Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 539.3

О СВЕДЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ К БЕСКОНЕЧНЫМ СИСТЕМАМ

Г. Я. Попов

(Одесса)

Указываются формальные приемы сведения интегральных уравнений теории упругости (не рассмотренных в работе [1]) к бесконечным системам алгебраических уравнений. Рассмотрено интегральное уравнение первого рода с разностным ядром смешанного типа, т. е. содержащее как фредгольмовские, так и вольтерровские операторы. К такому уравнению, например, можно свести задачу об изгибе полубесконечной пластинки на линейно-деформируемом, если для обращения дифференциального оператора использовать не функцию Грина [2], а функцию Коши. Прием, при помощи которого сведено это уравнение к бесконечной системе, основан на наличии спектральных соотношений для полубесконечного интервала. Дополнительно к соотношениям подобного типа, указанным в работе [3], построены новые спектральные соотношения на полубесконечном интервале. Рассмотрено интегральное уравнение второго рода смешанного типа. Изучены интегральные уравнения первого и второго рода с разностными ядрами и заданными на оси с выключенным отрезком. Рассмотрено интегральное уравнение второго рода на конечном интервале с ядром, представленным через несобственный интеграл от произведения бесселевых функций. Предлагаемые приемы можно перенести и на соответствующие системы интегральных уравнений.

1. Рассмотрим интегральное уравнение смешанного типа

$$\int_0^\infty k(x-y)\,\varphi(y)\,dy + \int_0^x l(x-y)\,\varphi(y)\,dy = f(x) \tag{1.1}$$

Будем предполагать справедливыми интегральное представление

$$k(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K(t)\,e^{-ixt}\,dt \tag{1.2}$$

и асимптотику

$$K(t) = \gamma t^{2\mu-1}[1 + O(t^{-1})], \qquad t\to\infty \quad (|\mu| < {}^1/_2) \tag{1.3}$$

Это позволяет представить функцию $k(x)$ в виде

$$k(x) = \gamma k_\mu(x) + d(x) \tag{1.4}$$

где первое слагаемое, несущее сингулярность, имеет вид

$$k_\mu(x) = \frac{2^\mu K_\mu(|x|)}{\Gamma({}^1/_2-\mu)\sqrt{\pi}\,|x|^\mu} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ixt}\,dt}{(1+t^2)^{{}^1/_2-\mu}} \tag{1.5}$$

($K_\mu(z)$ — функция Макдональда), а второе слагаемое представимо в виде

$$d(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} D(t)\,e^{-ixt}dt, \qquad D(t) = K(t) - \frac{\gamma}{(1+t^2)^{{}^1/_2-\mu}} \tag{1.6}$$

Для сведения интегрального уравнения (1.1) к бесконечной системе уравнений воспользуемся схемой, примененной в [1] для более простого случая, когда $l \equiv 0$. Согласно этой схеме, решение строим в виде следующего разложения по многочленам Чебышева — Лагерра:

$$\varphi(x) = \frac{2e^{-x}}{x^{1/2-\mu}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varphi_m}{\mu_m} L_m^{\mu-1/2}(2x) \qquad \left(\mu_m = \frac{\Gamma(1/2+\mu+m)}{2^{1/2-\mu}\, m!}\right) \tag{1.7}$$

Последующее выполнение операций, указанных в [1] и существенно основанных на использовании спектрального соотношения [4]

$$\int_0^{\infty} k_\mu(x-y)\, e^{-y} y^{\mu-1/2} L_m^{\mu-1/2}(2y)\, dy = \mu_m e^{-x} L_m^{\mu-1/2}(2x) \tag{1.8}$$

приводит к следующей бесконечной системе алгебраических уравнений:

$$\varphi_n + \frac{1}{\gamma} \sum_{m=0}^{\infty} a_{n-m}\varphi_m + \frac{1}{\gamma} \sum_{m=0}^{\infty} b_{n-m}\varphi_m = \frac{f_n}{\gamma} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.9}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D^*(t)}{1+t^2} \left(\frac{t+i}{t-i}\right)^k dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D^*\left(-\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right) e^{-ik\varphi}\, d\varphi$$

$$(D^*(t) = (1+t^2)^{1/2-\mu} K(t) - \gamma)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi i} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} \frac{L(p)}{(1-p^2)^{1/2+\mu}} \left(\frac{p+1}{p-1}\right)^k dp, \qquad f_n = \frac{1}{\mu_n} \int_0^{\infty} \frac{f(x)\, L_n^{\mu-1/2}(2x)\, dx}{e^x x^{1/2-\mu}} \tag{1.10}$$

Через $L(p)$ обозначим преобразование Лапласа функции $l(x)$, т. е.

$$L(p) = \int_0^{\infty} e^{-px} l(x)\, dx$$

При этом следует иметь в виду, что в отличие от [1] после подстановки (1.7) в (1.1) и почленного интегрирования следует дополнительно воспользоваться теоремой в свертках для преобразования Лапласа. Чтобы при последующем интегрировании не пришлось оперировать с расходящимися интегралами, следует наложить ограничение на рост функции $l(x)$, т. е.

$$l(x) = o(e^x), \qquad x \to \infty \tag{1.11}$$

Это позволяет считать параметр ε, содержащийся в формуле для b_k, меньшим единицы, но большим, чем действительные части чисел, определяющих особые точки преобразования Лапласа функции $l(x)$.

Как следует из формулы (1.10), для a_k они представляют собой коэффициенты Фурье функции $D^*(-\operatorname{ctg}{}^1/_2\varphi)$ и поэтому для их вычисления можно применить известные формулы тригонометрической интерполяции [5]. Эти же формулы можно применить и для вычисления остальных коэффициентов бесконечной системы (1.9), если дополнительно потребовать, что функция $l(x)$ абсолютно интегрируема на полуоси ($\varepsilon = 0$) и что имеет место интегральное представление

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(t)\, e^{-itx}\, dt \tag{1.12}$$

Тогда полагая $\varepsilon^{-} = 0$, $p = i \operatorname{ctg} {}^1/_2\varphi$ во второй формуле (1.10) и подставляя (1.12) в третью формулу (1.10), получим

$$b_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} L_\mu\left(i\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)e^{-ik\varphi}\,d\varphi, \qquad L_\mu(z) = \frac{L(z)}{(1-z^2)^{\mu-1/2}} \tag{1.13}$$

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{F(u)}{(1+iu)^{\mu+1/2}}\left(\frac{u+i}{u-i}\right)^n du = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} F_\mu\left(-\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)e^{-in\varphi}\,d\varphi$$

$$F_\mu(z) = 2(1-iz)(1+iz)^{1/2-\mu}F(z)$$

Бесконечные системы типа (1.9) допускают, как известно [6], точное решение методом факторизации на единичной окружности. Для этого следует просуммировать ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}(a_k+b_k)z^k = A(z) \tag{1.14}$$

и профакторизовать функцию $[1+\gamma^{-1}A(z)]^{-1}$ на единичной окружности. В рассматриваемом случае в силу формул (1.10) и (1.13) ряд слева в (1.14) при $z = e^{i\varphi}$ легко суммируется и в результате получаем

$$A(z) = D^*\left(i\frac{1+z}{1-z}\right) + L_\mu\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \tag{1.15}$$

В работе [6] указаны формулы, посредством которых решается задача факторизации на единичной окружности. Существование и единственность точного решения в том или ином классе функций [6] будет обеспечена условиями

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|a_k+b_k| < \infty, \qquad \gamma + D^*(-\operatorname{ctg}{}^1/_2\varphi) + L_\mu(i\operatorname{ctg}{}^1/_2\varphi) \neq 0 \tag{1.16}$$

$$(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$$

$$\{\arg[D^*(-\operatorname{ctg}{}^1/_2\varphi) + L_\mu(i\operatorname{ctg}{}^1/_2\varphi)]\}_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = 0$$

Получаемое методом факторизации точное решение системы (1.9) сокращает количество квадратур в точном решении исходного интегрального уравнения по сравнению с получаемым без перехода к системе (1.9), однако часто оказывается трудно доводимым до числа. Поэтому во многих случаях удобнее получить приближенное решение бесконечной системы методом урезывания (редукции). При этом условия (1.16), как показано в работе [7], будут необходимыми и достаточными для его применения.

Изложенный прием сведения интегрального уравнения (1.1) к бесконечной системе (1.9) существенным образом связан со спектральным соотношением (1.8) на полубесконечном интервале. Использование же его стало возможным благодаря асимптотике (1.3). Если асимптотика для $K(t)$ будет иной, то следует использовать другое спектральное соотношение. Чтобы иметь такую возможность, необходимо располагать достаточно большим набором спектральных соотношений на полубесконечном интервале.

2. Построим новую серию спектральных соотношений на полубесконечном интервале. Будем исходить из следующего соотношения [3]:

$$\int_0^1 \frac{\Pi^*(x, y)}{(1-y)^{1-\alpha}} P_n^{\alpha-1,\,1+\rho-\alpha}(2y-1)\,dy = \frac{\sigma_n P_n^{\alpha-1,\,1+\rho-\alpha}(2x-1)}{x^{\alpha-\rho-1}} \tag{2.1}$$

$$\Pi^*(x, y) = \int_0^z \frac{s^\rho\,ds}{(x-s)^\alpha (y-s)^\alpha}, \quad \sigma_n = \frac{\Gamma^2(1-\alpha)\,\Gamma(\alpha+n)\,\Gamma(1+\rho+n)}{n!\,\Gamma(2+\rho-\alpha+n)}$$

$$(z = \min(x, y);\ \operatorname{Re}(1+\rho,\ 1-\alpha) > 0)$$

Полиномиальное ядро $\Pi^*(x, y)$ при $x < y$, если учесть известное [8] интегральное представление для функции Гаусса $F(a, b; c; x)$, можно представить в виде

$$\Pi^*(x, y) = \boldsymbol{B}(\rho+1,\ 1-\alpha)\, y^{-\alpha} x^{1+\rho-\alpha} F(\alpha,\ 1+\rho;\ 2-\alpha+\rho;\ x/y)$$

В случае $y < x$ следует поменять местами x и y. Если теперь в (2.1) сделать замену $x = e^{-\xi}$, $y = e^{-\eta}$, то придем к следующему спектральному соотношению на полубесконечном интервале:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\omega|\xi-\eta|} F(\alpha,\ 2\omega;\ 1-\alpha+2\omega;\ e^{-|\xi-\eta|}) P_n^{\alpha-1,\,2\omega-\alpha}(2e^{-\eta}-1)\,d\eta}{e^{(1+\omega-\alpha)\eta}(1-e^{-\eta})^{1-\alpha}} = \tag{2.2}$$

$$= \frac{\pi(\alpha)_n (2\omega)_n e^{-\omega\xi}}{\sin \pi\alpha n!\,(1-\alpha+2\omega)_n} P_n^{\alpha-1,\,2\omega-\alpha}(2e^{-\xi}-1)$$

$$(2\omega = 1+\rho,\ n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Из полученного спектрального соотношения, используя формулы преобразования для функции Гаусса и изменяя параметры, можно получить серию спектральных соотношений, многие из которых можно применить к уравнениям типа (1.1). Укажем, однако, те из них, когда функция Гаусса вырождается в элементарную функцию. Полагая, например $\omega = \alpha - {}^1/_2$, вместо (2.2) получим

$$\int_0^\infty \left|\operatorname{sh}\frac{\xi-\eta}{2}\right|^{1-2\alpha} \frac{C_n^{\alpha-1/2}(2e^{-\eta}-1)\,d\eta}{e^{1/2\eta}(1-e^{-\eta})^{1-\alpha}} = \frac{2^{2\alpha-1}(2\alpha-1)_n}{\sin \pi\alpha n!\, e^{(\alpha-1/2)\xi}} C_n^{\alpha-1/2}(2e^{-\xi}-1) \tag{2.3}$$

Здесь использована известная связь между многочленами Якоби и Гегенбауэра $C_n^\nu(z)$ [8].

Спектральное соотношение

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \ln\left|\operatorname{cth}\frac{\xi-\eta}{4}\right| \frac{P_n^{1/2,\,-1/2}(1-2e^{-\eta})}{e^{1/2\,\eta}(1-e^{-\eta})^{1/2}}\,d\eta = \frac{P_n^{1/2,\,-1/2}(1-2e^{-\xi})}{(1/2+n)\,e^{1/2\,\xi}} \tag{2.4}$$

следует из (2.2) при $\alpha = \omega = {}^1/_2$.

Содержащиеся в (2.4) многочлены Якоби можно заменить на многочлены Чебышева первого $T_n(z)$, либо второго $U_n(z)$ рода, пользуясь соотношением

$$n!\,P_n^{1/2,\,-1/2}(1-2z) = (1/2)_n U_{2n}\left(\sqrt{1-z}\right) = (-1)^n (1/2)_n z^{-1/2} T_{2n+1}\left(\sqrt{z}\right) \tag{2.5}$$

Спектральное соотношение (2.4) можно применить к решению уравнения (1.1), если в асимптотике (1.3) $\mu = 0$. В этом случае из ядерной функции (1.2) легко выделяется сингулярная часть

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{th}\pi t}{t}e^{-ixt}\,dt = \frac{1}{\pi}\ln\left|\operatorname{cth}\frac{x}{4}\right| \tag{2.6}$$

В работе [9] спектральное соотношение (2.5) получено другим путем и там же дано применение его к решению одного интегрального уравнения типа (1.1) при $l(x) \equiv 0$. Другого типа спектральные соотношения на полубесконечном интервале получим, отправляясь от соотношения [10]

$$\int_0^1 \frac{W_{\mu,\gamma}^{\nu}(x, y)\, P_m^{\gamma,\, -\sigma_+}(1-2y^2)\,dy}{(1-y^2)^{\sigma_+}\, y^{-\gamma-1}} = \frac{\lambda_m}{x^{-\mu}}\, P_m^{\mu,\, -\sigma_-}(1-2x^2) \tag{2.7}$$

$$\lambda_m = \Gamma(1-\sigma_+ + m)\,\Gamma(\sigma+m)\,2^{\nu-1}\,[m!\,\Gamma(1+\mu+m)]^{-1}$$

$$(0 \leqslant x \leqslant 1,\ 2\sigma_{\pm} = 1-\nu \pm (\gamma-\mu),\ 2\sigma = 1+\nu+\gamma+\mu,\ \operatorname{Re}\sigma_{\pm} < 1)$$

Здесь $W_{\mu,\gamma}^{\nu}(x, y)$ — разрывной интеграл Вебера — Сонина, выражаемый через функции Бесселя по формуле

$$W_{\mu,\gamma}^{\nu}(x, y) = \int_0^{\infty} t^{\nu} J_{\mu}(tx)\, J_{\gamma}(ty)\,dt \tag{2.8}$$

$$(\operatorname{Re}(1+\nu+\gamma+\mu) > 0,\ \operatorname{Re}\nu < 1)$$

Пользуясь известным его представлением через гипергеометрическую функцию Гаусса, [8], обнаружим следующее важное свойство:

$$W_{\mu,\gamma}^{\nu}(\xi^{-1}, \eta^{-1}) = (\xi\eta)^{1+\nu}\, W_{\gamma,\mu}^{\nu}(\xi, \eta) \tag{2.9}$$

Выполнив в (2.7) замену $x = \xi^{-1}$, $y = \eta^{-1}$ и воспользовавшись свойством (2.9), получим спектральное соотношение на полубесконечном интервале

$$\int_1^{\infty} \frac{W_{\mu,\gamma}^{\nu}(\xi, \eta)\, P_m^{\gamma,-\sigma_+}(1-2\eta^{-2})\,d\eta}{\eta^{1+\rho}\,(\eta^2-1)^{\sigma_+}} = \frac{\lambda_m P_m^{\mu,-\sigma_-}(1-2\xi^{-2})}{\xi^{1+\nu+\mu}} \tag{2.10}$$

$$(2\rho = 1-\nu+\gamma+\mu,\ 1 \leqslant \xi < \infty)$$

Придавая различные значения параметрам ν, γ, μ, из этого соотношения можно получить серию спектральных соотношений. Укажем только одно из них

$$\int_1^{\infty} K\left(\frac{2\sqrt{\xi\eta}}{\xi+\eta}\right)\frac{P_{2m}(\sqrt{1-\eta^{-2}})\,d\eta}{(\xi+\eta)\,\eta^{3/2}\sqrt{\eta^2-1}} = \left[\frac{\pi}{2}\,\frac{(2m-1)!!}{2m!!}\right]^2 P_{2m}\left(\sqrt{1-\xi^{-2}}\right) \tag{2.11}$$

вытекающее из (2.10) при $\nu = \gamma = \mu = 0$. Здесь $K(x)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, $P_m(z)$ — многочлен Лежандра. Спектральные соотношения типа (2.10) и (2.11) позволяют описанным приемом (см. п. 1) сводить к бесконечным системам интегральные уравнения первого рода, заданные на полубесконечном интервале, ядра которых не зависят от разности аргументов, но имеют ту же особенность, что и ядра в (2.10) и (2.11). Такого типа интегральные уравнения встречаются в задачах концентрации напряжений около круговых трещин.

3. Прием сведения интегрального уравнения (1.1) к бесконечной системе легко переносится на соответствующие уравнения второго рода

$$\varphi(x)+\int_0^\infty k(x-y)\varphi(y)\,dy+\int_0^x l(x-y)\varphi(y)\,dy=f(x) \qquad (3.1)$$

При этом нет необходимости иметь спектральное соотношение на полубесконечном интервале и можно использовать любые функции, ортогональные на полубесконечном или конечном [1] интервале, если весовые функции не обращаются в бесконечность на концах интервала ортогональности. Однако, по-видимому, только применение многочленов Лагерра, т. е. представление решения в виде

$$\varphi(x)=2e^{-x}\sum_{m=0}^\infty \varphi_m L_m(2x) \qquad (3.2)$$

позволяет получить бесконечную систему [2]

$$\varphi_n+\sum_{m=0}^\infty a_{n-m}\varphi_m+\sum_{m=0}^n b_{n-m}\varphi_m=f_n \qquad (3.3)$$

являющуюся дискретным аналогом исходного уравнения. При этом для коэффициентов b_k, f_n будут иметь место прежние формулы (1.10), в которых следует положить $\mu=1/_2$. Таким образом исчезают точки ветвления в интеграле, определяющем b_k, а это в силу регулярности $L(z)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} z>\varepsilon>1$ приводит к тому, что $b_k=0$, $k<0$. Для коэффициентов a_k также справедлива формула (1.10) с заменой $D^*(t)$ на $K(t)$. Если считать, как и выше, $l(x)$, абсолютно интегрируемой на полуоси, а $f(x)$ представимой в виде (1.12), то и в рассматриваемом случае будут иметь место формулы (1.13) при $\mu=1/_2$.

Условия (1.16) при $\gamma=1$, $D^*=K$, $L_\mu=L$ будут необходимыми и достаточными для применимости метода урезывания к бесконечной системе (3.3).

Полезно отметить, что в случае уравнения Вольтерра ($k(x)\equiv 0$) бесконечная система (3.3) ($a_k=0$) вырождается в рекуррентные соотношения для неизвестных φ_m. Для них же можно указать и явное выражения через f_n ([11], стр. 255]).

Таким образом, намечен еще один способ получения точного решения интегрального уравнения Вольтерра без использования формул обращения для преобразования Лапласа.

---

[1] При этом подходящей заменой переменных следует конечный интервал привести к полубесконечному.

[2] Применительно к случаю $l(x)\equiv 0$, это, по-видимому, впервые обнаружено в работе [7].

Уравнение типа Вольтерра

$$\varphi(x)+\int_x^\infty l(x-y)\,\varphi(y)\,dy=f(x)\qquad(x\geqslant 0)\tag{3.4}$$

если его решение искать в виде (3.2), тоже приводится к бесконечной системе

$$\varphi_n+\sum_{m=n}^\infty b_{n-m}\varphi_m=f_n\tag{3.5}$$

являющейся дискретным аналогом исходного уравнения.

Формулы для коэффициентов этой системы аналогичны соответствующим коэффициентам системы (3.3).

В случае интегрального уравнения вида

$$\varphi(x)+\int_0^\infty k(x-y)\,w(y)\,\varphi(y)\,dy+\int_0^x l(x-y)\,w(y)\,\varphi(y)\,dy=f(x)\tag{3.6}$$

можно поступить следующим образом. Решение по-прежнему разыскиваем в виде (3.3), но дополнительно полагаем

$$\psi(x)=w(x)\,\varphi(x)=2\sum_{m=0}^\infty e^{-x}\psi_m L_m(2x)$$

В результате приходим к следующим бесконечным системам:

$$\varphi_n+\sum_{m=0}^\infty a_{n-m}\psi_m+\sum_{m=0}^n b_{n-m}\psi_m=f_n\tag{3.7}$$

$$\psi_n=\sum_{m=0}^\infty b_{n,\,m}\varphi_m,\quad b_{n,\,m}=2\int_0^\infty e^{-2x}w(x)\,L_n(2x)\,L_m(2x)\,dx=$$

$$=\sum_{k=0}^{n+m}c_k w_k,\quad w_k=\int_0^\infty e^{-k}x^k w\left(\frac{x}{2}\right)dx,\quad c_k=\sum_{r=0}^k\frac{(-n)_r(-m)_{k-r}}{r!^2\,(k-r)!^2}$$

При этом коэффициенты a_k, b_k; f_k определяются теми же формулами, что и соответствующие коэффициенты бесконечной системы (3.3).

4. Укажем прием сведения к бесконечной системе интегрального уравнения вида

$$\left(\int_{-\infty}^{-a}+\int_a^\infty\right)k(x-y)\,\varphi(y)\,dy=f(x)\qquad(|x|>a)\tag{4.1}$$

Будем полагать, что из ядра можно выделить сингулярную часть $k_*(x-y)$, для которой имеет место спектральное соотношение

$$\int_0^\infty k_*(x-y)\,p(y)\,\pi_n^*(y)\,dy=\sigma_n g(x)\,\pi_n^*(x)\qquad(x\geqslant 0,\ n=0,1,2\ldots)\tag{4.2}$$

Здесь [1] $\pi_n^*(x) = \pi_n[\rho(x)]$, где $\pi_n(x)$ — многочлен, ортогональный в том смысле, что

$$\int_0^\infty p(x)\,g(x)\,\pi_n^*(x)\,\pi_m^*(x)\,dx = \lambda_n\delta_{mn} \tag{4.3}$$

Итак, пусть

$$k(z) = \gamma k_*(z) + d(z) \qquad (\gamma = \text{const}) \tag{4.4}$$

введем функцию

$$f_\pm(x) = f(\pm x), \quad \varphi_\pm(x) = \varphi(\pm x) \qquad (x > a) \tag{4.5}$$

и запишем уравнение (4.1) в виде двух: одно для $x > a$, а другое для $x < -a$. Тогда в результате очевидных замен переменных с использованием (4.4) и (4.5) придем к системам

$$\gamma\int_a^\infty k_*(x-y)\,\varphi_\pm(y)\,dy + \int_a^\infty d(\pm x \mp y)\,\varphi_\pm(y)\,dy + \int_a^\infty k(\pm x \pm y)\,\varphi_\mp(y)\,dy = f_\pm(x) \qquad (x \geqslant a) \tag{4.6}$$

В соответствии со спектральным соотношением (4.2) строим решение системы (4.6) в виде

$$\varphi_\pm(x) = \sum_{m=0}^\infty \frac{\varphi_m^\pm}{\sigma_m}\,p(x-a)\,\pi_m^*(x-a) \tag{4.7}$$

Подставляем (4.7) в (4.6), после чего обе части уравнений (4.6) умножаем на $\lambda_n^{-1}p(x-a)\,\pi_n^*(x-a)$ и интегрируем на интервале (a, ∞). В результате использования (4.2) и (4.3) приходим к бесконечным системам

$$\gamma\varphi_n^\pm + \sum_{m=0}^\infty a_{nm}^\pm\varphi_m^\pm + \sum_{m=0}^\infty b_{nm}^\mp\varphi_m^\mp = f_n^\pm \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{4.8}$$

$$\frac{\{a_{nm}^\pm,\ b_{nm}^\mp\}}{\lambda_n^{-1}\sigma_m^{-1}} = \int_0^\infty\int_0^\infty \{d(\pm\xi\mp\eta),\ k(\pm 2a \pm \xi \pm \eta)\}\,\frac{\pi_n^*(\xi)\,\pi_m^*(\eta)\,d\xi\,d\eta}{[p(\xi)\,p(\eta)]^{-1}}$$

$$f_n^\pm = \frac{1}{\lambda_n}\int_0^\infty f^\pm(a+\xi)\,p(\xi)\,\pi_n^*(\xi)\,d\xi$$

Очевидно в случае $d(x) = d(-x)$ бесконечные системы вырождаются в две независимо решаемые системы (одна для четной составляющей $f(x)$, другая для нечетной). Задача об изгибе двух полубесконечных пластинок, лежащих на линейно-деформируемом основании [2], а также некоторые плоские задачи теории трещин сводятся к уравнению (4.1) с ядром, представимым в виде (1.4). Это позволяет в качестве спектрального взять со-

[1] Для сокращения записей предполагается, что сингулярная часть ядерной функции обладает свойством $k_*(x) = k_*(-x)$. В [3] указаны спектральные соотношения на полубесконечном интервале и для несимметричных ядер, поэтому предполагаемый способ применим и в том случае, когда $k_*(x) \neq k_*(-x)$, но тогда придется вводить два семейства π^*-многочленов.

отношение (1.8) и в формулах (4.7) и (4.8) положить

$$p(x)=e^{-x}x^{\mu-1/2},\quad g(x)=e^{-x},\quad \pi_n^*(x)=2^\mu L_n^{\mu-1/2}(2x)$$
$$\sigma_n=\lambda_n=\mu_n,\quad k^*(x)=k_\mu(x) \tag{4.9}$$

При этом коэффициенты бесконечных систем существенно упрощаются и приобретают вид

$$a_{nm}^+=d_{n-m},\quad a_{nm}^-=d_{m-n},\quad b_{nm}^\mp=c_{n+m}^\pm \tag{4.10}$$
$$d_k=\frac{(-1)^k}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{D(t)}{(1+t^2)^{1/2+\mu}}\left(\frac{1-it}{1+it}\right)^k dt$$
$$c_k^\pm=\frac{(-1)^k}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{K(\pm t)e^{-2ait}}{(1+it)^{1+2\mu}}\left(\frac{1-it}{1+it}\right)^k dt$$

Для некоторых частных случаев функций $D(t)$ и $K(t)$ эти интегралы методами контурного интегрирования можно привести к известным специальным функциям [4]. В общем случае наиболее удобным представляется использование метода тригонометрической интерполяции [5,12]. Это эквивалентно аппроксимации, например, функции $D(t)$ в виде ([12], стр. 250)

$$D(t)\approx 2\sum_{l=-N}^{N} d_l^*\left(\frac{1+it}{1-it}\right)^l\frac{(-1)^l}{1-it} \tag{4.11}$$

Формулы для коэффициентов аппроксимации d_l^* приведены в [12,5]. Они выражаются через дискретные значения функции $D(t)$. Использование (4.11) позволяет получить формулу

$$d_k\approx\frac{2^{1-2\mu}\Gamma(2+2\mu)}{(-1)^k(1+2\mu)}\sum_{l=-N}^{N}\frac{(-1)^l d_l^*}{\Gamma(1/2+k-l+\mu)\,\Gamma(3/2+l-k+\mu)}$$

Формулу аналогичной структуры тем же путем можно получить и для коэффициентов $c_k^\pm$. При этом полезно иметь в виду, что в силу (1.6)

$$K(t)=\gamma(1+t^2)^{\mu-1/2}+D(t)$$

Для наиболее часто встречающегося случая $\mu=0$ решение можно выразить через многочлены Эрмита четных номеров [4]. Кроме того, в этом случае можно применить спектральное соотношение (2.4) и решение получить в виде ряда по многочленам Чебышева. Описанный прием легко переносится и на соответствующие уравнения второго рода. При этом отпадает необходимость в спектральном соотношении (см. п. 3) и представляется наиболее естественным использование многочленов Лагерра $L_n(2x)$.

5. В работе [13] парное уравнение

$$\int_0^\infty \xi^{-2\alpha}[1+K(\xi)]\chi(\xi)J_\nu(\xi x)\,d\xi=F(x)\quad(0\leqslant x\leqslant 1) \tag{5.1}$$
$$\int_x^\infty \xi^{-2\beta}\chi(\xi)J_\nu(\xi x)\,d\xi=G(x)\quad(x>1)$$
$$(K(\xi)\to 0,\ \xi\to 0)$$

к которому приводятся многие смешанные задачи теории упругости, сведено к интегральному уравнению

$$\varphi(x)+\int_0^1\varphi(y)\,dy\int_0^\infty K(t)J_\mu(tx)J_\mu(ty)\,dt=f(x) \tag{5.2}$$
$$(0\leqslant x\leqslant 1,\ \mu=\nu+\beta-\alpha)$$

Для сведения этого интегрального уравнения к бесконечной системе будем строить его решение в виде ряда

$$\varphi(x) = x^{\mu} \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m P_m^{\mu,0}(1-2x^2) \tag{5.3}$$

по многочленам Якоби. Использование ортогональности последних

$$\int_0^1 x^{2\mu+1} P_m^{\mu,0}(1-2x^2) P_n^{\mu,0}(1-2x^2)\,dx = \frac{\delta_{mn}}{2(1+\mu+2n)}$$

а также следующего соотношения [10]

$$\int_0^1 \frac{x^{1+\mu}}{(1-x^2)^{\nu}} P_m^{\mu,-\nu}(1-2x^2) J_{\mu}(xy)\,dx = \frac{\Gamma(1-\nu+m)}{2^{\nu} m!\, y^{1-\nu}} J_{\sigma}(y)$$

$$(\operatorname{Re}\mu < -1,\ \operatorname{Re}\nu < 1,\ \sigma = 1-\nu+\alpha+2m)$$

приводит интегральное уравнение (5.2) к бесконечной системе

$$\frac{\varphi_n}{2(1+\mu+2n)} + \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm}\varphi_m = f_n$$

$$a_{nm} = \int_0^{\infty} t^{-1} K(t) J_{1+\mu+2n}(t) J_{1+\mu+2m}(t)\,dt \tag{5.4}$$

$$f_n = \int_0^1 x^{\mu+1} f(x) P_n^{\mu,0}(1-2x^2)\,dx$$

В случае $\mu = 0$ решение получаем в виде ряда по многочленам Лежандра.

Поступила 10 X II 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов Г. Я. Об интегральных уравнениях теории упругости с разностными и суммационными ядрами. ПММ, 1970, т. 34, вып. 4.
2. Попов Г. Я. Изгиб полубесконечной плиты, лежащей на линейно-деформируемом основании, ПММ, 1961, т. 25, вып. 2.
3. Попов Г. Я. О методе ортогональных многочленов в контактных задачах теории упругости. ПММ, 1969, т. 33, вып. 3.
4. Попов Г. Я. Об одном приближенном способе решения интегрального уравнения дифракции электромагнитных волн на полосе конечной ширины. Ж. техн. физ., 1965, т. 35, вып. 3.
5. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. М., Физматгиз, 1961.
6. Крейн М. Г. Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов. Успехи матем. наук, 1958, т. 13, вып. 5.
7. Гохберг И. Ц., Фельдман И. А. Проекционные методы решения уравнений Винера — Хопфа. Кишенев, Изд-во АН МолдССР, 1967.
8. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
9. Лутченко С. А., Попов Г. Я. О некоторых плоских контактных задачах теории упругости для клина. Прикл. механ. 1970, т. 6, вып. 3.
10. Попов Г. Я. О применимости многочленов Якоби к решению интегральных уравнений. Изв. вузов, Математика, 1966, № 4.
11. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. М.— Л., Гостехиздат, 1950.
12. Иванов В. В. Теория приближенных методов и ее применения к численному решению сингулярных интегральных уравнений. Киев, «Наукова думка», 1968.
13. Erdelyi A., Sneddon J. Fractional integration and dual integral equations, Canad. J. Math., 1962, 14, 685—693.