Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 532.516

МАЛЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ СТРУИ, ВЫТЕКАЮЩЕЙ ИЗ ЩЕЛИ

Н. С. Козин

(Москва)

Рассматривается устойчивость к малым потенциальным возмущениям струи, вытекающей из щелевого отверстия между плоскими стенками.

1. Стационарное течение. Рассматривается плоская задача об истечении струи идеальной жидкости из щелевого отверстия в сосуде, стенки которого представляют собой полуплоскости, угол между которыми равен 2α, $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$. Решение соответствующей стационарной задачи для несжимаемой жидкости приведено, например, в [1]. Оно задается отображением области годографа на область потенциала течения

$$\xi = \ln[\zeta^\beta(1-\zeta^{2\beta})^{-1}], \quad \xi = \varphi_0 + i\psi_0, \quad \zeta = u_0 - iv_0, \quad \beta = \pi/2\alpha \tag{1.1}$$

Здесь ξ — комплексный потенциал, ζ — комплексная скорость. Годограф течения представляет собой сектор $|\zeta| \leqslant 1$, $|\arg \zeta| \leqslant \alpha$, а область потенциала — полосу $|\psi_0| \leqslant \pi/2$. При этом лучам $\varphi_0 < -\ln 2$, $|\psi_0| = \pi/2$ соответствуют в физической плоскости $z_0 = x_0 + iy_0$ твердые стенки, а лучам $\varphi_0 > -\ln 2$, $|\psi_0| = \pi/2$ — свободная поверхность.

2. Уравнения для возмущений. Пусть течение (1.1) в момент времени $t = 0$ подвергается действию малых возмущающих сил, которые оставляют поле скоростей потенциальным. При этом потенциал возмущенного течения представляется в виде

$$f(z_0, 0) = \xi + \varepsilon f_1(z_0, 0) + O(\varepsilon^2)$$

Здесь ε — малый вещественный параметр, а функция $f_1(z_0, 0)$ аналитична и ограничена в области D_0 стационарного течения.

При $t = 0$ возмущенное течение потенциально, поэтому при $t > 0$ возмущения будут удовлетворять системе уравнений

$$\operatorname{Re}\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{w\bar{w}}{2} + \frac{p}{\rho} = 0, \qquad w = \frac{df}{dz} \tag{2.1}$$

Здесь $f(z, t)$ — комплексный потенциал, $w(z, t)$ — комплексная скорость, p — давление, ρ — постоянная плотность жидкости, $z = x + iy$ — комплексная переменная в области D_t физической плоскости течения.

Начальное возмущение мало, поэтому разумно предполагать, что D_t будет мало отличаться от D_0. Следуя [2], линеаризуем (2.1) с помощью конформного отображения $D_0 \to D_t$

$$z = z(z_0, t), \qquad z(\pm\infty, t) = \pm\infty \tag{2.2}$$

Отображение (2.2) существует, так как области D_0 и D_t мало отличаются, и имеет место представление $z = z_0 + \varepsilon z_1(z_0, t)$, $z_1 = z_0 O(1)$.

Положим

$$p(z, t) = p_0(z_0) + \varepsilon p_1(z_0, t), \quad w(z, t) = \zeta(z_0) + \varepsilon w_1(z_0, t)$$
$$f(z, t) = \xi(z_0) + \varepsilon[f_1(z_0, t) + \zeta z_1(z_0, t)]$$

Тогда из (2.2) в первом порядке по ε будем иметь

$$p_1 = -\rho \operatorname{Re}\left(\frac{\partial f_1}{\partial t} + \bar{\zeta} w_1\right), \qquad w_1 = \zeta\left(\frac{\partial f_1}{\partial \xi} + \zeta s(\xi) z_1\right) \tag{2.3}$$
$$s(\xi) = \beta^{-1}(1 + 4e^{2\xi})^{-1/2}$$

На свободной поверхности имеют место условия

$$p = \text{const}, \qquad \left(\frac{dz}{dt}\right)_n = (\bar{w})_n \tag{2.4}$$

Линеаризуя (2.4), находим

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{w_1}{\zeta}\right) = 0, \quad \operatorname{Im}\left(\zeta\frac{\partial z_1}{\partial t} + \zeta\frac{\partial z_1}{\partial \xi} + \frac{w_1}{\zeta}\right) = 0 \tag{2.5}$$

где ξ принадлежит лучам $\varphi_0 > -\ln 2$, $|\psi_0| = \pi/2$. На твердых стенках справедливы соотношения

$$\operatorname{Im}(w_1/\zeta) = 0, \qquad \operatorname{Im}(\zeta z_1) = 0 \tag{2.6}$$

Используя (2.6), можно показать, что (2.5) выполнены на твердых стенках. В силу аналитичности w_1 и z_1 в D_0, а также соотношения (2.3), функция w_1/ζ ограничена при $\xi \to \infty$, а в точках $\xi = -\ln 2 \pm i\pi/2$ имеет интегрируемую особенность. Предполагая $\zeta\, \partial z_1/\partial t$ и $\partial f_1/\partial t$ ограниченными в D_0, что соответствует гладкому изменению со временем гидродинамических функций и области D_t, получаем, что из (2.5), выполненных на границе полосы $|\psi_0| \leqslant \pi/2$, следует справедливость всюду в $|\psi_0| \leqslant \pi/2$ уравнений

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{w_1}{\zeta} = ia(t), \qquad \zeta\frac{\partial z_1}{\partial t} + \zeta\frac{\partial z_1}{\partial \xi} + \frac{w_1}{\zeta} = b(t) \tag{2.7}$$

Произвольные функции $a(t)$ и $b(t)$ в правой части (2.7) можно положить равными нулю. В самом деле, потенциал определен с точностью до функции времени, а отображение $D_0 \to D_t$ необходимо нормировать.

Исключая с помощью (2.3) потенциал f_1 из (2.7) при $a(t) = b(t) = 0$ и обозначая $w_2 = w_1/\zeta^2$, получаем систему

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\|\begin{matrix} w_2 \\ z_1 \end{matrix}\right\| + \left\|\begin{matrix} 1 & s(\xi) \\ 0 & 1 \end{matrix}\right\| \frac{\partial}{\partial \xi}\left\|\begin{matrix} w_2 \\ z_1 \end{matrix}\right\| + \left\|\begin{matrix} 2s(\xi) & 0 \\ 1(\xi) & 0 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} w_2 \\ z_1 \end{matrix}\right\| = 0 \tag{2.8}$$

Используя (2.7), можно также получить формулу для вычисления давления p_1 через возмущение скорости: $p_1 = \rho \operatorname{Re}[\zeta w_2(1 - |\zeta|^2)]$.

3. Начальные данные. Начальные данные для системы (2.8) задаются при $t = 0$ в виде $w_2(\xi, 0) = Q(\xi)$, $z_1(\xi, 0) = P(\xi)$. Функции $\rho(\xi)$ и $Q(\xi)$ предполагаются аналитическими в полосе $|\psi_0| \leqslant \pi/2$. Кроме того, они должны удовлетворять условиям на стенках («условиям согласования»), т. е.

$$\operatorname{Im}(\zeta P(\xi)) = \operatorname{Im}(\zeta Q(\xi)) = 0, \quad |\psi_0| = \pi/2, \quad \varphi_0 < -\ln 2 \tag{3.1}$$

Для эффективного описания функций $P(\xi)$ и $Q(\xi)$ удобно рассмотреть их в области годографа. Тогда условие (3.1) выполнено на отрезках $\zeta = re^{\pm i\alpha}$, $0 \leqslant r \leqslant 1$. Применяя в плоскости $\zeta_1 = \zeta^\beta$ принцип симметрии Шварца и теорему об устранимой особенности, получаем

$$Q = \sum_{k \geqslant n} i^k Q_k [r(\xi)]^{k-\frac{1}{\beta}}, \qquad P = \sum_{k \geqslant n} i^k P_k [r(\xi)]^{k-\frac{1}{\beta}} \tag{3.2}$$
$$r(\xi) = \sqrt{1 + e^{-2\xi}/4} - e^{-\xi}/2, \qquad n = [2\alpha/\pi] + 1$$

Здесь Q_k и P_k — вещественные числа. Выбор числа n производится из условия, что $p_1 \to 0$ при $\zeta \to 0$ ($\xi \to -\infty$), т. е. давление на бесконечности не меняется.

Итак, исследование вопроса о распространении возмущений свелось к решению задачи Коши для системы (2.8) с начальными данными (3.2), а исследование вопроса об устойчивости — к нахождению скорости роста по времени решений (2.8).

4. Предельный случай $\alpha = 0$. Случай, когда жидкость вытекает из трубы с параллельными стенками, особенно прост, и в этом случае можно получить явные формулы для решения (2.8), (3.2). При этом стационарное течение задается формулами $\xi = z_0$, $\zeta = 1$, $p_0 = \mathrm{const}$. Уравнения для возмущений получаются предельным переходом при $\alpha \to 0$ из (2.8)

$$\frac{\partial w_2}{\partial t} + \frac{\partial w_2}{\partial z_0} = 0, \qquad \frac{\partial z_1}{\partial t} + \frac{\partial z_1}{\partial z_0} + w_2 = 0 \tag{4.1}$$

а начальные условия — из (3.2)

$$w_2(z_0, 0) = \sum_{k \geqslant 1} i^k Q_k [r(\xi)]^k, \qquad z_1(z_0, 0) = \sum_{k \geqslant 1} i^k P_k [r(\xi)]^k \tag{4.2}$$

Решение (4.1) с начальными данными (4.2) имеет вид

$$\begin{aligned} w_2(z_0, t) &= \sum_{k \geqslant 1} i^k Q_k [r(z_0 - t)]^k \\ z_1(z_0, t) &= \sum_{k \geqslant 1} i^k (P_k - tQ_k) [r(z_0 - t)]^k \end{aligned} \tag{4.3}$$

Из (4.3) следует, что течение неустойчиво, имеет место линейный по t рост возмущений свободной поверхности; полученное решение имеет физический смысл лишь в течении конечного времени. В самом деле, при $w_2(z_0, 0) \neq 0$ в некоторый момент времени верхняя и нижняя границы струи обязательно перехлестнутся, что будет соответствовать распадению струи на капли.

Формулы (4.3) также показывают, что к задаче (4.1), (4.2) неприменим метод Фурье. В самом деле (4.1), (4.2) не имеют решения вида $e^{\lambda t} F_\lambda(z_0)$.

Этот факт указывает на отсутствие у течения собственных колебаний и «сносовый» характер распространения возмущений.

Прежде чем приступить к построению решений задачи (2.8), (3.2), следует сделать некоторые замечания.

1°. Система (2.8), описывающая возмущения, представляет собой систему с кратными характеристиками, имеющую вид «жордановой клетки». Как известно, для такой системы задача Коши не является корректной по Адамару. Корректность постановки задачи в данном случае достигается за счет жесткого требования аналитичности начальных данных в области течения.

2°. Характеристики системы (2.8) — линии тока соответствующего стационарного течения. С этой точки зрения линии тока представляют собой траектории, по которым распространяются малые потенциальные возмущения (известным является факт, что вихревые возмущения тоже переносятся по линиям тока).

3°. Использование комплексной переменной позволяет свести решение задачи, после отделения зависимости от времени, к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений (а не в частных производных, как это бывает в плоских задачах).

4°. При $\xi \to \infty$ асимптотики решений (2.8) и (4.1) должны совпадать, поэтому для решений (2.8) следует ожидать по крайней мере линейного роста по t; решение (2.8) следует искать в виде разложения не по элементарным волновым решениям, а по элементарным решениям с начальными данными

$$w_{2,k}(\xi, 0) = [r(\xi)]^{k-\frac{1}{\beta}} i^k;\ 0 \tag{4.4}$$

$$z_1(\xi, 0) = 0; \qquad [r(\xi)]^{k-\frac{1}{\beta}} i^k$$

Вообще говоря, применение метода Фурье к решению вопроса об устойчивости без анализа класса начальных возмущений может привести к упущениям и даже ошибкам. В работе [3] приведены примеры таких упущений. Применение метода Фурье привело авторов [2,4] к неправильному результату. Вычисленный ими спектр чисто вещественных собственных значений указывает на отсутствие волновых решений.

5. Построение решения. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, получающуюся применением преобразования Лапласа к (2.8) с начальными данными (3.2)

$$\frac{d}{d\xi}\begin{Vmatrix} w_\lambda \\ z_\lambda \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \lambda + s & -\lambda s \\ 1 & \lambda \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} w_\lambda \\ z_\lambda \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} Q - sP \\ P \end{Vmatrix} \tag{5.1}$$

$$w_\lambda = \int_0^\infty w_2 e^{-\lambda t} dt, \qquad z_\lambda = \int_0^\infty z_1 e^{-\lambda t} dt$$

$$\lambda = \sigma + i\tau, \qquad \sigma \geqslant \sigma_0 > 0$$

Чтобы показать, что существует решение (2.8) с начальными данными (3.2), достаточно убедиться в существовании частного решения системы (5.1), для которого в полосе $|\psi_0| \leqslant \pi/2$ справедлива оценка

$$|w_\lambda| = O(|\lambda|^{-1}), \qquad |z_\lambda| = O(|\lambda|^{-1}) \tag{5.2}$$

при достаточно больших $|\lambda|$. Тогда формулы решения задачи (2.8), (3.2) имеют вид

$$\begin{Vmatrix} w_2 \\ z_1 \end{Vmatrix} = v.\,p.\,\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \begin{Vmatrix} w_\lambda \\ z_\lambda \end{Vmatrix} e^{\lambda t} d\lambda \tag{5.3}$$

В целях упрощения построения решения рассмотрим случай начальных данных $P(\xi) = 0$, $Q(\xi) \neq 0$. При $P(\xi) \neq 0$, $Q(\xi) = 0$ построение проводится аналогично.

Следует заметить, что если при $\sigma \geqslant \sigma_0$ выполнена оценка $|w_\lambda| < \text{const}\,|\lambda|^{-1}$, то

$$z_\lambda = -\int_{-\infty}^{\xi} w_\lambda e^{\lambda(\eta-\xi)}d\eta$$

откуда следует оценка $|z_\lambda| < \text{const}\,|\lambda|^{-1}$.

Переходя в системе (5.1) при $P = 0$ к переменной $\zeta_1 = \zeta^\beta$ и неизвестным функциям $w_{\lambda,\alpha} = \zeta_1^{1/\beta}w_\lambda$, $z_{\lambda,\alpha} = \zeta_1^{1/\beta}z_\lambda$ получаем систему

$$\zeta_1 \frac{d}{d\zeta_1}\begin{Vmatrix} w_{\lambda,\alpha} \\ z_{\lambda,\alpha}\end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -\lambda c(\zeta_1), & \dfrac{\lambda}{\beta} \\ -c(\zeta_1), & \dfrac{1}{\beta} - \lambda c(\zeta_1)\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} w_{\lambda,\alpha} \\ z_{\lambda,\alpha}\end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} R(\zeta_1) \\ 0\end{Vmatrix} \tag{5.4}$$

$$c(\zeta_1) = \frac{1+\zeta_1^2}{1-\zeta_1^2}, \qquad R(\zeta_1) = c(\zeta_1)\sum_{k=n}^{\infty} i^k Q_k \zeta_1^k$$

Система (5.4) имеет регулярно особую точку $\zeta_1 = 0$. Следуя ([5], стр. 198), можно показать, что (5.4) имеет единственное решение, аналитическое в круге $|\zeta_1| < 1$. Разложение этого решения в ряд Тейлора имеет вид

$$\begin{Vmatrix} w_{\lambda,\alpha} \\ z_{\lambda,\alpha}\end{Vmatrix} = \sum_{k=n}^{\infty}\begin{Vmatrix} a_k(\lambda) \\ b_k(\lambda)\end{Vmatrix}\zeta_1^k \tag{5.5}$$

Коэффициенты $a_k(\lambda)$ и $b_k(\lambda)$ находятся из рекуррентных соотношений

$$a_n = \frac{r_n(n + \lambda c_0 - 1/\beta)}{\Delta_n(\lambda)}, \qquad b_n = -\frac{r_n c_0}{\Delta_n(\lambda)}$$

$$a_k = \Delta_k^{-1}\left[r_k\left(k + \lambda c_0 - \frac{1}{\beta}\right) - \lambda(k + \lambda c_0)\sum_{j=1}^{k-n} c_j\left(a_{k-j} - \frac{\lambda^2}{\beta}b_{k-j}\right)\right], \quad k > n$$

$$b_k = -\Delta_k^{-1}\left[c_0 r_k + k\sum_{j=1}^{k-n} c_j a_{k-j} + \lambda(k + \lambda c_0)\sum_{j=1}^{k-n} c_j b_{k-j}\right], \quad k > n$$

$$\Delta_k(\lambda) = (k + \lambda c_0)(k + \lambda c_0 - 1/\beta) + \lambda c_0/\beta$$

Здесь c_j, r_j — коэффициенты разложения функций $c(\zeta_1)$ и $R(\zeta_1)$ в ряд Тейлора.

Можно показать, что $\Delta_k(\lambda) \neq 0$ при $\sigma > 0$. Таким образом, ряд (5.5) представляет собой функцию, аналитическую при $|\zeta_1| < 1$, $\sigma > 0$. Зная (5.5), можно найти асимптотику при $\lambda \to \infty$ функции w_λ. Обозначим

$$A_k = \lim_{\lambda\to\infty}\lambda a_k, \quad B_k = \lim_{\lambda\to\infty}\lambda b_k$$

Рекуррентные формулы дают

$$A_n = r_n c_0^{-1}; \quad A_k = c_0^{-1}\left(r_k - \sum_{j=1}^{k-n} c_j A_{k-j}\right), \quad k > n$$

$$B_k = 0, \qquad k \geqslant n$$

Отсюда находим, что ряд $\sum\limits_{k\geqslant n} A_k\zeta_1{}^k$ сходится и его сумма равна $R(\zeta_1)\,c^{-1}(\zeta_1)$. Таким образом, имеет место асимптотическая формула при $\lambda\to\infty$

$$w_\lambda \sim Q(\zeta)\,\lambda^{-1}, \qquad Q(\zeta)=\sum_{k\geqslant n} i^k Q_k\zeta^{\beta_k}, \qquad \beta_k=\beta_k-1$$

Из (5.6) следует (5.2) и (5.3), а также разложение по элементарным решениям с начальными данными (4.4).

Так как функции w_λ и z_λ аналитичны при $\sigma>0$, то число a в представлении (5.3) можно выбирать как угодно малым положительным, т. е. прямую, вдоль которой ведется интегрирование, можно как угодно близко придвинуть к вертикальной оси. На свободной поверхности струи имеет место линейный по t рост возмущений, поэтому последняя неустойчива.

Экспериментальный факт устойчивости может быть объяснен с точки зрения «сносового» характера возмущений. Рассмотрим для простоты случай $\alpha=0$. Можно заметить, что рост возмущений имеет место в «лагранжевой» точке $z_0=t$. Вместе с тем в «эйлеровой» точке $z_0=\mathrm{const}$ возмущения стремятся к нулю: $z_1\sim te^{-t}$, $w_2\sim e^{-t}$. Таким образом, можно утверждать, что струя устойчива «на конечном расстоянии от щели».

Поступила 25 IX 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. М., Физматгиз, 1961.
2. Fox J. L., Morgan G. W. On the stability of some flows of ideal fluid with free surfaces. Quart. Appl. Math., 1954, vol. 11, № 4.
3. Кэйз К. М. Гидродинамическая устойчивость как задача с начальными данными. В сб. Гидродинамическая неустойчивость, М., «Мир», 1964.
4. Curle N. Unsteady two-dimensional flows with free boundaries. Proc. Roy. Soc., Ser. A., 1956, vol. 235, № 1202.
5. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений, М., «Мир», 1968.