Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 536.46:533.6

К АНАЛИЗУ ЗАДАЧИ О ТЕПЛОВОМ РАСПРОСТРАНЕНИИ ПЛАМЕНИ МЕТОДОМ СРАЩИВАЕМЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ

В. С. Берман, Ю. С. Рязанцев

(Москва)

Методом сращиваемых асимптотических разложений определяются два приближения для скорости стационарного теплового распространения фронта пламени в гомогенной газообразной горючей смеси. Предполагается, что коэффициенты теплопроводности и диффузии и плотность среды являются функциями температуры и концентрации реагирующего вещества в газе. Устанавливается аналитическая зависимость скорости пламени от значений градиентов этих функций на горячей границе зоны горения. Из полученного выражения для скорости пламени в виде частных случаев следуют формулы, установленные в работах [1,2].

1. Уравнения и граничные условия. В движущейся со скоростью пламени системе координат уравнения стационарного теплового распространения пламени в гомогенной газовой смеси при ряде упрощающих предположений могут быть записаны в виде

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\lambda}{c}\frac{dT}{dx}\right) - m\frac{dT}{dx} + \frac{h}{c}a^n\rho^n\Phi(T) = 0 \tag{1.1}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\rho D\frac{da}{dx}\right) - m\frac{da}{dx} - a^n\rho^n\Phi(T) = 0 \tag{1.2}$$

$$x = -\infty, \quad T = T_-, \quad a = a_-; \quad x = \infty, \quad \frac{dT}{dx} = a = 0 \tag{1.3}$$

Здесь T — температура, a — концентрация реагирующего вещества, m — массовая скорость распространения пламени, являющаяся собственным значением задачи (1.1) — (1.3), $c = \text{const}$ — теплоемкость газа, $\rho = \rho(T, a)$ — плотность газа, n — порядок реакции, $D = D(T, a)$ — коэффициент диффузии, $\lambda = \lambda(T, a)$ — коэффициент теплопроводности, $\Phi(T)$ — зависимость скорости химической реакции от температуры, T_- — начальная температура газа, a_- — начальная концентрация, $h = \text{const}$ — тепловой эффект реакции.

Система уравнений (1.1), (1.2) имеет первый интеграл

$$\frac{\lambda}{c}\frac{dT}{dx} + \frac{h}{c}\rho D\frac{da}{dx} - m\left(T + \frac{ha}{c}\right) = \text{const} \tag{1.4}$$

Из (1.4) и условий $(dT / dx)_{\pm\infty} = (da / dx)_{\pm\infty} = 0$, следующих из (1.2), находим

$$\frac{h}{c}\rho D\frac{da}{dx} = m\left(T + \frac{ha}{c} - T_+\right) - \frac{\lambda}{c}\frac{dT}{dx}, \quad T_+ = T_- + \frac{ha_-}{c} \tag{1.5}$$

Индексами «минус» и «плюс» будут обозначаться величины на холодной и горячей границах зоны горения.

В уравнениях (1.1), (1.5), эквивалентных системе уравнений (1.1), (1.2), введем безразмерные переменные

$$\tau = (T - T_-) / (T_+ - T_-), \qquad y = (a_- - a) / a_-$$

и перейдем от независимой переменной x к независимой переменной τ и новой неизвестной функции

$$P = \frac{\lambda}{c} \frac{d\tau}{dx}$$

Вместо (1.1), (1.5), (1.3) получим

$$P \frac{dP}{d\tau} - mP + \frac{\lambda}{c} \rho^n a_-^{n-1} (1 - y)^n \Phi(\tau) = 0 \qquad (1.6)$$

$$\frac{dy}{d\tau} = LNm \frac{y - \tau}{P} + LN, \quad L = \frac{\lambda_+}{D_+ \rho_+ c}, \quad N(\tau, y) = \frac{\lambda}{DL\rho c} \qquad (1.7)$$

$$\tau = 0, \quad P = 0, \quad y = 0; \quad \tau = 1, \quad P = 0, \quad y = 1 \qquad (1.8)$$

Конкретизируем вид функции $\Phi(T)$, полагая, что скорость химической реакции зависит от температуры по закону Аррениуса

$$\Phi(T) = A \exp \frac{-E}{RT} \qquad (1.9)$$

Здесь E — энергия активации, R — газовая постоянная, A — частотный фактор. С учетом (1.9) уравнение (1.6) может быть записано в виде

$$P \frac{dP}{d\tau} - mP + e^{-\beta} K(\tau, y) (1 - y)^n \exp \frac{-\beta(1 - \tau)}{\tau + \sigma} = 0 \qquad (1.10)$$

$$K(\tau, y) = \frac{a_-^{n-1} \rho}{c} \lambda A, \qquad \sigma = \frac{T_- c}{h a_-}, \qquad \beta = \frac{E}{RT_+}$$

Пусть

$$q = P \exp \beta/2, \qquad M = m \exp \beta/2$$

Тогда задача (1.6) — (1.8) примет вид

$$q \frac{dq}{d\tau} - Mq + K(\tau, y) (1 - y)^n \exp \frac{-\beta(1 - \tau)}{\tau + \sigma} = 0 \qquad (1.11)$$

$$\frac{dy}{d\tau} = LN(\tau, y) M \frac{y - \tau}{q} + LN(\tau, y) \qquad (1.12)$$

$$\tau = 0, \qquad q = y = 0 \qquad (1.13)$$

$$\tau = 1, \qquad q = 0, \qquad y = 1 \qquad (1.14)$$

Отметим, что краевая задача в форме (1.11) — (1.14) не имеет решения, так как функция (1.9) не обращается в нуль при $T = T_-$ (так называемая трудность, связанная с холодной границей [1, 3]). В теории теплового распространения пламени обычно предполагается, что зависимость скорости горения от температуры имеет вид (1.9) везде, кроме некоторого интервала температур $T_0 \leqslant T \leqslant T^\circ < T_+$, в котором $\Phi(T) = 0$. Это обеспечивает существование решения задачи (1.11) — (1.14) [1, 4]. В данной работе будет использоваться приближенная форма уравнений (1.11), (1.12), в которой трудность, связанная с холодной границей, устраняется автоматически.

2. Метод решения. Уравнение (1.11) содержит безразмерный параметр β, который обычно значительно больше единицы. Типичными являются значения $\beta \sim 10$. Это позволяет получить приближенное решение задачи методом сращивания асимптотических разложений [5]. Из вида уравнений (1.11), (1.12) следует, что интервал изменения переменной $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ может быть разбит на две области. В первой области, примыкающей к $\tau = 0$ и составляющей основную часть интервала (внешняя область), третий член в уравнениях (1.11) существенно меньше остальных членов из-за наличия экспоненциально убывающего множителя с показателем экспоненты, по порядку величины равным β. Во второй области, примыкающей к $\tau = 1$ (внутренняя область), большая величина β в показателе экспоненты компенсируется малостью величины $(1 - \tau)$, поэтому третий член в (1.11) становится существенным. Чтобы выявить порядки величин отдельных членов в уравнениях (1.11), (1.12) во внутренней области, введем переменную $\tau_* = \beta(1 - \tau)$. Вместо (1.11), (1.12), (1.14) получим

$$q\frac{dq}{d\tau} + \beta^{-1}Mq - \beta^{-1}(1-y)^n K(1-\beta^{-1}\tau_*, y)\exp\frac{-\tau_*}{\sigma+1-\beta^{-1}\tau_*} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{dy}{d\tau_*} = \beta^{-1}LN(1-\beta^{-1}\tau_*, y)\left[\frac{M}{q}(1-\beta^{-1}\tau_* - y) - 1\right] \quad (2.2)$$

$$\tau_* = 0, \quad q = 0, \quad y = 1 \quad (2.3)$$

Решение задачи во внешней и внутренней областях будем искать в виде разложений по степеням малого параметра β^{-1}.

Во внутренней области

$$q_*(\tau_*) = G_0(\beta)q_0(\tau_*) + G_1(\beta)\, q_1(\tau_*) + \ldots \quad (2.4)$$
$$y_*(\tau_*) = F_0(\beta)y_0(\tau_*) + F_1(\beta)y_1(\tau_*) + F_2(\beta)\, q_2(\tau_*) + \ldots$$

Во внешней области

$$q^*\ (\tau) = g_0(\beta)q^{(0)}(\tau) + g_1(\beta)q^{(1)}(\tau) + \ldots \quad (2.5)$$
$$y^*(\tau) = f_0(\beta)y^{(0)}(\tau) + f_1(\beta)y^{(1)}(\tau) + f_2(\beta)y^{(2)}(\tau) + \ldots$$

Разложение для собственного значения задачи M будет одинаковым в обеих зонах

$$M = \alpha_0(\beta)M_0 + \alpha_1(\beta)M_1 + \ldots \quad (2.6)$$

Зависящие от β коэффициенты в разложениях (2.4) — (2.6) при $\beta \to \infty$ должны удовлетворять условиям

$$\frac{G_{i+1}}{G_i} \to 0, \quad \frac{F_{i+1}}{F_i} \to 0, \quad \frac{g_{i+1}}{g_i} \to 0, \quad \frac{f_{i+1}}{f_i} \to 0, \quad \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} \to 0 \quad (i = 0, 1, 2, \ldots) \quad (2.7)$$

Функции $q_i(\tau_*)$, $y_i(\tau_*)$ будут последовательно определяться из уравнений (2.1), (2.2) и граничного условия (2.3), а функции $q^{(i)}(\tau)$ и $y^{(i)}(\tau)$ — из уравнений (1.11), (1.12) и граничного условия (1.13). Остающиеся при этом неопределенными произвольные константы и члены ряда (2.6) для собственного значения задачи M будут находиться из условия сращивания внутренних (2.4) и внешних (2.5) разложений. Процедура сращивания заключается в требовании совпадения соответствующих членов асимптотических разложений $q_*(\tau_*)$, $y_*(\tau_*)$ при $\tau_* \to \infty$ и асимптотических разложений $q^*(\tau)$, $y^*(\tau)$ при $\tau \to 1$. Вид коэффициентов G_i, F_i, g_i, f_i, α_i определяется из граничных условий и условия сращивания. При анализе предполагается, что функции $K(\tau, y)$, $N(\tau, y)$ и их производные по τ и y являются непрерывными ограниченными функциями, и также, как и величины L, n, по порядку величины равны единице.

3. Нулевое приближение для скорости распространения племени. Подставим разложения (2.5), (2.6) в уравнение (1.11). Так как при $\beta \to \infty$ выполняются соотношения

$$\exp(-\beta) / f_i(\beta) \to 0, \qquad \exp(-\beta) / g_i(\beta) \to 0,$$
$$\exp(-\beta) / \alpha_i(\beta) \to 0$$

приближенное уравнение для q во внешней области можно записать в виде

$$q^* \, dq^*/d\tau - Mq^* = 0 \tag{3.1}$$

Из двух решений уравнения (3.1), удовлетворяющих условию (1.13), в соответствии с физическим смыслом задачи выберем решение

$$q^* = M\tau \tag{3.2}$$

Из (3.2) следует, что

$$\alpha_0(\beta) = g_0(\beta), \qquad \alpha_1(\beta) = g_1(\beta), \ldots \tag{3.3}$$
$$q^{(0)}(\tau) = M_0\tau, \qquad q^{(1)}(\tau) = M_1\tau, \ldots$$

Подставив (3.2) в (1.12), найдем приближенное уравнение для функции $y(\tau)$ во внешней области

$$\frac{dy^*}{d\tau} = LN(\tau, y^*) \frac{y^*}{\tau} \tag{3.4}$$

Подставив (2.5) в (3.4) и отбросив члены, порядок величины которых больше, чем $f_0(\beta)$, получим уравнение для $y^{(0)}(\tau)$

$$\frac{dy^{(0)}}{d\tau} = LN(\tau, f_0 y^{(0)}) \frac{y^{(0)}}{\tau} \tag{3.5}$$

Уравнение (3.5) определяет в нулевом приближении распределение концентрации вблизи холодной границы зоны горения и имеет ограниченные решения $y^{(0)}(\tau)$ в интервале $0 \leqslant \tau < 1$. Точка $\tau = 0, y = 0$ является особой типа узла, поэтому граничного условия (1.13) недостаточно для отбора единственного решения уравнения (3.5).

Воспользовавшись (3.3) и (3.5), представим одночленные внешние разложения $g_0(\beta)\, q^{(0)}(\tau)$ и $f_0(\beta)\, y^{(0)}(\tau)$ при $\tau \to 1$ как функции внутренней переменной τ_*

$$g_0 q^{(0)}(\tau) = g_0 M_0 \tau = g_0 M_0 - \beta^{-1} g_0 M_0 \tau_* \tag{3.6}$$
$$f_0 y^{(0)}(\tau) = f_0 y^{(0)}(1) - \beta^{-1} f_0 L y^{(0)}_{(1)} \tau_* + \ldots$$

Из условия сращивания (3.6) с внутренними разложениями можно заключить, что

$$G_0(\beta) = g_0(\beta) = \alpha_0(\beta), \quad F_0(\beta) = f_0(\beta), \quad G_1(\beta) = \beta^{-1}g_0(\beta), \quad F_1(\beta) = \beta^{-1}f_0(\beta) \tag{3.7}$$

Из граничного условия (2.3) следует, что

$$F_0(\beta) = 1 \tag{3.8}$$

Подставив разложения (2.4) в уравнение (2.2) и сгруппировав члены одинакового порядка малости с учетом (3.7), (3.8), получим

$$dy_0/d\tau_* = 0, \quad dy_1/d\tau_* = -L \tag{3.9}$$

Решения уравнений (3.9), удовлетворяющие условию (2.3), имеют вид

$$y_0(\tau_*) = 1, \quad y_1(\tau_*) = -L\tau_* \tag{3.10}$$

Подставив разложения (2.4) в уравнение (2.1), с учетом (3.7), (3.8), (3.10) для членов минимального порядка по β^{-1} получим уравнение

$$G_0^2(\beta)\, q_0 \frac{dq_0}{d\tau_*} = \beta^{-(n+1)} L^n K_+ \tau_*^{\,n} \exp \frac{-\tau_*}{\sigma+1} \tag{3.11}$$

Из (3.11) следует, что

$$G_0(\beta) = \beta^{-n+1/2} \tag{3.12}$$

Решение уравнения (3.11), удовлетворяющее граничному условию (2.3), имеет вид

$$q_0^2(\tau_*) = 2L^n K_+ (\sigma+1)^{n+1} \gamma\left(n+1, \frac{\tau_*}{\sigma+1}\right) \tag{3.13}$$

$$\gamma(n, z) = \Gamma(n) - \Gamma(n, z), \qquad \Gamma(n, z) = \int_z^\infty t^{n-1} e^{-t}\, dt$$

$$\Gamma(n, 0) \equiv \Gamma(n)$$

Из условия сращивания нулевых членов внешнего и внутреннего разложений функции $q(\tau)$, определяемых соответственно формулами (3.3) и (3.13), находим нулевой член разложения собственного значения задачи

$$M_0^2 = 2L^n K_+ (\sigma+1)^{n+1}\, \Gamma(n+1) \tag{3.14}$$

В размерных переменных нулевое приближение для массовой скорости распространения фронта горения имеет вид

$$m_0 = \left[2L^n \Gamma(n+1) \frac{\lambda}{c} \rho_+^{\,n} a_-^{n-1} A \left(\frac{T_+}{T_+ - T_-}\right)^{n+1} \left(\frac{E}{RT_+}\right)^{-(n+1)} \exp \frac{-E}{RT_+}\right]^{1/2} \tag{3.15}$$

При $L = 1$ формула (3.15) совпадает с формулой для скорости горения, установленной Я. Б. Зельдовичем и Д. А. Франк-Каменецким [1].

4. Первое приближение для скорости распространения пламени. Для определения второго члена в разложении (2.6) необходимо найти коэффициенты $\alpha_1(\beta) = g_1(\beta)$, $f_1(\beta)$, $G_1(\beta)$, $g_1(\beta)$, $F_2(\beta)$ и функции $q_1(\tau)$,

$q^{(1)}(\tau_*)$, $y^{(1)}(\tau)$, $y_2(\tau_*)$. Из (3.7) и (3.12) следует, что

$$G_1(\beta) = \beta^{-(n+3)/2} \qquad (4.1)$$

Двучленное внутреннее разложение $y(\tau_*)$ в соответствии с (3.10) имеет вид

$$y(\tau_*) = 1 - \beta^{-1} L\tau_* \qquad (4.2)$$

Функция (4.2) полностью сращивается с двучленным разложением функции $y^{(0)}(\tau)$, формула (3.6), если учесть (3.7), (3.8) и положить $y^{(0)}(1) = 1$. Из условия сращивания (4.2) и $y^{(0)}(\tau)$ следует, что разложение $y(\tau)$ во внешней области не будет содержать членов порядка β^{-1}. Следует положить

$$f_1(\beta) = \beta^{-2}, \qquad y(\tau) = y^{(0)}(\tau) + \beta^{-2} y^{(1)}(\tau) \qquad (4.3)$$

При этом разложение (4.3) при $\tau \to 1$, записанное как функция внутренней переменной τ_*, имеет вид

$$y^*(\tau) = 1 - \beta^{-1} L\tau_* + \beta^{-2} L \left[\left(\frac{\partial N}{\partial \tau} \right)_+ + L \left(\frac{\partial N}{\partial y} \right)_+ + L - 1 \right] \frac{\tau_*^2}{2} + \\ + \beta^{-2} y^{(1)}(1) + \ldots \qquad (4.4)$$

Здесь величина $y^{(1)}(1)$ аналогично величине $y^{(0)}(1)$ в формуле (3.6) должна определяться при сращивании внешнего и внутреннего разложений.

В соответствии с (4.4) положим

$$F_2(\beta) = \beta^{-2} \qquad (4.5)$$

Подставив разложения (2.4) в уравнение (2.2) с учетом (3.7), (3.8), (3.10), (3.12 — 3.14), (4.5) и сгруппировав члены порядка β^{-2}, получим

$$\frac{dy_2}{d\tau_*} = L(L-1)\,\Gamma^{1/2}(n+1)\,\gamma^{-1/2}\left(n+1, \frac{\tau_*}{\sigma+1}\right)\tau_* + \\ + L\left[\left(\frac{\partial N}{\partial \tau} \right)_+ + L \left(\frac{\partial N}{\partial y} \right)_+ \right] \frac{\tau_*^2}{2} \qquad (4.6)$$

Решение уравнения (4.6), удовлетворяющее граничному условию (2.3) имеет вид

$$y_2(\tau_*) = L(L-1)(\sigma+1)^2\,\Gamma^{1/2}(n+1) \int\limits_0^{(\sigma+1)^{-1}\tau_*} \gamma^{-1/2}(n+1, z)\, z\, dz + \\ + L\left[\left(\frac{\partial N}{\partial \tau} \right)_+ + L \left(\frac{\partial N}{\partial y} \right)_+ \right] \frac{\tau_*^2}{2} \qquad (4.7)$$

Воспользовавшись (4.7), из условия сращивания $y(\tau_*) = 1 - \beta^{-1} L\tau_* + \beta^{-2} y_2(\tau_*)$ с (4.4) найдем

$$y^{(1)}(1) = L(L-1)(\sigma+1)^2 \int\limits_0^{\infty} [\Gamma^{1/2}(n+1)\,\gamma^{-1/2}(n+1, z) - 1]\, z\, dz \qquad (4.8)$$

Условие (4.8), как и условие $y^{(0)}(1) = 1$, определяет единственное решение задачи (3.4), (1.13).

После подстановки разложений (2.4) в уравнение (2.1) и отбора членов одинакового порядка малости с учетом полученных ранее результатов для функции $q_1(\tau_*)$ получим уравнение

$$\frac{dq_1q_0}{d\tau_*}+M_0q_0+L^n\tau_*{}^nK_+\left\{\left[\left(\frac{\partial\ln K}{\partial\tau}\right)_+ +L\left(\frac{\partial\ln K}{\partial y}\right)_+\right]\tau_*+\right.$$
$$\left.+\frac{\tau_*{}^2}{(\sigma+1)^2}+\frac{ny_2}{L\tau_*}\right\}e^{-\tau_*/(\sigma+1)} \tag{4.9}$$

Здесь функции $q_0(\tau_*)$ и $y_2(\tau_*)$ имеют вид (3.13) и (4.7) соответственно. Интегрируя (4.9), найдем

$$q_1q_0=-M_0{}^2(\sigma+1)\Gamma^{-1/2}(n+1)\int\limits_0^{(\sigma+1)^{-1}\tau_*}\gamma^{1/2}(n+1,z)\,dz-$$
$$-L^nK_+(\sigma+1)^{n+1}\gamma\left(n+3,\frac{\tau_*}{\sigma+1}\right)-L^nK_+\left[\left(\frac{\partial\ln K}{\partial\tau}\right)_+ +\right. \tag{4.10}$$
$$\left.+L\left(\frac{\partial\ln K}{\partial y}\right)_+ +\frac{n}{2}\left(\frac{\partial N}{\partial\tau}\right)_+ +\frac{nL}{2}\left(\frac{\partial N}{\partial y}\right)_+\right](\sigma+1)^{n+2}\gamma\left(n+2\frac{\tau_*}{\sigma+1}\right)-$$
$$-L^nK_+n(L-1)(\sigma+1)^{n+2}\Gamma^{1/2}(n+1)\int\limits_0^{(\sigma+1)^{-1}\tau_*}\int\limits_0^{\tau}\gamma^{-1/2}(n+1,z)\,z\,dz\,t^{n-1}e^{-t}\,dt$$

Из условия сращивания функций $q^{(0)}(\tau)+\beta^{-1}q^{(1)}(\tau)=M_0\tau+$ $+\beta^{-1}M_1\tau$ и $q_0(\tau_*)+\beta^{-1}q_1(\tau_*)$ находим, что

$$M_1=\frac{M_0}{2}\left\{2(\sigma+1)J_1(n)-(n+2)(n+1)-(\sigma+1)(n+1)\left[\left(\frac{\partial\ln K}{\partial\tau}\right)_+ +\right.\right.$$
$$\left.\left.+L\left(\frac{\partial\ln K}{\partial y}\right)_+ +\frac{n}{2}\left(\frac{\partial N}{\partial\tau}\right)_+ +\frac{nL}{2}\left(\frac{\partial N}{\partial y}\right)_+\right]-(\sigma+1)(L-1)J_2(n)\right\} \tag{4.11}$$

$$J_1(n)=\int\limits_0^\infty\left[1-\Gamma^{-1/2}(n+1)\gamma^{1/2}(n+1,z)\right]dz$$

$$J_2(n)=\frac{n}{\sqrt{\Gamma(n+1)}}\int\limits_0^\infty\frac{z\Gamma(n,z)\,dz}{\gamma^{1/2}(n+1,z)}$$

В частных случаях $n=1$ и $n=2$ интегралы J_1 и J_2 равны соответственно

$$J_1(1)=1.344,\quad J_1(2)=2.114;\quad J_2(1)=2,\quad J_2(2)=8.885$$

Двучленная асимптотическая формула для массовой скорости распространения фронта пламени имеет вид

$$m=\beta^{-(n+1)/2}(M_0+\beta^{-1}M_1)\exp\frac{-\beta}{2} \tag{4.12}$$

В рассмотренном в [2] случае $n=1$, $K=\text{const}$, $N=\text{const}$

$$M_1=M_0(\sigma+1)J_1(1)-3M_0-(L-1)M_0(\sigma+1) \tag{4.13}$$

В [2] показано, что двучленное асимптотическое разложение для m (4.13) хорошо совпадает с результатами численного расчета при $\beta \geqslant 3$. Формулы (4.1), (3.14) и (4.13) дают асимптотическое двучленное разложение скорости горения при произвольном значении n и свойствах среды, зависящих от температуры и концентрации.

Из (3.14), (4.11) следует, что зависимость характеристик среды от температуры и концентрации проявляется в виде зависимости второго члена асимптотического разложения скорости горения от значений градиентов характеристик среды на горячей границе зоны горения.

Поступила 10 IV 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б., Франк-Каменецкий Д. А. Теория теплового распространения пламени. ЖФХ, 1938, т. 12.
2. Bush W. B., Fendell F. E. Asymptotic analysis of laminar flame propagation for general lewis number. Combustion Sci. and Technol., 1970, vol. 1, p. 421—428.
3. Вильямс Ф. А. Теория горения. М., «Наука», 1971.
4. Новиков С. С., Рязанцев Ю. С. О существовании и единственности решения системы уравнений тепловой теории горения. ПМТФ, 1965, № 4.
5. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.