Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 532.593+532.5:627

ВОЛНЫ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ОТ ВОЗМУЩЕНИЙ ДНА БАССЕЙНА ПРИ НАЛИЧИИ ДОКА

В. Ф. Витюк

(Одесса)

Изучается волновое движение, вызываемое колебаниями участка дна бассейна и наличием дока на поверхности тяжелой несжимаемой жидкости. Задача о возбуждении волн колеблющимся участком дна бассейна исследовалась в работах [1, 2]. В данной статье методом Винера — Хопфа [3] решается аналогичная задача с некоторым изменением граничных условий, а именно, часть свободной поверхности покрыта неподвижной жесткой пластиной. Получено выражение потенциала скорости, описывающее движение жидкости в рассматриваемой задаче. Из найденного решения как частные случаи следуют результаты работ [2, 4, 5]. Приведен численный пример, который показывает, что возвышение свободной поверхности со стороны дока меньше, чем в соответствующей точке, находящейся с другой стороны от колеблющегося участка дна.

1. На поверхности жидкости конечной глубины h находится неподвижная жесткая пластина, занимающая область $y = h$, $x \leqslant -l$, $-\infty < z < \infty$. Начало системы координат расположено на дне бассейна, ось y направлена вертикально вверх. Участок дна $y = 0$, $0 \leqslant x \leqslant a$, $-\infty < z < \infty$ подвергается вертикальной деформации по закону

$$y = \operatorname{Re}\,[v(x) \exp i (kz - \omega t)]$$

где $v(x)$ — гладкая функция, малая по абсолютной величине. Потенциал скорости $F(x, y, z, t)$, описывающий движение жидкости в этом случае, должен удовлетворять краевой задаче

$$\begin{gathered}
\Delta F(x, y, z, t) = 0 \qquad (0 \leqslant y \leqslant h,\ -\infty < x < \infty,\ -\infty < z < \infty) \\
\partial^2 F / \partial t^2 + g \partial F / \partial y = 0 \quad \text{при } y = h, \quad x > -l, \quad -\infty < z < \infty \\
\partial F / \partial y = 0 \quad \text{при } y = h, \quad x \leqslant -l, \quad -\infty < z < \infty
\end{gathered} \tag{1.1}$$

$$\partial F / \partial y = \left\{\begin{matrix} -\omega \operatorname{Re}\,[iv(x) \exp i (kz - \omega t)] & (0 \leqslant x \leqslant a) \\ 0 \quad (-\infty < x < 0,\ a < x < \infty) & \end{matrix}\right\} y = 0, \quad -\infty < z < \infty$$

Движение жидкости должно быть ограниченным в окрестности точки $(-l, h)$, вдали от дока и затухать по мере продвижения под доком. Первое, в частности, выражается в требовании ограниченности $\partial F / \partial t$ на кромке дока [1].

Функция $F(x, y, z, t)$ отыскивается виде

$$F(x, y, z, t) = \operatorname{Re}\,[\varphi(x, y) \exp i (kz - \omega t)] \tag{1.2}$$

Для $\varphi(x, y)$ имеем

$$\begin{gathered}
\Delta\varphi - k^2\varphi = 0 \qquad (0 \leqslant y \leqslant h,\ -\infty < x < \infty) \\
\partial\varphi / \partial y - \beta\varphi = 0 \quad \text{при } y = h, \quad x > -l \quad (\beta = \omega^2 / g)
\end{gathered}$$

$$\partial\varphi / \partial y = 0 \quad \text{при } y = h, \quad x \leqslant -l$$

$$\partial\varphi / \partial y = \begin{Bmatrix} -i\omega v(x) & (0 \leqslant x \leqslant a) \\ 0 & (-\infty < x < 0, \ a < x < \infty) \end{Bmatrix} \quad \text{при } y = 0 \tag{1.3}$$

$$|\varphi(x, y)| < M = \text{const} \quad \text{при } r = [(x+l)^2 + (y-h)^2] \to 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \varphi = D_+ \operatorname{ch} C_0 y e^{i\vartheta x}, \quad D_+ = \text{const}, \quad \vartheta = \text{const}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \varphi = D_- \exp kx, \quad k > 0, \quad D_- = \text{const}$$

где $\pm iC_0$ — корни уравнения $\beta \cos Ch + C \sin \text{Ch} = 0$.

После применения к задаче (1.3) преобразования Фурье и использования обозначений

$$\Phi(\alpha, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) e^{i\alpha x} dx, \qquad \alpha = \sigma + i\tau$$

$$\Phi_+(\alpha, y) = \int_{-l}^{\infty} \varphi(x, y) e^{i\alpha(x+l)} dx, \quad V(\alpha) = \int_0^a v(x) e^{i\alpha x} dx$$

$$\Phi_-(\alpha, y) = \int_{-\infty}^{-l} \varphi(x, y) e^{i\alpha(x+l)} dx, \quad \gamma^2 = \alpha^2 + k^2$$

возникает следующее функциональное уравнение:

$$\Phi_+(\alpha, h) + K(\alpha)\Phi_-(\alpha, h) = \frac{i\omega V(\alpha) e^{i\alpha l}}{\gamma \operatorname{sh} \gamma h - \beta \operatorname{ch} \gamma h} \tag{1.4}$$

$$K(\alpha) = \frac{\gamma \operatorname{sh} \gamma h}{\gamma \operatorname{sh} \gamma h - \beta \operatorname{ch} \gamma h} \qquad (0 < \tau < k, \ -\infty < \sigma < \infty)$$

Здесь $\Phi_+(\alpha, h)$ — функция, регулярная в полуплоскости $\tau > 0$, $\Phi_-(\alpha, h)$ — в полуплоскости $\tau < k$. Ядро уравнения (1.4) $K(\alpha)$ — функция, регулярная в рассматриваемой полосе.

$$\Phi(\alpha, y) = \frac{i\omega V(\alpha)}{\gamma} \frac{\gamma \operatorname{ch} \gamma (h-y) - \beta \operatorname{sh} \gamma (h-y)}{\gamma \operatorname{sh} \gamma h - \beta \operatorname{ch} \gamma h} - \frac{\beta e^{-i\alpha l} \Phi_-(\alpha, h) \operatorname{ch} \gamma y}{\gamma \operatorname{sh} \gamma h - \beta \operatorname{ch} \gamma h} \tag{1.5}$$

2. Функциональное уравнение (1.4) решается методом Винера — Хопфа [3]. Факторизуется функция [4]

$$K_+(\alpha) = \frac{i\alpha - k}{\beta[1 - h^2(\alpha^2 + k^2)/\rho_0^2]} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{[1 + k^2h^2/(n^2\pi^2)]^{1/2} - i\alpha h/(n\pi)}{[1 + k^2h^2/\rho_n^2]^{1/2} - i\alpha h/\rho_n}$$

$$K_-(\alpha) = \frac{1}{h(k + i\alpha)} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{[1 + k^2h^2/\rho_n^2]^{1/2} + i\alpha h/\rho_n}{[1 + k^2h^2/(n^2\pi^2)]^{1/2} + i\alpha h/(n\pi)}$$

где $\pm\rho_0/h$ и $\pm i\rho_n/h$ — корни уравнения $\rho \operatorname{sh} \rho h - \beta \operatorname{ch} \rho h = 0$, причем $\rho_n = n\pi + \beta h/(n\pi)$ при $n \gg 1$. Уравнение (1.4) умножим на $[K_+(\alpha)]^{-1}$

$$\frac{\Phi_+(\alpha, h)}{K_+(\alpha)} + \frac{\Phi_-(\alpha, h)}{K_-(\alpha)} = \frac{i\omega V(\alpha) e^{i\alpha l}}{[\gamma \operatorname{sh} \gamma h - \beta \operatorname{ch} \gamma h] K_+(\alpha)} = i\omega\Gamma(\alpha)$$

Применяя теорему разбиения [3], теорему Лиувилля [4] и учитывая условие (1.3) на кромке, из этого уравнения получим

$$\frac{\Phi_+(\alpha, h)}{K_+(\alpha)} - \frac{\omega}{2\pi}\int\limits_{ic-\infty}^{ic+\infty}\frac{\Gamma(\xi)\,d\xi}{\xi-\alpha} = -\frac{\Phi_-(\alpha, h)}{K_-(\alpha)} - \frac{\omega}{2\pi}\int\limits_{id-\infty}^{id+\infty}\frac{\Gamma(\xi)\,d\xi}{\xi-\alpha} = P = \mathrm{const}$$

$$(0 < c < \tau < d < k)$$

Отсюда

$$\Phi_-(\alpha, h) = -K_-(\alpha)\left[P + \frac{\omega}{2\pi}\int\limits_{id-\infty}^{id+\infty}\frac{\Gamma(\xi)\,d\xi}{\xi-\alpha}\right] \tag{2.1}$$

В (2.1) интеграл следует вычислять использованием вычетов полюсов верхней полуплоскости, так как подынтегральное выражение содержит множителем функцию $[K_+(\xi)]^{-1}$, аналитическую в верхней полуплоскости и имеющую в нижней полуплоскости бесчисленное множество полюсов.

Подынтегральное выражение в (2.1), кроме корней функции $[V(\xi)]^{-1}$, имеет в верхней полуплоскости в качестве особенностей полюсы

$$\xi = i\nu_n, \quad \nu_n = [k^2 + \rho_n^2 / h^2]^{1/2} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Используя теорию вычетов, (2.1) можно записать в виде

$$\Phi_-(\alpha, h) = -K_-(\alpha)\left[\sum \operatorname{res}(\xi_*) + P + \right. \tag{2.2}$$

$$\left. + \omega\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho_n^2 V(i\nu_n)\, e^{-\nu_n l}}{\nu_n h\,[\beta^2 h^2 - \beta h + \rho_n^2]\cos\rho_n\,(i\nu_n - \alpha)\, K_+(i\nu_n)}\right]$$

Здесь ξ_* — корни уравнения $[V(\xi)]^{-1} = 0$. После применения обратного преобразования Фурье к (1.5) с учетом выражения (2.2) получается решение задачи (1.3).

3. Пусть амплитудная функция $v(x) = \varepsilon \sin \pi/a\, x$, где ε — максимальное отклонение точек средней линии колеблющегося участка дна, которое предполагается малым по сравнению с h. Тогда

$$V(\alpha) = \varepsilon\int\limits_0^a \sin\frac{\pi}{a}x e^{i\alpha x}\,dx = \varepsilon\frac{\pi}{a}\,\frac{1 + e^{i\alpha a}}{\pi^2 / a^2 - \alpha^2} \tag{3.1}$$

Знаменатель правой части (3.1) не обращается в нуль в верхней полуплоскости $\tau > 0$ и поэтому в данном случае (2.2) принимает вид

$$\Phi_-(\alpha, h) = -K_-(\alpha)\,\times$$

$$\times\left[P + \varepsilon\omega\frac{\pi}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1 + e^{-\nu_n a})\,\rho_n^2 e^{-\nu_n l}}{\nu_n h\,[\beta^2 h^2 - \beta h + \rho_n^2]\cos\rho_n\,(\nu_n^2 + \pi^2 / a^2)\,(i\nu_n - \alpha)\, K_+(i\nu_n)}\right] \tag{3.2}$$

Применение обратного преобразования Фурье к (1.5) с учетом (3.1) и (3.2) позволяет записать решение задачи (1.3) в рассматриваемом частном случае

$$\varphi(x, y) = \Psi(x, y) + i\varepsilon\omega\frac{\pi}{a}\Big\{f_0(y)[\sin\delta(x-a) + \sin\delta x] + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y)(1 + e^{\nu_n a})e^{-\nu_n x}\Big\} \quad \text{при } a < x < \infty \tag{3.3}$$

$$\varphi(x, y) = i\varepsilon\omega\frac{\pi}{a}\Big\{\frac{a[b\,\mathrm{ch}\,b(h-y) - \beta\,\mathrm{sh}\,b(h-y)]}{\pi b(b\,\mathrm{sh}\,bh - \beta\,\mathrm{ch}\,bh)}\sin\frac{\pi}{a}x + f_0(y)\sin\delta x + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y)[e^{-\nu_n x} - e^{\nu_n(x-a)}]\Big\} + \Psi(x, y) \quad \text{при } 0 \leqslant x \leqslant a \tag{3.4}$$

$$\varphi(x, y) = \Psi(x, y) + i\varepsilon\omega\frac{\pi}{a}R(x, y) \quad \text{при } -l < x < 0 \tag{3.5}$$

$$\varphi(x, y) = i\varepsilon\omega\frac{\pi}{a}\Big\{\beta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n(1 + e^{-\nu_n a})}{(\nu_n^2 + \pi^2/a^2)\sin\rho_n}\cos\frac{\rho_n}{h}\,ye^{\nu_n x} + R(x, y)\Big\} + \beta\Big\{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{K_+(i\mu_n)}{\mu_n}\psi_-(i\mu_n)e^{\mu_n(x+l)}\cos\frac{n\pi}{h}y + \psi_-(ik)\frac{K_+(ik)}{2kh}e^{k(x+l)}\Big\} \quad \text{при } -\infty < x < -l \tag{3.6}$$

$$f_0(y) = \frac{2A_0}{\delta^2 - \pi^2/a^2}\Big[\frac{\rho_0}{h}\,\mathrm{ch}\frac{\rho_0}{h}(h-y) - \beta\,\mathrm{sh}\frac{\rho_0}{h}(h-y)\Big]$$

$$f_n(y) = \frac{A_n}{\nu_n^2 + \pi^2/a^2}\Big[\frac{\rho_n}{h}\cos\frac{\rho_n}{h}(h-y) - \beta\sin\frac{\rho_n}{h}(h-y)\Big]$$

$$A_0 = \frac{\rho_0}{\delta(\beta h - \beta^2h^2 + \rho_0^2)\,\mathrm{ch}\,\rho_0}, \qquad A_n = \frac{\rho_n}{\nu_n(\beta^2h^2 - \beta h + \rho_n^2)\cos\rho_n}$$

$$b = \Big(k^2 + \frac{\pi^2}{a^2}\Big)^{1/2}, \qquad \Psi(x, y) = -i\beta\Big\{A_0\frac{\rho_0}{h}[\psi_-(\delta)K_-(\delta)e^{-i\delta(x+l)} - \psi_-(-\delta)K_-(-\delta)e^{i\delta(x+l)}]\,\mathrm{ch}\frac{\rho_0}{h}y + i\sum_{n=1}^{\infty}A_n\frac{\rho_n}{h}\psi_-(-i\nu_n)K_-(-i\nu_n)e^{-\nu_n(x+l)}\cos\frac{\rho_n}{h}y\Big\}$$

$$R(x, y) = -\sum_{n=1}^{\infty} f_n(y)(1 + e^{-\nu_n a})e^{-\nu_n x}$$

$$\psi_-(\alpha) = -\frac{\Phi_-(\alpha, h)}{K_-(\alpha)}$$

Следует заметить, что из формул (3.3) — (3.6) получаются результаты работы [2] при $l \to \infty$, работы [4] при $\varepsilon \to 0$, а также работы [5] при $l \to 0$.

4. Если ограничиться случаем $l/h \gg 1$, т. е. считать, что расстояние от кромки пластины до колеблющегося участка дна превосходит глубину жидкости, то в выражениях (3.3) — (3.6) пропадут слагаемые, содержащие множитель $\exp(-\nu_n l)$, и вид свободной поверхности запишется формулами

$$\zeta(x, z, t) = \varepsilon\pi\beta\Big\{B_0[\sin\delta x + \sin\delta(x-a)] + \sum_{n=1}^{\infty} B_n(1 + e^{\nu_n a})e^{-\nu_n x}\Big\}\cos(kz - \omega t) \quad \text{при } a < x < \infty \tag{4.1}$$

$$\zeta(x,\ z,\ t)=\varepsilon\pi\beta\left\{\frac{a\sin\pi x/a}{\pi(b\operatorname{sh}bh-\beta\operatorname{ch}bh)}+B_0\sin\delta x+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\left[e^{-\nu_n x}-e^{\nu_n(x-a)}\right]\right\}\times$$

$$\times\cos(kz-\omega t)\quad\text{при}\quad 0\leqslant x\leqslant a \tag{4.2}$$

$$\zeta(x,\ z,\ t)=-\varepsilon\pi\beta\sum_{n=1}^{\infty}B_n\left(1+e^{-\nu_n a}\right)e^{\nu_n a}\cos(kz-\omega t) \tag{4.3}$$

$$\text{при}-l<x<0$$

$$B_0=\frac{2A_0\rho_0/h}{\delta^2-\pi^2/a^2},\qquad B_n=\frac{A_n\rho_n/h}{\nu_n^2+\pi^2/a^2}$$

В формулах (4.1) — (4.3) не учтены слагаемые, которые получаются из (3.3) — (3.6) при отсутствии движения дна ($\varepsilon=0$), т. е. слагаемые, определяющие собственные колебания свободной поверхности жидкости, которые для всех трех областей $(-l,\ 0)$, $[0,\ a]$ и $(a,\ \infty)$ имеют одинаковый вид.

Для значений параметров $\varepsilon=0.1$ *м*, $h=1$ *м*, $a=2$ *м*, $\omega=4.34$ *сек*, $k=1$ *м* вычисления дают следующие возвышения свободной поверхности ζ (*м*) вдоль x (*м*) : при $x=-2,\ 1,\ 4$, $\zeta=0.001,\ 0.194,\ 0.174$.

На основании этих данных можно заключить, что наличие на поверхности жидкости дока действует стабилизирующе на малые возмущения, возникающие в результате деформаций участка дна.

Поступила 14 VII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Стокер Дж. Дж. Волны на воде. Математическая теория и приложения. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
2. Черкесов Л. В. Неустановившиеся движения. Киев, «Наукова думка», 1970.
3. Нобл Б. Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
4. Heins A. E. Water waves over a channel of finite depth with a dock. Amer. J. Math., 1948, vol. 70, № 4.
5. Витюк В. Ф. Волны на поверхности жидкости, вызываемые колебаниями участка дна, при наличии дока. Матер. научн. конф. по математике и механике, ч. 2, Изд-во Томск. ун-та, 1970.