Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 539.3

ПРИБЛИЖЕННОЕ СВЕДЕНИЕ К УРАВНЕНИЯМ ГЕЛЬМГОЛЬЦА УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

И. В. Мухина

(Ленинград)

Рассматриваются векторные уравнения динамической теории упругости и электродинамики, описывающие упругие и электромагнитные колебания в соответствующих произвольно неоднородных изотропных средах. Параметры Ламе и плотность для упругой среды, а также диэлектрическая и магнитная проницаемости предполагаются непрерывно дифференцируемыми функциями координат. В обоих случаях частота колебаний считается большим параметром. Показано, что в нулевом приближении по частоте колебаний уравнение теории упругости разделяется на два скалярных уравнения Гельмгольца отдельно для продольного и поперечного потенциалов, а уравнения Максвелла сводятся к уравнению Гельмгольца для векторного потенциала.

1. В произвольно неоднородной изотропной упругой среде, где параметры Ламе λ, μ и плотность среды ρ — непрерывно дифференцируемые функции координат, колебания описываются уравнением динамической теории упругости

$$Lu = (\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} + \operatorname{grad} (\lambda + \mu) \operatorname{div} \mathbf{u} + \\ + \operatorname{rot} (\mathbf{u} \times \operatorname{grad} \mu) + \operatorname{grad} (\operatorname{grad} \mu \mathbf{u}) - \mathbf{u} \Delta \mu + \rho \omega^2 \mathbf{u} = 0 \qquad (1.1)$$

При постоянных λ, μ и ρ уравнение (1.1) распадается на два скалярных уравнения Гельмгольца, одно из которых описывает продольные, другое — поперечные колебания, распространяющиеся со скоростями $v_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ и $v_s = \sqrt{\mu / \rho}$ соответственно. В общем случае произвольной зависимости λ, μ и ρ от координат уравнение (1.1) не разделяется [1].

Пусть ω — большой параметр по отношению ко всем другим величинам той же размерности, например, $\omega \gg |\nabla v_p|$. Тогда решение уравнения (1.1) имеет вид

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) = e^{i\omega\tau(\mathbf{x})} \mathbf{Q}(\mathbf{x}, \omega) \qquad (1.2)$$

где $e^{i\omega\tau(\mathbf{x})}$ — наиболее быстро меняющийся множитель в том смысле, что

$$|\nabla e^{i\omega\tau(\mathbf{x})}| \gg |\nabla \mathbf{Q}(\mathbf{x}, \omega)|$$

Для функций вида (1.2) операция дифференцирования с точностью до множителя эквивалентна операции умножения на ω. Для таких функций разделение уравнения (1.1) на скалярные уравнения Гельмгольца оказывается возможным с точностью до поправочных членов, бесконечно малых при $\omega \to \infty$.

---

[1] Для радиально неоднородной среды разделение уравнения (1.1) удается достигнуть [1] путем введения сложных и искусственных предположений относительно изменения λ, μ и ρ.

Поле упругих волн есть сумма продольного $\mathbf{u}_p$ и поперечного $\mathbf{u}_s$ полей: $\mathbf{u} = \mathbf{u}_p + \mathbf{u}_s$. Введем продольный и поперечный потенциалы φ и ψ следующим образом (подсказанным соответствующими формулами работы [1]):

$$\mathbf{u}_p = \operatorname{grad}\varphi + \mathbf{Y}\varphi, \qquad \mathbf{u}_s = \operatorname{rot}(\psi\mathbf{f}) + \mathbf{Z}\psi \tag{1.3}$$

Здесь $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{f}$ — пока произвольные векторы, зависящие только от $\mathbf{x}$, а φ и ψ — скалярные функции, вид которых аналогичен (1.2). В соответствии со сказанным выше, операция ∇, примененная к скалярным или векторным функциям q типа (1.2), увеличивает порядок их абсолютной величины по ω на единицу, т. е. $\nabla q = O(\omega q)$. Следовательно, вторые слагаемые в (1.3) имеют поправочный характер по сравнению с первыми.

Ввиду линейности оператора L подействуем им отдельно на функцию $\mathbf{u}_p$, представленную первой формулой (1.3), затем выделим в двух главных членах оператор Гельмгольца и потребуем, чтобы оставшиеся члены порядка, не меньшего $O(\nabla^2\varphi)$, исчезли. Тогда для вектора $\mathbf{Y}$ получится выражение

$$\mathbf{Y} = \frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\frac{\nabla\rho}{\rho} - \frac{2\nabla\mu}{\lambda+\mu} \tag{1.4}$$

а $L\mathbf{u}_p$ перейдет в

$$L(\nabla\varphi + \mathbf{Y}\varphi) = \frac{\lambda+2\mu}{\sqrt{\rho}}(\nabla + \boldsymbol{\Phi})(\Delta\varphi^\circ + \omega^2 n_p^2\varphi^\circ) + o(\nabla^2\varphi) \tag{1.5}$$

$$\varphi^\circ = \varphi\sqrt{\rho}, \quad \boldsymbol{\Phi} = \frac{\nabla\lambda}{\lambda+2\mu} - \frac{2\mu\nabla\mu}{(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)} - \frac{\lambda-\mu}{\lambda+\mu}\frac{\nabla\rho}{\rho}, \quad n_p = \frac{1}{v_p}$$

Здесь n_p — показатель преломления продольных волн и под $o(\nabla^2\varphi)$ подразумеваются члены, меньшие $|\nabla^2\varphi|$, или, что то же самое, меньшие $\omega^2|\varphi|$. Таким образом, если уравнение Гельмгольца для φ° решено с точностью $o(\nabla\varphi)$ (этого достаточно для получения первого члена асимптотического ряда), то выражение (1.5) имеет порядок $o(\nabla^2\varphi)$.

Подставим теперь вторую формулу (1.3) в выражение $L\mathbf{u}_s$, выделим в главных членах оператор Гельмгольца и потребуем обращения в нуль оставшихся членов порядка не меньше $O(\nabla^2\psi)$. Получим

$$\mathbf{Z} = \mathbf{z}\times\mathbf{f}, \qquad \mathbf{z} = \frac{2\nabla\mu}{\lambda+\mu} - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{\nabla\rho}{\rho} \tag{1.6}$$

$$\operatorname{rot}(\nabla\psi\times\mathbf{f}) + \frac{\nabla n_s}{n_s}\times(\mathbf{f}\nabla)\nabla\psi = o(\nabla^2\psi) \tag{1.7}$$

При этом $L\mathbf{u}_s$ запишется следующим образом:

$$L[\operatorname{rot}(\psi\mathbf{f}) + \mathbf{Z}\psi] = \frac{\mu}{\sqrt{\rho}}\{\nabla(\Delta\psi^\circ + \omega^2 n_s^2\psi^\circ)\times\mathbf{f} + \\ + \boldsymbol{\Psi}(\Delta\psi^\circ + \omega^2 n_s^2\psi^\circ)\} + o(\nabla^2\psi)$$

$$\psi^\circ = \psi\sqrt{\rho}, \quad \boldsymbol{\Psi} = \operatorname{rot}\mathbf{f} + \frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}\frac{\nabla\mu}{\mu} - \frac{3\lambda+5\mu}{2(\lambda+\mu)}\frac{\nabla\rho}{\rho}, \quad n_s = \frac{1}{v_s} \tag{1.8}$$

Здесь $o(\nabla^2\psi)$ имеет тот же смысл, что и в формуле (1.5). Если ψ° — решение уравнения Гельмгольца в нулевом приближении, выражение (1.8) имеет порядок $o(\nabla^2\psi)$.

Подставляя выражения (1.5) и (1.8) в уравнение (1.1), получим

$$\frac{\lambda+2\mu}{\sqrt{\rho}}(\nabla+\Phi)(\Delta\varphi^\circ+\omega^2 n_p{}^2\varphi^\circ)+\frac{\mu}{\sqrt{\rho}}\{\nabla(\Delta\psi^\circ+\omega^2 n_s{}^2\psi^\circ)\times\mathbf{f}+$$
$$+\Psi(\Delta\psi^\circ+\omega^2 n_s{}^2\psi^\circ)\}+o(\nabla^2\varphi)+o(\nabla^2\psi)=0 \qquad (1.9)$$

Если φ° и ψ° — решения соответствующих уравнений Гельмгольца с точностью $o(\nabla\varphi)$ и $o(\nabla\psi)$, то уравнение (1.9) удовлетворяется с точностью $o(\nabla^2\varphi)+o(\nabla^2\psi)$. При этом уравнение (1.1) удовлетворяется с точностью $o(\Delta\mathbf{u})$ и, следовательно, $\mathbf{u}=\nabla\varphi+\mathrm{rot}(\psi\mathbf{f})$ дает нулевое приближение решения уравнения динамической теории упругости.

Таким образом, векторное уравнение (1.1) сводится к двум уравнениям Гельмгольца

$$\Delta\varphi^\circ+\omega^2 n_p{}^2\varphi^\circ=0, \qquad \Delta\psi^\circ+\omega^2 n_s{}^2\psi^\circ=0 \qquad (1.10)$$

решения которых, подставленные в формулы (1.3), дают решение уравнения (1.1) в нулевом приближении.

Следует заметить, что вторые слагаемые в (1.3) являются поправочными и не дают вклада в нулевое приближение поля $\mathbf{u}$, хотя и играют существенную роль при переходе от уравнения (1.1) к уравнению (1.9).

Если интерес представляет лучевое решение уравнения (1.1), т. е. $Q(\mathbf{x},\omega)$ — ряд по обратным степеням параметра ω, то поле $\mathbf{u}$ определяется формулой

$$\mathbf{u}=[\nabla\varphi+\mathrm{rot}(\psi\mathbf{f})]\left[1+O\left(\frac{1}{\omega}\right)\right] \qquad (1.11)$$

где φ и ψ — лучевые решения уравнения (1.10).

Для поля в тени также справедлива формула (1.11), в которой $O(1/\omega)$ заменено на $O(1/\omega^{1/3})$, а φ и ψ — решения уравнений (1.10) в области тени.

Выясним, каким должен быть вектор $\mathbf{f}$, чтобы уравнение (1.7) было удовлетворено. Пусть ψ имеет вид

$$\psi(\mathbf{x},\omega)=e^{i\omega\tau_s(\mathbf{x})}\psi_1(\mathbf{x},\omega)$$

где $\psi_1(\mathbf{x},\omega)$ — медленно меняющаяся функция, а $\tau_s(\mathbf{x})$ — эйконал поперечной волны, т. е. справедливо уравнение $(\nabla\tau_s)^2=n_s{}^2$. Тогда

$$\nabla\psi=i\omega\nabla\tau_s\psi+o(\nabla\psi)$$

и уравнение (1.7) переходит в следующее:

$$\nabla\tau_s\times(\nabla\tau_s\nabla)\mathbf{f}+(\mathbf{f}\nabla\tau_s)\frac{\nabla n_s}{n_s}\times\nabla\tau_s=0 \qquad (1.12)$$

Уравнению (1.14) удовлетворяет вектор $\mathbf{f}$, записанный в локальной системе координат, связанной с лучом

$$\mathbf{f}=a_f\nabla\tau_s+\sin\theta\mathbf{n}-\cos\theta\mathbf{b} \qquad (1.13)$$

где a_f — произвольный коэффициент, θ — угол, характеризующий кручение луча, $\mathbf{n}$ — нормаль и $\mathbf{b}$ — бинормаль к лучу в данной точке

Подставив выражение (1.15) во второе соотношение (1.3), получим

$$\mathbf{u}_s = i\omega n_s \psi (\cos\theta \mathbf{n} + \sin\theta \mathbf{b}) + o(\omega\psi) \tag{1.14}$$

т. е. в нулевом приближении поле поперечной волны должно быть поляризовано в плоскости, перпендикулярной направлению распространения, что соответствует лучевой формуле [2].

Пример применения данного подхода к решению задачи дифракции на гладкой границе двух произвольно неоднородных упругих сред приведен в [3].

2. Рассмотрим уравнения Максвелла для неоднородной и изотропной среды

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = -\frac{i\omega}{c}\varepsilon\mathbf{E}, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{E} = \frac{i\omega}{c}\mu\mathbf{H} \tag{2.1}$$

$$\operatorname{div}\mu\mathbf{H} = 0, \qquad \operatorname{div}\varepsilon\mathbf{E} = 0 \tag{2.2}$$

где $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{x})$ и $\mu = \mu(\mathbf{x})$ — диэлектрическая и магнитная проницаемости. Из уравнений (2.1) легко получить одно уравнение, например для вектора магнитной напряженности

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu\mathbf{H} + \frac{1}{\varepsilon}\nabla\varepsilon \times \operatorname{rot}\mathbf{H} \tag{2.3}$$

При постоянных ε и μ уравнение (2.3) переходит в уравнение Гельмгольца, что не имеет места, если ε и μ — произвольные функции координат. Однако и в последнем случае, если считать ω большим параметром и искать решение в виде (1.2), можно в нулевом приближении свести уравнение (2.3) к уравнению Гельмгольца.

Пусть

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot}\frac{\mathbf{A}}{\sqrt{\mu}} + \frac{1}{\sqrt{\mu}}\mathbf{C}\times\mathbf{A} \tag{2.4}$$

где векторный потенциал $\mathbf{A}$ — функция вида (1.2), а $\mathbf{C}$ — пока произвольный вектор. Подставим (2.4) в уравнение (2.3), выделим в первых двух членах оператор Гельмгольца в применении к вектору $\mathbf{A}$ и потребуем, чтобы оставшиеся члены порядка не меньше $O(\nabla^2\mathbf{A})$ обратились в нуль. Тогда получаем $\mathbf{C} = \nabla\mu / \mu$ и уравнение для потенциала

$$\frac{\nabla n}{n}\times\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} = o(\nabla^2\mathbf{A}) \tag{2.5}$$

В результате уравнение (2.3) переходит в следующее:

$$\operatorname{rot}(\Delta\mathbf{A} + \omega^2 n^2\mathbf{A}) - \left(\frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{1}{2}\frac{\nabla\mu}{\mu}\right)\times(\Delta\mathbf{A} + \omega^2 n^2\mathbf{A}) + o(\nabla^2\mathbf{A}) = 0 \tag{2.6}$$

где $n = \sqrt{\varepsilon\mu} / c$ — показатель преломления.

Если потенциал $\mathbf{A}$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца с точностью $o(\nabla\mathbf{A})$ (что обеспечивает получение первого члена асимптотического ряда), уравнение (2.6) удовлетворяется с точностью $o(\nabla^2\mathbf{A})$. Отсюда следует, что $\mathbf{H} = \mu^{-1/2}\operatorname{rot}\mathbf{A}$ удовлетворяет уравнению (2.3) с точностью $o(\nabla\mathbf{H})$ и дает нулевое приближение решения.

Как и в п. 1, второе слагаемое в (2.4) носит поправочный характер и не дает вклада в нулевое приближение.

Уравнение (2.5) удовлетворяется, если векторный потенциал имеет вид (1.2), где $\tau(x)$ — эйконал электромагнитной волны и вектор $\mathbf{Q}$ в нулевом приближении поляризован в плоскости, перпендикулярной направлению распространения.

Заметим, что если в первое из уравнений (2.2) подставить $\mathbf{H}$ в виде (2.4), где $\mathbf{C} = \nabla\mu / \mu$, оно удовлетворяется тождественно.

Уравнение (2.3) можно свести также к уравнению Гельмгольца для скалярного потенциала, если считать, что в формуле (2.4) $\mathbf{A} = \psi\mathbf{f}$. В этом случае оператор (2.3) переходит в (1.8), где $\psi^\circ = \sqrt{\mu}\psi$, $\Psi = \operatorname{rot} f - \nabla\varepsilon / \varepsilon - {}^1/_2\nabla\mu/\mu$ и в операторе Гельмгольца вместо n_s стоит n — показатель преломления электромагнитной волны. Для вектора $\mathbf{f}$ получается уравнение (1.7), которое решается так же, как и в случае поперечной упругой волны.

С другой стороны, для поля $\mathbf{u}_s$ можно ввести вместо скалярного потенциала векторный при помощи формулы, аналогичной (2.4), и дальнейшее рассмотрение проводить так же, как для электромагнитных волн. В результате приходим к уравнению Гельмгольца для поперечного векторного потенциала.

Заметим в заключение, что, по-видимому, и другие линейные уравнения математической физики, такие как уравнения магнитной гидродинамики и магнитоупругости, в нулевом приближении можно свести к уравнениям Гельмгольца.

Автор благодарит И. А. Молоткова за ценные обсуждения.

Поступила 10 XI 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Singh Sarva Jit, Ben-Menahem Ari. Decoupling of the vector wave equation of elasticity for radially heterogeneous media. J. Acoust. Soc. Amer., 1969, vol. 46 № 3, pt. 2, p. 655—660.
2. Бабич В. М., Алексеев А. С. О лучевом методе вычисления интенсивности волновых фронтов. Изв. АН СССР. Сер. геофиз., 1958, № 1.
3. Мухина И. В. Дифракция на гладкой границе двух неоднородных упругих сред. Зап. научн. семинаров ЛОМИ АН СССР., т. 25, Л., «Наука», 1972.