

НЕКОТОРЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ПРИ БОЛЬШИХ ВДУВАХ

В. Н. Филимонов

(Севастополь)

Изучается ламинарный пограничный слой для бинарной смеси при больших вдувах с обтекаемой поверхности. Получены распределения скорости, концентрации и температуры внутри пограничного слоя, приводятся формулы для вычисления расстояния до «линии растекания» и выражения для градиентов скорости, концентрации и температуры на поверхности тела в зависимости от величины вдува.

Ранее было показано [1], что в передней критической точке тела градиент концентрации и температуры на теле с ростом вдува уменьшается по экспоненциальному закону; в работе [2] была получена степенная зависимость от вдува всюду, кроме критической точки. В данной статье получены выражения, содержащие оба эти результата, и дана оценка области влияния каждого из них.

1. Уравнения ламинарного пограничного слоя для бинарной смеси имеют следующий вид [3]:

$$\begin{aligned} (lf''_{\eta\eta})'_\eta + ff''_{\eta\eta} + \Lambda \left[\frac{\rho_e}{\rho} - (f'_\eta)^2 \right] &= 2\xi (f'_\eta f''_{\xi\eta} - f'_\xi f''_{\eta\eta}) \\ \left(\frac{l}{S} c'_\eta \right)'_\eta + fc'_\eta &= 2\xi (f'_\eta c'_{\xi'} - f'_\xi c'_\eta) \\ \left(\frac{lc_p}{\sigma} \theta'_\eta \right)'_\eta + c_p f \theta'_\eta + \frac{l}{S} (c_{p1} - c_{p2}) c'_\eta \theta'_\eta + l \frac{u_e^2}{T_e} (f''_{\eta\eta})^2 &= \\ = f'_\eta \left(\beta c_p \theta + \Lambda \frac{\rho_e}{\rho} \frac{u_e^2}{T_e} \right) + 2\xi c_p (f'_\eta \theta'_{\xi'} - f'_\xi \theta'_\eta) \\ \eta = \frac{r^k u_e}{\sqrt{2\xi}} \int_0^y \rho dy, \quad \xi = \int_0^x \rho_w \mu_w u_e r^{2k} dx \\ \Lambda(\xi) = \frac{2\xi}{u_e} \frac{du_e}{d\xi}, \quad \beta(\xi) = \frac{2\xi}{T_e} \frac{dT_e}{d\xi}, \quad l = \frac{\mu\rho}{\mu_w \rho_w} \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь η , ξ — безразмерные координаты по нормали и вдоль поверхности, f — преобразованная функция тока ($f'_\eta = u / u_e$ — безразмерная скорость), $\theta = T / T_e$ — безразмерная температура, c и c_{p1} — концентрация и теплоемкость одной компоненты, c_p и ρ — теплоемкость и плотность смеси, S — число Шмидта, σ — число Прандтля, $k = 0$ и $k = 1$ для плоского и осесимметричного течения соответственно. Индекс e означает внешнюю границу пограничного слоя, w — поверхность тела.

Граничные условия на поверхности тела

$$f'_\eta = 0, \quad c = c_w(\xi), \quad \theta = \theta_w(\xi) \quad \text{при } \eta = 0$$

$$f(\xi, 0) + 2f'_{\xi'}(\xi, 0) = G(\xi) = - \frac{\sqrt{2\xi}}{\xi_{x'}} r^k (\rho\nu)_w$$

и на внешней границе пограничного слоя

$$f_{\eta}' = 1, \quad c = c_e, \quad \theta = 1 \quad \text{при } \eta = \infty$$

Здесь $G(\xi)$ — известная гладкая функция. Условие большого вдува означает, что $G(\xi)$ достаточно велика по абсолютной величине, чтобы $1/G(0)$ можно было считать малым параметром.

Для того, чтобы явно выделить малый параметр в уравнениях (1.1), вводим новую переменную

$$h = f(\xi, \eta) / f(\xi, 0) \quad (1.2)$$

и новые искомые функции

$$z(\xi, h) = \left(\frac{u}{u_e}\right)^2 = f^2(\xi, 0)(h_{\eta}')^2, \quad c(\xi, h) = c(\xi, \eta(\xi, h)), \quad \theta(\xi, h) = \theta(\xi, \eta(\xi, h)) \quad (1.3)$$

Тогда система (1.1) примет вид

$$\begin{aligned} A(\xi) h z_h' - 2\xi z_{\xi}' - 2\Lambda \left(z - \frac{\rho_e}{\rho}\right) &= -\frac{V_z^-}{\alpha^2 a^2(\xi)} (l z_h')_h' \\ A(\xi) h c_h' - 2\xi c_{\xi}' &= -\frac{1}{\alpha^2 a^2(\xi)} \left(\frac{l}{S} V_z^- z c_h'\right)_h' \\ A(\xi) h \theta_h' - 2\xi \theta_{\xi}' - \frac{\Lambda}{c_p} \frac{\rho_e}{\rho} \frac{u_e^2}{T_e} - \beta \theta &= -\frac{1}{\alpha^2 a^2(\xi) c_p} \times \\ &\times \left[\left(\frac{l c_p}{\sigma} V_z^- \theta_h'\right)_h' + \frac{l}{S} (c_{p1} - c_{p2}) V_z^- z c_h' \theta_h' + \frac{l}{4} \frac{u_e^2}{V_z^- T_e} (z_h')^2 \right] \\ \alpha = -f(0, 0) = -G(0), \quad a(\xi) = \frac{f(\xi, 0)}{f(0, 0)}, \quad A(\xi) = 1 + \frac{2\xi}{a(\xi)} \frac{da}{d\xi} \end{aligned} \quad (1.4)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} z(\xi, 1) = 0, \quad c(\xi, 1) = c_w(\xi), \quad \theta(\xi, 1) = \theta_w(\xi) \\ z(\xi, -\infty) = 1, \quad c(\xi, -\infty) = c_e, \quad \theta(\xi, -\infty) = 1 \end{aligned}$$

Величина $1/\alpha^2$ — малый параметр. Сформулированная задача относится к классу задач об уравнениях с малым параметром при старших производных, решение которых имеет в пределе разрыв по внутренней точке области [4]. Далее в п. 2 получено асимптотическое решение этой задачи.

2. Уравнение состояния дает возможность для бинарной смеси представить величину ρ_e / ρ в виде произведения

$$\frac{\rho_e}{\rho} = \theta \lambda(c), \quad \lambda(c) = \frac{1 + (\gamma - 1)c}{1 + (\gamma - 1)c_e} \quad (2.1)$$

Здесь $1/\gamma$ — отношение молекулярных весов одной компоненты (с концентрацией c) к другой (с концентрацией $1 - c$). Подставив (2.1) в уравнения (1.4), решим вырожденную задачу (при $\alpha^{-2} = 0$) сначала для концентрации, затем для температуры и, наконец, для скорости. Предварительно введем функцию F следующим образом: $F(t) = \xi$ если $t = \xi a^2(\xi)$ т. е. $F(t)$ — решение уравнения $F a^2(F) = t$. Учитывая, что $a(\xi) = f(\xi, 0) / f(0, 0)$ легко определяется из граничного условия

$$f(\xi, 0) + 2\xi f_{\xi}'(\xi, 0) = G(\xi)$$

будем считать функцию F известной для каждой конкретной задачи. Так, например, при постоянном вдуве ($f(\xi, 0) = f(0, 0)$) получаем $F(t) \equiv t$.

Решение уравнений (1.4) с учетом (2.1) при $\alpha^{-2} = 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} c &= (1 - U)c_w(F_*) + c_e U \\ \theta &= U + (1 - U) \frac{T_e(F_*)}{T_e(\xi)} \theta_w(F_*) \exp \left[\frac{\nu}{2c_p} \int_{\xi}^{F_*} (u_e^2)_t' T_e'(t) dt \right] \\ z &= U + (1 - U) 2c_p \frac{T_e(\xi)}{u_e^2(\xi)} \left[\frac{T_e(F_*)}{T_e(\xi)} \theta_w(F_*) - \theta(\xi, h) \right] \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $F_* = F(\xi a^2(\xi) h^2)$, $U = U(h)$ — симметричная единичная функция

$$U(h) = \begin{cases} 0, & h < 0 \\ 1/2, & h = 0 \\ 1, & h > 0 \end{cases}$$

Здесь предполагается, что c_p зависит только от концентрации.

Для несжимаемой среды ($\rho_e / \rho = 1$) вырожденное уравнение для скорости не зависит от двух других уравнений. Решение имеет вид

$$z = 1 - (1 - U) \frac{u_e^2(F_*)}{u_e^2(\xi)}$$

Интересной особенностью решения является отсутствие разрыва на линии $h = 0$.

Согласно [4], формулы (2.2) дают вне линии $h = 0$ предельный вид истинного решения при $\alpha \rightarrow \infty$. Более точное приближение к истинному решению можно получить, если искать решения уравнений (1.4) в виде асимптотических рядов

$$(z, c, \theta) = (z_0, c_0, \theta_0) + \frac{1}{\alpha^2} (z_1, c_1, \theta_1) + \dots \quad (2.3)$$

Очевидно, что z_0 , c_0 и θ_0 даются формулами (2.2). Для c_1 , θ_1 , z_1 решение около поверхности тела будет таким:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{2} \int_{F_*}^{\xi} A(t, h_*) t^{-1} a^{-2}(t) dt \\ \theta_1 &= \frac{1}{2T_e(\xi)} e^{-\omega(\xi)} \int_{F_*}^{\xi} B(t, h_*) e^{\omega(t)} T_e(t) t^{-1} a^{-2}(t) dt \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$z_1 = \frac{1}{2u_e^2(\xi)} \int_{F_*}^{\xi} C(t, h_*) u_e^2(t) t^{-1} a^{-2}(t) dt$$

$$A = \left(\frac{l}{S} V \bar{z} c_h' \right)'_h, \quad C = V \bar{z} (l z_h')_{h'} + 2a^2 \Lambda (\theta_0 \lambda_1 + \theta_1 \lambda_0)$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{c_p^{(0)}} \left[\left(\frac{l c_p}{\sigma} V \bar{z} \theta_h' \right)'_h + \frac{l}{S} (c_{p1} - c_{p2}) V \bar{z} c_h' \theta_h' + \frac{l}{4 V \bar{z}} \frac{u_e^2}{T_e} (z_h')^2 \right] - \\ &\quad - a^2 \frac{\Lambda}{c_p^{(0)}} \frac{u_e^2}{T_e} \left[\theta_0 \lambda_1 - \theta_0 \lambda_0 \frac{c_p^{(1)}}{c_p^{(0)}} \right] \end{aligned}$$

$$\omega(\xi) = \frac{\lambda_0}{2c_p^{(0)}} \int_0^{\xi} (u_e^2)_t' T_e^{-1}(t) dt, \quad h_* = h \left(\frac{\xi a^2(\xi)}{t a^2(t)} \right)^{1/2}$$

Здесь использованы разложения

$$c_p(c) = c_{p1}c + c_{p2}(1-c) = [c_{p2} + (c_{p1} - c_{p2})c_0] + \alpha^{-2}(c_{p1} - c_{p2})c_1 + \dots = \\ = c_p^{(0)} + \alpha^{-2}c_p^{(1)} + \dots, \quad \rho_e/\rho = \theta_0\lambda_0 + \alpha^{-2}(\theta_1\lambda_0 + \theta_0\lambda_1) + \dots$$

$$\lambda_0 = \frac{1 + (\gamma - 1)c_0}{1 + (\gamma - 1)c_e}, \quad \lambda_1 = \frac{(\gamma - 1)c_1}{1 + (\gamma - 1)c_e} \\ (l, S, \sigma) = (l(c_0, \theta_0), S(c_0, \theta_0), \sigma(c_0, \theta_0)) + O(\alpha^{-2})$$

Функция A определяется через c_0, θ_0, z_0 ; функция B — через c_0, θ_0, z_0, c_1 ; функция C — через $c_0, \theta_0, z_0, c_1, \theta_1$. Около внешней границы $c_i = \theta_i = z_i = 0$ для $i \geq 1$.

Решения (2.2) и (2.4) с учетом (1.2), (1.3) дают возможность получить производные по η от скорости, концентрации и температуры. Так, на поверхности тела имеем

$$u_\eta'(\xi, 0) = -G^{-1}(\xi) \Lambda \frac{\rho_e}{\rho_w} + O(\alpha^{-5}) \\ c_\eta'(\xi, 0) = G^{-3}(\xi) \frac{\Lambda}{S_w} \frac{\rho_e}{\rho_w} 2\xi c_w \xi' + O(\alpha^{-5}) \quad (2.5) \\ \theta_\eta'(\xi, 0) = G^{-3}(\xi) \left[\frac{\Lambda}{\sigma_w} \frac{\rho_e}{\rho_w} (2\xi \theta_w \xi' + \beta \theta_w) + \left(\frac{1}{\sigma_w} - 1 \right) \frac{u_e^2}{T_e} \frac{\Lambda}{c_{pw}} \left(\frac{\rho_e}{\rho_w} \right)^2 \right] + O(\alpha^{-5})$$

Подобные результаты на поверхности тела были получены в работе [2] непосредственно из исходных уравнений. Сравнение с численными расчетами показывает [2], что хорошее совпадение начинается уже при $\alpha \geq 2$. Опираясь на этот факт, можно говорить о пригодности решений (2.2), (2.4) при вполне реальных вдувах.

Последнее из выражений (2.2) позволяет определить расстояние η_0 до линии растекания $h = 0$.

$$\eta_{(0)}(\xi) = -f(\xi, 0) \int_0^1 \frac{dh}{V_z(h)} \quad (2.6)$$

В точке $\xi = 0$

$$\eta_{(0)}(0) = \frac{\alpha}{2\Lambda} B\left(\frac{1}{2\Lambda}, \frac{1}{2}\right) \left(\frac{\rho_e}{\rho_w}\right)^{-1/2} + \left(\frac{\rho_e}{\rho_w}\right)^{-1/2} \left\{ \left[1 + O\left(\frac{2\Lambda - 1}{\alpha^{2\Lambda - 1}}\right) \right]^{-1/2} - 1 \right\} + O(\alpha^{-2\Lambda}) \quad (2.7)$$

Здесь B — бэта-функция.

Следующий, п. 3, посвящен поиску решения, более точно определяющего величины $\eta_{(0)}$, $(c_\eta')_w$ и $(\theta_\eta')_w$.

3. Известно [1], что в окрестности передней критической точки ($\xi = 0$) величины $(c_\eta')_w$ и $(\theta_\eta')_w$ имеют экспоненциальный порядок малости по α^{-2} . Решение в рядах (2.3) не может дать такой зависимости, поэтому здесь предлагается искать решение второго и третьего уравнений (1.4) в виде суммы двух функций, $c = c_{(1)} + c_{(2)}$, $\theta = \theta_{(1)} + \theta_{(2)}$

так, чтобы $c_{(1)}$ и $\theta_{(1)}$ удовлетворяли уравнениям

$$A(\xi) h c'_{(1)h} = -\frac{1}{\alpha^2 a^2(\xi)} \left(\frac{l}{S} \sqrt{z} c'_{(1)h} \right)'_h \quad (3.1) \\ A(\xi) h \theta'_{(1)h} = -\frac{1}{\alpha^2 a^2(\xi) c_p} \left[\left(\frac{l c_p}{\sigma} \sqrt{z} \theta'_{(1)h} \right)'_h + \frac{l}{S} (c_{p1} - c_{p2}) \sqrt{z} c_h' \theta'_{(1)h} \right]$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} c_{(1)}(\xi, 1) &= c_w(0), & \theta_{(1)}(\xi, 1) &= \theta_w(0) \\ c_{(1)}(\xi, -\infty) &= c_e, & \theta_{(1)}(\xi, -\infty) &= 1 \end{aligned}$$

Тогда как $c_{(2)}$ и $\theta_{(2)}$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} A(\xi) h c'_{(2)h} - 2\xi c'_{(2)\xi} &= 2\xi c'_{(1)\xi} - \frac{1}{\alpha^2 a^2(\xi)} \left(\frac{l}{S} \sqrt{z} c'_{(2)h} \right)'_h \\ A(\xi) h \theta'_{(2)h} - 2\xi \theta'_{(2)\xi} - \beta \theta_{(2)} &= \beta \theta_{(1)} + 2\xi \theta'_{(1)\xi} + \frac{\Lambda}{c_p} \frac{u_e^2}{T_e} \frac{\rho_e}{\rho} - \\ - \frac{1}{\alpha^2 a^2(\xi) c_p} &\left[\left(\frac{l c_p}{\sigma} \sqrt{z} \theta'_{(2)h} \right)'_h + \frac{l}{S} (c_{p1} - c_{p2}) \sqrt{z} c'_{(2)h} + \frac{l}{4 \sqrt{z}} \frac{u_e^2}{T_e} (z_h')^2 \right] \end{aligned} \quad (3.2)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} c_{(2)}(\xi, 1) &= c_w(\xi) - c_w(0), & \theta_{(2)}(\xi, 1) &= \theta_w(\xi) - \theta_w(0) \\ c_{(2)}(\xi, -\infty) &= \theta_{(2)}(\xi, -\infty) = 0 \end{aligned}$$

Фактически коэффициенты в этих уравнениях: l , S и др. сами зависят от c и θ , поэтому такое разделение можно провести лишь формально, считая все коэффициенты в уравнениях (1.4) известными функциями от ξ , h . Вне окрестности линии $h = 0$ для вычисления этих коэффициентов можно воспользоваться решениями (2.2), (2.4). Решения $c_{(2)}$ и $\theta_{(2)}$ должны отыскиваться после того, как получены $c_{(1)}$ и $\theta_{(1)}$. Тогда соответствующие члены в (3.2), зависящие от $c_{(1)}$ и $\theta_{(1)}$, будут известными функциями ξ , h .

Решения уравнений (3.1) записываются в таком виде:

$$\begin{aligned} c_{(1)} &= c_w(0) + (c_e - c_w(0)) \int_1^h \frac{S}{l \sqrt{z}} \exp \psi_c(\xi, h') dh' \Bigg/ \int_1^{-\infty} \frac{S}{l \sqrt{z}} \exp \psi_c(\xi, h) dh \\ \theta_{(1)} &= \theta_w(0) + (1 - \theta_w(0)) \int_1^h \frac{\sigma}{l c_p \sqrt{z}} \exp \psi_\theta(\xi, h') dh' \Bigg/ \int_1^{-\infty} \frac{\sigma}{l c_p \sqrt{z}} \exp \psi_\theta(\xi, h) dh \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\psi_\theta(\xi, h) = \alpha^2 a^2(\xi) A(\xi) \int_h^1 \frac{\sigma}{l \sqrt{z}} h' dh' + \int_h^1 \frac{c_{p1} - c_{p2}}{c_p} L c h' dh'$$

$$\psi_c(\xi, h) = \alpha^2 a^2(\xi) A(\xi) \int_h^1 \frac{S}{l \sqrt{z}} h' dh', \quad L = \frac{\sigma}{S}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} (c'_{(1)h})_w &= \left(-\frac{\sqrt{z}}{\alpha a(\xi)} c'_{(1)h} \right)_{h=1} = \frac{S}{\alpha a(\xi)} (c_e - c_w(0)) \Bigg/ \int_{-\infty}^1 \frac{S}{l \sqrt{z}} \exp \psi_c(\xi, h) dh \\ (\theta'_{(1)h})_w &= \frac{\sigma_w}{\alpha a(\xi) c_{pw}} (1 - \theta_w(0)) \Bigg/ \int_{-\infty}^1 \frac{\sigma}{l c_p \sqrt{z}} \exp \psi_\theta(\xi, h) dh \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь L — число Льюиса. Для подсчета интегралов в формулах (3.4) будем пользоваться решениями (2.2). Тогда, поскольку в показателе экспоненты стоит α^2 — большой параметр, применяем формулу Лапласа

для асимптотического интегрирования [5] и получаем

$$(c'_{(1)\eta})_w = \frac{S_w}{C_1} (c_e - c_w(0)) \left(\frac{G(\xi)}{f(\xi, 0)} \right)^{1/2} \exp \left[-G(\xi) f(\xi, 0) \int_0^1 \frac{S}{l \sqrt{z}} h dh \right]$$

$$C_1(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\left(\frac{S}{l \sqrt{z}} \right)_{(0)}^{1/2} + \left(\frac{S}{l} \right)_e^{1/2} \right] \quad (3.5)$$

Здесь индекс нуль означает, что величина взята при $h = 0$. Выражение для $(\theta'_{(1)\eta})_w$ получается из (3.5), если заменить S на σ и $C_1(\xi)$ на $C_2(\xi)$

$$C_2(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} c_{pw}(\xi) \left[\frac{1}{c_{p(0)}} \left(\frac{\sigma}{l \sqrt{z}} \right)_{(0)}^{1/2} + \frac{1}{c_{pe}} \left(\frac{\sigma}{l} \right)_e^{1/2} e^{\varphi_1} \right] e^{\varphi_2}$$

$$\varphi_1 = (c_{p1} - c_{p2}) \int_0^1 \frac{L}{c_p} (c_w(F_*))_h' dh, \quad \varphi_2 = \frac{1}{2} (c_{p1} - c_{p2}) (c_e - c_w(0)) \times$$

$$\times \left[\left(\frac{L}{c_p} \right)_{(0)} - \left(\frac{L}{c_p} \right)_e \right]$$

Выражения типа $(S/l\sqrt{z})_{(0)}$ и интегралы от нуля до единицы определяются при помощи решений (2.2), (2.4) на интервале $0 < h \leq 1$. В передней критической точке ($\xi = 0$)

$$C_1(0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[S_w^{1/2} \left(\frac{\rho_e}{\rho_w} \right)^{-1/4} + S_e^{1/2} l_e^{-1/2} \right]$$

$$C_2(0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\sigma_w^{1/2} \left(\frac{\rho_e}{\rho_w} \right)^{-1/4} + \sigma_e^{1/2} l_e^{-1/2} \frac{c_{pw}}{c_{pe}} \exp \left\{ \frac{1}{2} (c_{p1} - c_{p2}) (c_e - c_w(0)) \times \right. \right.$$

$$\left. \left. \times \left[\left(\frac{L}{c_p} \right)_w - \left(\frac{L}{c_p} \right)_e \right] \right\} \right]$$

и аналогично [1] получаем

$$\int_0^1 \frac{S}{l \sqrt{z}} h dh = S_w(0) \int_0^1 [z_0 + \alpha^{-2} z_1 + O(\alpha^{-4})]^{-1/2} h dh = S_w(0) \left[\frac{1}{2\Lambda} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\Lambda}\right) \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{\rho_e}{\rho_w} \right)^{-1/2} - \frac{\Lambda^*}{\alpha^2} \right] + O(\alpha^{-4}), \quad \Lambda^* = \frac{\Lambda - 1/2}{2 - \Lambda} \left[\psi\left(\frac{3}{2}\right) - \psi\left(1 + \frac{1}{\Lambda}\right) \right]$$

где ψ — пси-функция.

В $(1/\alpha)$ -окрестности линии $h = 0$ действие малого параметра прекращается, и там недействительны асимптотические решения п.2. Поэтому, чтобы формулы (3.3) и (3.4) давали количественно верные результаты, необходимо найти решение в окрестности линии $h = 0$. В приложении для частного случая однородной среды показано, как получить приближенное решение в этой окрестности. Если применить ту же методику здесь, то для передней критической точки в окрестности линии $h = 0$ получим функции

$$z = \left(\frac{\rho_e}{\rho} \right)_{(0)} - \left[\left(\frac{\rho_e}{\rho} \right)_{(0)} - \frac{\rho_e}{\rho_w} \right] \Phi \left(\frac{\alpha h}{\sqrt{2}} \left(\frac{\rho_e}{\rho_w} \right)^{-1/4} \right), \quad h \geq 0 \quad (3.6)$$

$$z = \left(\frac{\rho_e}{\rho} \right)_{(0)} - \left[1 - \left(\frac{\rho_e}{\rho} \right)_{(0)} \right] \Phi \left(\frac{\alpha h}{\sqrt{2}} l_e^{-1/2} \right), \quad h \leq 0$$

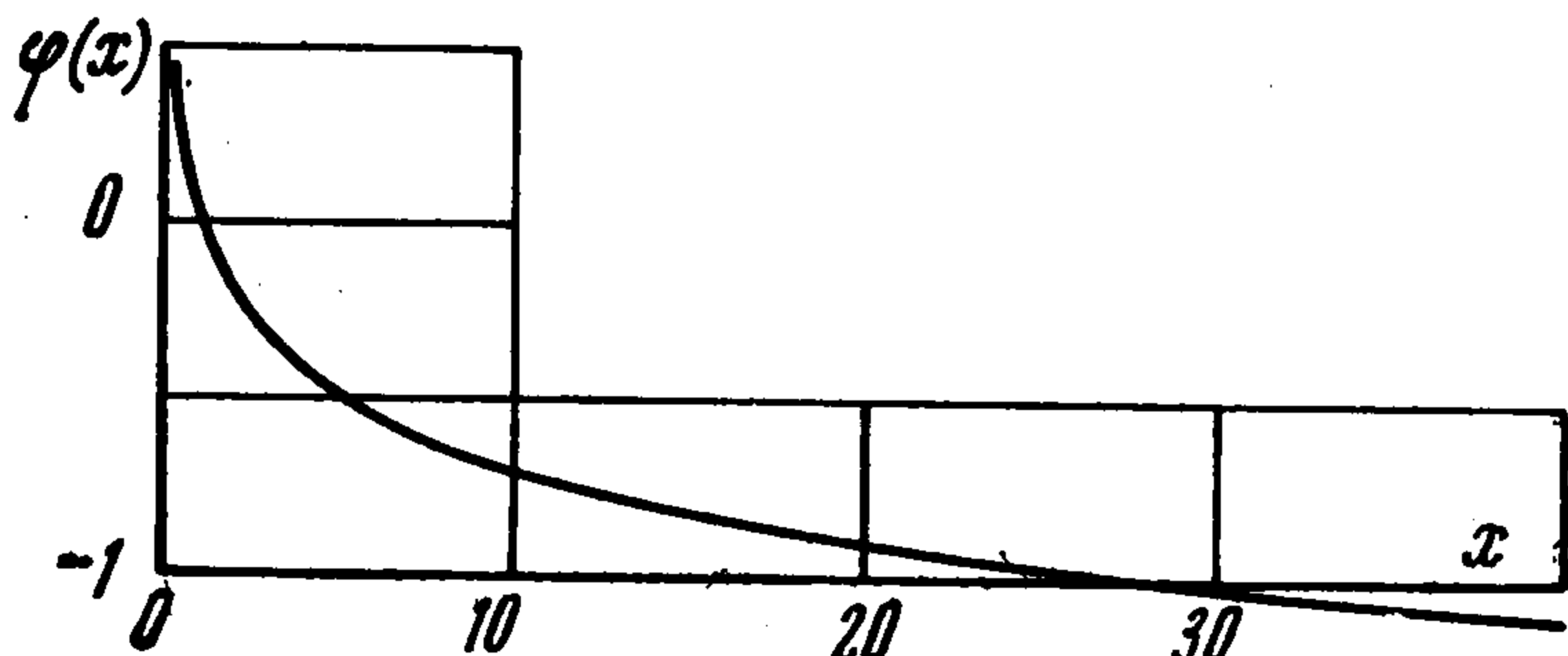
$$\left(\frac{\rho_e}{\rho} \right)_{(0)} = \frac{\rho_e}{\rho} \left(\frac{c_e + c_w}{2}, \frac{1 + \theta_w}{2} \right)$$

$$c = \frac{c_e + c_w}{2} - \frac{c_e - c_w}{2} \Phi \left(\frac{\alpha h}{\sqrt{2}} S_w^{1/2} \left(\frac{\rho_e}{\rho_w} \right)^{-1/4} \right), \quad h \geq 0$$

$$c = \frac{c_e + c_w}{2} - \frac{c_e - c_w}{2} \Phi \left(\frac{\alpha h}{\sqrt{2}} S_e^{1/2} l_e^{-1/2} \right), \quad h \leq 0 \quad (3.7)$$

где Φ — интеграл ошибок.

Решение для θ получается из (3.7) заменой c_e на единицу, c_w — на θ_w и S — на σ . Уравнения (3.1) содержат ξ лишь в виде параметра, а основной вклад в величины $(c_n')_w$ и $(\theta_n')_w$ функции $c_{(1)}$ и $\theta_{(1)}$ вносят в окрестности точки $\xi = 0$, поэтому при вычислении интегралов в (3.3) и (3.4) около линии $h = 0$ предлагается воспользоваться функциями (3.6), (3.7), полагая там c_w , θ_w , $S_w = S(c_w, \theta_w)$ и т. д. функциями от ξ . Тогда при сохранении вида формулы (3.5) вместо C_1 будет стоять C_3



Фиг. 1

$$C_3 = \int_{-\infty}^0 \varphi_4 \exp \left[-\frac{f^2}{2} \varphi_3 + \varphi_5(f) \right] df + [\exp \varphi_5(0)] \int_0^{\infty} \varphi_4 \exp \left(-\int_0^f \varphi_4 df' \right) df$$

$$\varphi_3 = S_w \left(\frac{\rho_e}{\rho_w} \right)^{-1/2}, \quad \varphi_4 = \frac{S}{l \sqrt{Z}}, \quad \varphi_5(f) = -\int_{-\infty}^f (\varphi_4 - \varphi_3) f' df'$$

а вместо C_2 будет стоять C_4

$$C_4 = \int_{-\infty}^0 \frac{c_{pw}}{c_p} \varphi_7 \exp \left[-\frac{f^2}{2} \varphi_6 + \varphi_9(f) \right] df + [\exp \varphi_9(0)] \int_0^{\infty} \frac{c_{pw}}{c_p} \varphi_7 \exp \varphi_{10} df$$

$$\varphi_6 = \sigma_w \left(\frac{\rho_e}{\rho_w} \right)^{-1/2}, \quad \varphi_7 = \frac{\sigma}{l \sqrt{Z}}, \quad \varphi_8 = \frac{c_{p1} - c_{p2}}{c_p} L c_f'$$

$$\varphi_9(f) = -\int_{-\infty}^f [(\varphi_7 - \varphi_6) f' + \varphi_8] df', \quad \varphi_{10} = -\int_0^f (\varphi_7 f' + \varphi_8) df'$$

Здесь $Z(f) = z(-h/\alpha)$ из (3.6), σ , l , c_p , L — функции от $\theta(f) = \theta(-h/\alpha)$ и $c(f) = c(-h/\alpha)$ из (3.7). Функции (3.6), (3.7) используются и для более точного определения расстояния до линии растекания $h = 0$. Так, для критической точки к величине (2.7) надо добавить слагаемое

$$\sqrt{2} \left(\frac{\rho_e}{\rho_w} \right)^{-1/4} \varphi \left(\left(\frac{\rho_e}{\rho} \right)_{(0)} / \frac{\rho_e}{\rho_w} \right)$$

$$\varphi(x) = \int_0^{\infty} \{ [x + (1-x)\Phi(t)] - 1 \} dt$$

График функции $\varphi(x)$ приведен на фиг. 1.

Решение уравнений (3.2) будем искать в виде асимптотических рядов по малому параметру $1/\alpha^2$

$$(c_{(2)}, \theta_{(2)}) = (c_{(2)0}, \theta_{(2)0}) + 1/\alpha^2 (c_{(2)1}, \theta_{(2)1}) + \dots$$

Получаем, что около границы $h = 1$

$$\begin{aligned}
 c_{(2)0} &= c_w(F_*) - c_w(0) - \int_{F_*}^{\xi} \frac{\partial}{\partial t} c_{(1)}(t, h_*) dt \\
 c_{(2)i}(\xi, h) &= -\frac{1}{2} \int_{F_*}^{\xi} A_i(t, h_*) \frac{dt}{t} \quad (i \geq 1) \\
 \theta_{(2)0} &= \frac{T_e(F_*)}{T_e(\xi)} [\theta_w(F_*) - \theta_w(0)] - \frac{1}{2T_e(\xi)} \int_{F_*}^{\xi} B_0(t, h_*) T_e(t) \frac{dt}{t} \\
 \theta_{(2)i} &= -\frac{1}{2T_e(\xi)} \int_{F_*}^{\xi} B_i(t, h_*) T_e(t) \frac{dt}{t} \quad (i \geq 1)
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Около внешней границы пограничного слоя

$$c_{(2)i} = -\frac{1}{2} \int_0^{\xi} A_i(t, h_*) \frac{dt}{t}, \quad \theta_{(2)i} = -\frac{1}{2T_e(\xi)} \int_0^{\xi} B_i(t, h_*) T_e(t) \frac{dt}{t}$$

Здесь A_i и B_i — коэффициенты разложений правых частей уравнений (3.2) в ряд по $1/\alpha^2$.

Из (3.8) получаем на поверхности тела для $(c'_{(2)n})_w$ и $(\theta'_{(2)n})_w$ те же выражения, что и в формулах (2.5). Объединяя полученные результаты, имеем

$$\begin{aligned}
 (c'_n)_w &= \frac{S_w}{C_3} (c_e - c_w) \left(\frac{G(\xi)}{f(\xi, 0)} \right)^{1/2} \exp \left[-G(\xi) f(\xi, 0) \int_0^1 \frac{S}{l \sqrt{z}} h dh \right] + \\
 &\quad + G^{-3}(\xi) \frac{\Lambda}{S_w} \frac{\rho_e}{\rho_w} 2\xi c'_{w\xi} + O(\alpha^{-5}) \\
 (\theta'_n)_w &= \frac{\sigma_w}{C_4} (1 - \theta_w) \left(\frac{G(\xi)}{f(\xi, 0)} \right)^{1/2} \exp \left[-G(\xi) f(\xi, 0) \int_0^1 \frac{\sigma}{l \sqrt{z}} h dh \right] + \\
 &\quad + G^{-3}(\xi) \frac{\Lambda}{\sigma_w T_e(\xi)} \frac{\rho_e}{\rho_w} \left[2\xi T'_{w\xi} + (1 - \sigma_w) u_e^2 \frac{\Lambda}{c_{pw}} \frac{\rho_e}{\rho_w} \right] + O(\alpha^{-5})
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Последние формулы показывают, что с ростом вдува градиенты концентрации и температуры на поверхности тела в окрестности передней критической точки убывают по экспоненте, а далее вдоль поверхности — по степенному закону. Последнее верно, если $c_w(\xi) \neq \text{const}$, $T_w(\xi) \neq \text{const}$, $\sigma_w \neq 1$, иначе для всей поверхности сохраняется экспоненциальная зависимость.

Оценим для фиксированного вдува величину $\xi^*(\alpha)$, где оба члена (степенной и экспоненциальный) вносят одинаковый вклад. Предполагая, что все функции, заданные на поверхности тела, достаточно гладкие и что сама ξ^* мала, имеем:

для градиента концентрации

$$\xi^* \approx \left| \frac{c_e - c_w}{c_w \xi'} \right| \frac{\rho_w S_w^2}{\rho_e 2\Lambda} \frac{\alpha^3}{C_3} \exp \left[-\alpha^2 \frac{S_w}{2\Lambda} \left(\frac{\rho_e}{\rho_w} \right)^{-1/2} B \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\Lambda} \right) + S_w \Lambda^* \right]$$

для градиента температуры

$$\xi^* \approx \left| (1 - \theta_w) \left[T_{w\xi}' + (1 - \sigma_w) \frac{\rho_e}{\rho_w} \frac{u_e'(0)}{(c_p \mu \rho)_w} \right]^{-1} \right| \left| \frac{\rho_w}{\rho_e} \frac{\sigma_w}{2C_4} T_e \alpha^2 \times \right. \\ \left. \times \exp \left[-\alpha^2 \sigma_w \left(\frac{\rho_e}{\rho_w} \right)^{-1/2} + \sigma_w \Lambda^* \right] \right|$$

Последняя формула записана для плоского обтекания затупленного тела, когда при малых ξ функция $u_e^2(\xi)$ пропорциональна ξ . В более общем случае

$$\xi^* = [\alpha^{n_1} \exp(-\alpha^2 n_2)] / |O(1 - \sigma_w) + O(T_{w\xi}')| \quad n_1 > 0 \quad n_2 > 0,$$

и надо знать конкретный вид $u_e(x)$, чтобы записать эту формулу в точном виде.

Три последние формулы показывают, что чем больше вдув, тем меньше область преобладающего влияния экспоненты в (3.9). С другой стороны, эта область растет с уменьшением $c_{w\xi}'$, $T_{w\xi}'$ и $(1 - \sigma_w)$.

4. *Приложение.* Во избежание громоздкости метод получения приближенного решения в окрестности линии $h = 0$ будет продемонстрирован только для частного случая однородной среды. Тогда $\gamma = 1$ и поэтому, согласно (2.1), $\rho_e / \rho = \theta$. Из уравнений (1.4) (при $l = \sigma = 1$) получаем в передней критической точке $\xi = 0$ следующую систему:

$$hz_h' + 2\Lambda(\theta - z) = -\alpha^{-2} \sqrt{z} z_{hh}'' \\ h\theta_h' = -\alpha^{-2} (\sqrt{z} \theta_h')_h'$$

с граничными условиями

$$z = 0, \quad \theta = \theta_w \quad \text{при } h = 1 \\ z = 1, \quad \theta = 1 \quad \text{при } h = -\infty$$

Такая задача была решена ранее [6] при помощи ЭВМ, и будет удобно сравнить получаемые приближенные решения с численными.

Около границы $h = 1$ решение берется в виде асимптотических рядов (2.3), где

$$z_0 = \theta_w (1 - h^{2\Lambda}), \quad z_1 = \theta_w^{3/2} 2\Lambda (2\Lambda - 1) h^{2\Lambda} \int_h^1 (1 - t^{2\Lambda}) t^{-3} dt \\ \theta_0 = \theta_w, \quad \theta_i = 0 \quad (i \geq 1)$$

Чтобы получить решение в окрестности линии $h = 0$, производится растяжение переменной $f = -\alpha h$, и для уравнений

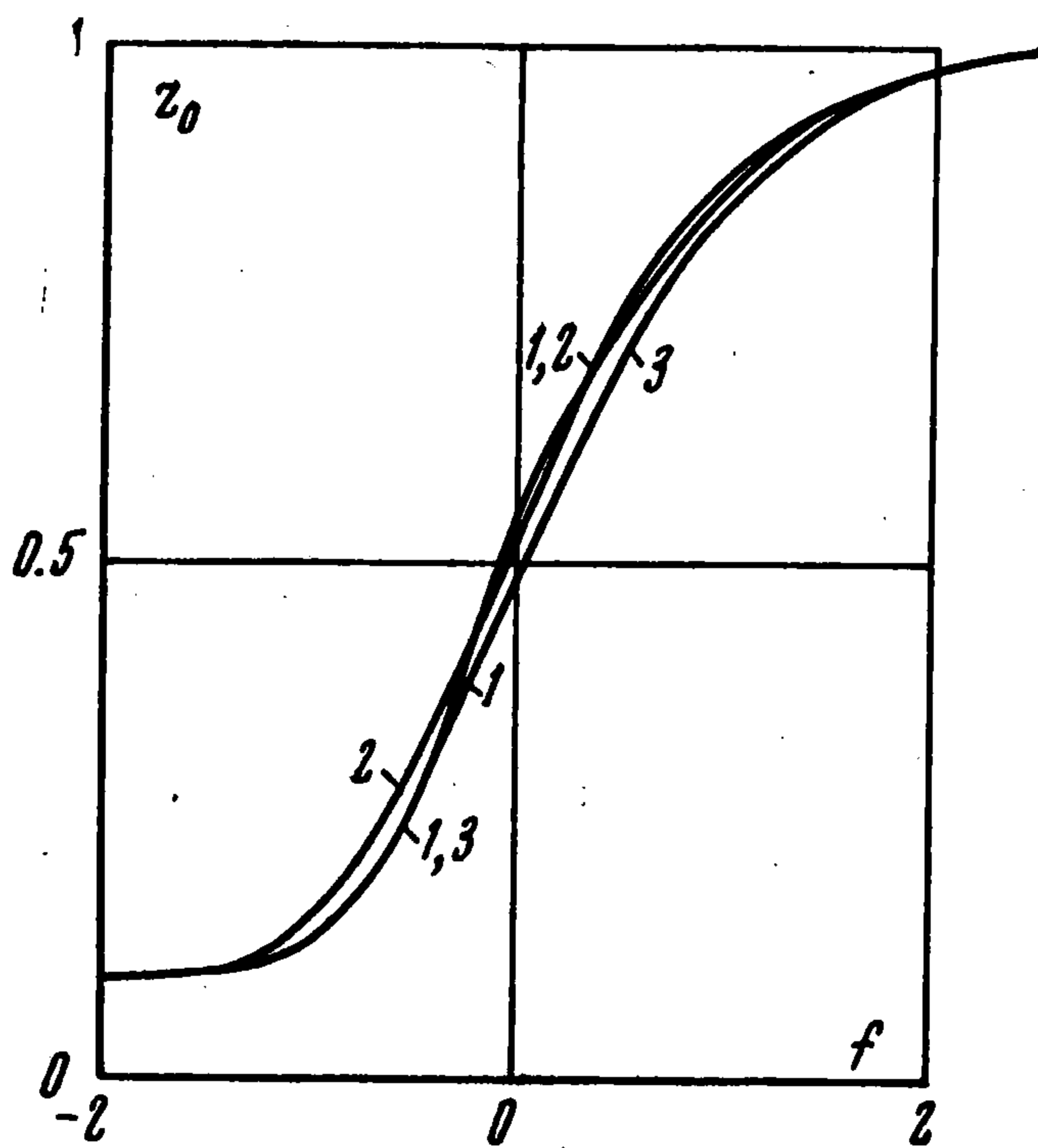
$$\sqrt{Z} Z_{ff}'' + f Z_f' + 2\Lambda(\theta - Z) = 0 \quad (4.1) \\ (\sqrt{Z} \theta_f')_f' + f \theta_f' = 0, \quad z = Z(f), \quad \theta = \theta(f)$$

решение отыскивается в виде рядов

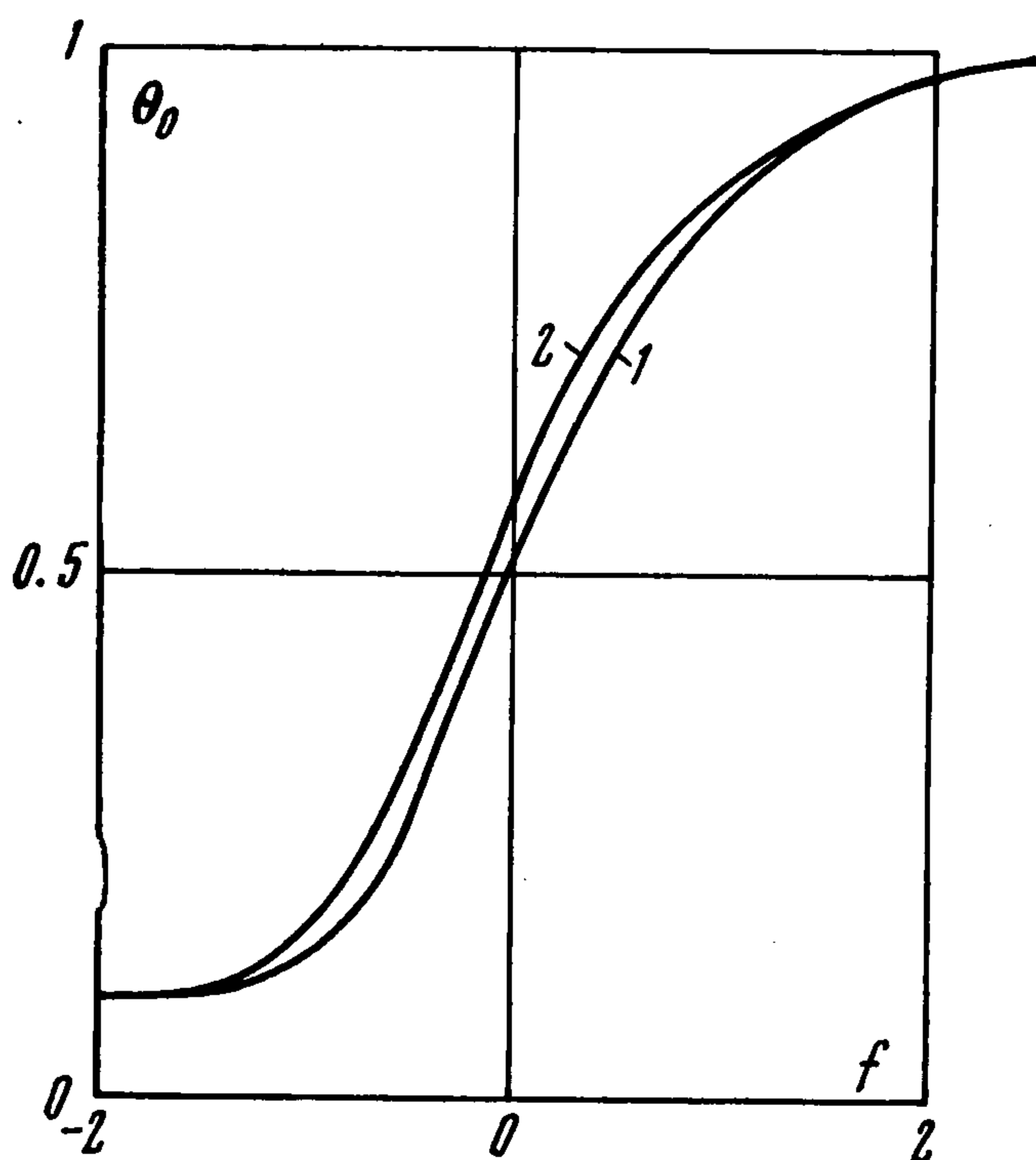
$$(Z, \theta) = (Z_0, \theta_0) + \frac{1}{\alpha^{2\Lambda}} (Z_1, \theta_1) + \dots \quad (4.2)$$

при граничных условиях

$$Z_0 = \theta_0 \rightarrow \theta_w, \quad Z_1 \rightarrow -\theta_w (-f)^{2\Lambda}, \quad \theta_1 \rightarrow 0 \quad \text{при } f \rightarrow -\infty \\ Z_0 = \theta_0 \rightarrow 1, \quad Z_1 = \theta_1 \rightarrow 0 \quad \text{при } f \rightarrow \infty \quad (4.3)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

В работе [6] задача (4.1) — (4.3) решается численно. Ниже предлагается метод получения приближенного аналитического выражения для функций Z_0 и Θ_0 .

Заметим, что если в уравнении для z_0 считать θ_0 известной функцией h , то решением, удовлетворяющим условию $z_0(-\infty) = 1$ будет функция

$$z_0 = 2\Lambda h^{2\Lambda} \int_h^{-\infty} \theta_0(x) x^{-2\Lambda-1} dx$$

а решением, удовлетворяющим условию $z_0(1) = 0$, — функция

$$z_0 = 2\Lambda h^{2\Lambda} \int_h^1 \theta_0(x) x^{-2\Lambda-1} dx$$

При $h \rightarrow 0$ обе эти функции стремятся к одной величине $\theta_0(0)$. Поэтому предполагаем, что $Z_0(0) = \Theta_0(0)$ (при выводе (3.6) используется аналогичное предположение $Z_0(0) = (\rho_e / \rho)_{(0)}$). Дополнительно предполагается, что $\Theta_0(0) = 1/2 [\Theta(-\infty) + \Theta(\infty)]$. Последнее предположение не является необходимым, но его использование дает решение, более близкое к точному. При выводе (3.7) аналогично предполагалось, что $\theta_{(0)} = 1/2 (1 + \theta_w)$ и $c_0 = 1/2 (c_e + c_w)$.

Далее функции Z_0 и Θ_0 в уравнениях (4.1), рассматриваемые как коэффициенты этих уравнений, заменяются в области $-\infty < f < 0$ на их граничное значение θ_w , а в области $0 < f < \infty$ — на единицу, полученные «линеаризованные» уравнения решаются с граничными условиями (4.3) и дополнительным условием $Z_0(0) = \Theta_0(0) = 1/2 (1 + \theta_w)$. Тогда имеем

$$Z_0 = \Theta_0 = \frac{1 + \theta_w}{2} + \frac{1 - \theta_w}{2} \times \begin{cases} \Phi(\theta_w^{-1/4} f / \sqrt{2}), & f \leq 0 \\ \Phi(f / \sqrt{2}), & f \geq 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

Здесь Φ — интеграл ошибок. Решение (4.4) позволяет получить приемлемое согласование с решениями Z_0 и Θ_0 , полученными численно.

На фиг. 2 представлен график функции Z_0 для $\theta_w = 0.1$. Здесь 1 — приближенное решение (формула (4.4)); 2, 3 — численные решения [6] для $\Lambda = 1$ и $\Lambda = 0.1$ соответственно. На фиг. 3 также для $\theta_w = 0.1$ даны графики Θ_0 для приближенного (формула (4.4)) и численного [6] решений — кривые 1 и 2 соответственно (кривая 2 отвечает как $\Lambda = 1$, так и $\Lambda = 0.1$). Сравнение этих графиков показывает, что расхождение невелико; это позволяет надеяться, что и формулы (3.6) и (3.7) дают приемлемую точность. Заметим, что (4.4) и (3.6) не содержат Λ . Это объясняется малостью разности $(Z_0 - \Theta_0)$ (соответственно $[Z - (\rho_e / \rho)]$). Заметим также, что в силу специфики данного метода формула для θ (аналог (3.7)) не учитывает разности $(c_{p1} - c_{p2})$. Этого можно избежать, либо отказываясь от дополнительного предположения $\theta_{(0)} = 1/2 (1 + \theta_w)$, либо ис-

пользуя для величины cf^f в уравнении для θ не разрывное решение (2.2), а функцию (3.7).

В заключение рассмотрим, как найти $(\theta_n')_w$ при $\xi = 0$, учитывая решение (4.4). Заметим, что

$$(\theta_n')_w = (V_z \theta_f')_w = \frac{1}{\alpha} (1 - \theta_w) \int_{-\infty}^1 \exp \left(\alpha^2 \int_h^1 \frac{h' dh'}{V_z(h')} \right) \frac{dh}{V_z} \quad (4.5)$$

Интеграл, стоящий в правой части, разбиваем на два слагаемых

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^1 \exp \left(\alpha^2 \int_h^1 \frac{h' dh'}{V_z(h')} \right) \frac{dh}{V_z} &= \frac{1}{\alpha} \int_{-\alpha}^0 \exp \kappa(-\alpha, f) \frac{df}{V_z} + \\ &+ \frac{1}{\alpha} \exp \kappa(-\alpha, 0) \int_0^{\infty} \exp \kappa(0, f) \frac{df}{V_z} \\ \kappa(a, b) &= - \int_a^b \frac{f df}{V_z}, \quad \alpha^2 \int_h^1 \frac{h' dh'}{V_z(h')} = - \int_{-\alpha}^f \frac{f' df'}{V_z} = \kappa(-\alpha, f) \end{aligned}$$

Как и в работе [6], составное решение строится следующим образом:

$$z = z_0 + Z_0 - \theta_w + \alpha^{-2} z_1 + O(\alpha^{-4} + \alpha^{-2\Lambda})$$

и соответственно

$$\begin{aligned} -\kappa(-\alpha, f) &= -\alpha^2 \int_1^{-f/\alpha} (z_0 + \alpha^{-2} z_1)^{-1/2} h dh - \vartheta(f) + O(\alpha^{-4} + \alpha^{-2\Lambda}) \\ \vartheta(f) &= - \int_{-\infty}^f (Z_0^{-1/2} - \theta_w^{-1/2}) f' df' \end{aligned} \quad (4.6)$$

При $\alpha \rightarrow \infty$ первое слагаемое в выражении (4.6) представляем в таком виде:]

$$\begin{aligned} \alpha^2 \int_1^{-f/\alpha} (z_0 + \alpha^{-2} z_1)^{-1/2} h dh &= a^2 M - \frac{1}{2} f^2 \theta_w^{-1/2} + O(1/\alpha) \\ M &= \int_0^1 (z_0 + \alpha^{-2} z_1)^{-1/2} h dh \end{aligned}$$

Тогда в выражении (4.5) имеем

$$\begin{aligned} (\theta_n')_w &= (1 - \theta_w) \exp(-\alpha^2 M) \left\{ \int_{-\alpha}^0 \exp \left[-\frac{1}{2} f^2 \theta_w^{-1/2} + \vartheta(f) \right] \frac{df}{V_z} [1 + O(\alpha^{-1} + \alpha^{-2\Lambda})] + \right. \\ &\left. + [\exp \vartheta(0)] \int_0^{\infty} \exp \kappa(0, f) \frac{df}{V_z} [1 + O(\alpha^{-2\Lambda} + \alpha^{-4})] \right\} \end{aligned}$$

На интервале $f \leq 0$ для $f = O(1)$ имеем $z_0 = \theta_w + O(\alpha^{-2\Lambda})$, поэтому $z = Z_0 + O(\alpha^{-2} + \alpha^{-2\Lambda})$. Следовательно

$$\begin{aligned} \int_{-\alpha}^0 \exp \left[-\frac{1}{2} f^2 \theta_w^{-1/2} + \vartheta(f) \right] \frac{df}{V_z} &= \int_{-\alpha}^0 \exp \left[-\frac{1}{2} f^2 \theta_w^{-1/2} - \vartheta(f) \right] \frac{df}{V_{Z_0}} \times \\ &\times [1 + O(\alpha^{-2} + \alpha^{-2\Lambda})] \end{aligned}$$

поскольку подынтегральная функция дает существенный вклад лишь в области $f \leq 0$, $f = O(1)$. Аналогично

$$\int_0^{\infty} \exp \kappa(0, f) \frac{df}{\sqrt{z}} = \int_0^{\infty} \exp \kappa^*(0, f) \frac{df}{\sqrt{z_0}} [1 + O(\alpha^{-2\Lambda})], \quad \kappa^*(0, f) = - \int_{-\alpha}^f \frac{f'df'}{\sqrt{z_0}}$$

Поэтому

$$(\theta_n')_w = C_5^{-1} (1 - \theta_w) \exp(-\alpha^2 M) [1 + O(\alpha^{-1} + \alpha^{-2\Lambda})]$$

$$C_5 = \int_{-\infty}^0 \exp \left[-\frac{1}{2} f^2 \theta_w^{-1/2} + \vartheta(f) \right] \frac{df}{\sqrt{z_0}} + [\exp \vartheta(0)] \int_0^{\infty} \exp \kappa^*(0, f) \frac{df}{\sqrt{z_0}}$$

Константу C_5 по этой формуле следует определять численно. Следуя [1], можно показать, что

$$M = \theta_w^{-1/2} (2\Lambda)^{-1} B \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\Lambda} \right) + \alpha^{-2\Lambda} + O(\alpha^{-4})$$

Автор благодарит Г. А. Тирского за постоянное внимание к работе.

Поступила 4 X 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. A s t r i v o s A. The asymptotic form of the laminar boundary-layer mass-transfer rate for large interfacial velocities. J. Fluid. Mech., 1962, vol. 12, № 3.
2. Г е р ш б е й н Э. А. Ламинарный многокомпонентный пограничный слой при больших вдувах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 1.
3. Л о й ц я н с к и й Л. Г. Ламинарный пограничный слой. М., Физматгиз, 1962.
4. Г а л а х о в М. А. Решения дифференциальных уравнений с малым параметром, имеющие в пределе разрыв. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1969, т. 9, № 1.
5. Е в г р а ф о в М. А. Асимптотические оценки и целые функции. М., Гостехиздат, 1957.
6. K u b o t a T., F e r n a n d e z F. L. Boundary-layer with large injection and heat transfer. AIAA Journal, 1968, vol. 6, № 1.