{Re}\omega_2 = 0 \quad \operatorname{Im}\omega_1 = 0 \quad (\alpha = \pi/2) \tag{4.1}$$

Введем обозначение

$$h(z) = 2G(u + iv) = \varkappa\varphi(z) - \overline{z\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} \tag{4.2}$$

где u, v — компоненты вектора смещения в решетке, G — модуль сдвига материала решетки.

На основании формул (1.7) и (1.8) находим приращения $h(z)$ в конгруэнтных точках

$$\begin{gathered}\Omega_1 = (\varkappa + 1)(A\omega_1 + b\delta_1) + (i\tau - \sigma_2)\omega_1 \\ \Omega_2 = (\varkappa + 1)(A\omega_2 + b\delta_2) - i(\sigma_1 \sin\alpha - \tau e^{-i\alpha} - i\sigma_2\cos\alpha)\,|\omega_2|\end{gathered} \tag{4.3}$$

Приравнивая приращения (4.3) соответствующим приращениям функции $h(z)$ в сплошной ортотропной среде при тех же средних напряжениях σ_1, σ_2 и $\tau = 0$, получаем систему соотношений для определения макроскопических упругих параметров E_1^*, E_2^*, μ_1^*, μ_2^*

$$\begin{gathered}(\varkappa + 1)(A\omega_1 + b\delta_1) - \sigma_2\omega_1 = \frac{E}{1+\mu}\,\frac{\sigma_1 - \mu_1^*\sigma_2}{E_1^*}\,\omega_1 \\ (\varkappa + 1)(A\omega_2 + b\delta_2) - i\sigma_1|\omega_2| = \frac{E}{1+\mu}\left(\frac{\sigma_1 - \mu_1^*\sigma_2}{E_1^*}\operatorname{Re}\omega_2 + i\,\frac{\sigma_2 - \mu_2^*\sigma_1}{E_2^*}\operatorname{Im}\omega_2\right)\end{gathered} \tag{4.4}$$

Согласно (1.14) и (4.1), можно записать

$$A\omega_1 + b\delta_1 = \left(\rho_1^* + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{4}\right)\omega_1, \qquad A\omega_2 + b\delta_2 = \left(\rho_2^* + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{4}\right)\omega_2$$

$$\rho_1^* = i\,\frac{\operatorname{Im}(b\delta_1)}{\omega_1} + \frac{\pi}{S}\operatorname{Re} b + \frac{\pi}{2S}\operatorname{Re} a$$

$$\rho_2^* = \frac{b\delta_2}{\omega_2} - \frac{\operatorname{Re}(b\delta_1)}{\omega_1} + \frac{\pi}{S}\operatorname{Re} b + \frac{\pi}{2S}\operatorname{Re} a$$

Вводя обозначения

$$\rho_1^* = \rho_{11}\sigma_1 + \rho_{12}\sigma_2, \quad \rho_2^* = \rho_{21}\sigma_1 + \rho_{22}\sigma_2$$

и замечая, что жесткость решетки не зависит от величин средних напряжений σ_1, σ_2, получаем из (4.4)

$$\frac{E_1^*}{E} = (1 + 4\rho_{11})^{-1}, \qquad \frac{E_2^*}{E} = (1 + 4\rho_{22})^{-1}$$

$$\frac{E\mu_1^*}{E_1^*} = \mu - 4\rho_{12}, \qquad \frac{E\mu_2^*}{E_2^*} = \mu - 4\rho_{21}$$

Условием разрешимости задачи приведения симметричной решетки к эквивалентной среде является равенство $\rho_{12} = \rho_{21}$. Аналогичным образом можно определить макроскопический модуль второго рода G^*.

Поступила 6 XII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Натанзон В. Я. О напряжениях в растягиваемой пластинке ослабленной одинаковыми отверстиями, расположенными в шахматном порядке. Матем. сб., 1935, т. 42, № 5.
2. Григолюк Э. И., Фильштинский Л. А. Перфорированные пластины и оболочки. М., «Наука», 1970.
3. Koiter W. T. Stress distribution in an infinite elastic sheet with a doubly-periodic set of egual holes. Boundary Problems Differential Eguations, Madison, Univ. Wisconsin Press., 1960.
4. Ержанов Ж. С., Тусупов М. Т. К решению двоякопериодической задачи теории упругости. В сб.: Концентрация напряжений. Киев, «Наукова думка», 1968, вып. 2.
5. Ван Фо Фи Г. А. Про один з розв'язкі в плоскої двоякоперіодичної задачі теориії пружності. Доп. АН УРСР, сер. А, 1965, № 9.
6. Космодамианский А. С. Многосвязные пластинки. Донецк, 1969.
7. Космодамианский О. С. і Клойзнер С. М. Нелінійна задача для пластинки, послабленої двоперіодичною системою криволінійних отворів. Доп. АН УРСР, сер. А, 1969, № 11.
8. Космодамианский А. С. Анизотропные многосвязные среды. Донецк, 1970.
9. Куршин Д. М., Суздальницкий И. Д. Упруго-пластическая задача для плоскости, ослабленной двоякопериодической системой круглых отверстий. ПММ, 1968, т. 32, вып. 3.
10. Григолюк Э. И., Кац В. Е. Фильштинский Л. А. Двоякопериодическая задача теории упругости для анизотропной среды. Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 6.
11. Фильштинский Л. А. Напряжения и смещения в упругой плоскости, ослабленной двоякопериодической системой одинаковых круглых отверстий. ПММ, 1964, т. 28.
12. Шерман Д. И. К решению плоской статической задачи теории упругости при заданных внешних силах. Докл. АН СССР, 1940, т. 28, № 1.
13. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.— Л., Гостехиздат, 1950.
14. Koiter W. T. Some general theorems on doubly-periodic and quasi-periodic functions. Amsterdam, Proc. Koninkl. nederl. akad., wet., 1959, vol. 62, № 2.
15. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1958.
16. Мусхелишвили. Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., Изд-во АН СССР, 1954.