

О ВЗРЫВЕ В СРЕДЕ С ПЕРЕМЕННОЙ ПЛОТНОСТЬЮ С УЧЕТОМ ПЕРЕМЕННОГО ПРОТИВОДАВЛЕНИЯ

Н. С. Мельникова

(Москва)

Рассматривается решение неавтономной задачи о взрыве с учетом переменного начального давления в среде с переменной начальной плотностью, распределенной по степенному закону. Для начальной стадии взрыва в частных случаях получено точное аналитическое решение линеаризированной задачи. При решении полной неавтономной задачи получены зависимости безразмерных характеристик движения от геометрической координаты и радиуса ударной волны, определяемого из решения дифференциального уравнения. На основании полученных решений проведены расчеты для случаев сферической и цилиндрической симметрии при разных значениях определяющих параметров.

Постановка и решение одномерной автономной задачи о сильном точечном взрыве в газе даны Л. И. Седовым [1,2]. Предполагалось, что начальным давлением в газе по сравнению с давлением на фронте можно пренебречь, а начальная плотность считалась постоянной. Сильный взрыв в среде с переменной плотностью, зависящей от геометрической координаты по степенному закону, рассмотрен в работах [1,3]. Если учесть противодавление, задача становится неавтономной; ее численные решения даны в ряде работ [4-9], в этих работах начальное давление считалось постоянным.

Ниже рассматривается неавтономная задача о взрыве в среде с переменной начальной плотностью ρ_1 и переменным начальным давлением p_1

$$\rho_1 = Ar^{-\omega}, \quad p_1 = Cr^{-\kappa} \quad (0.1)$$

Если $\kappa = 2\omega - 2$, начальные распределения плотности и давления (0.1) при наличии гравитации удовлетворяют уравнениям равновесия среды [1]. В линеаризированной постановке частный случай этой задачи при $\kappa = \omega$ рассмотрен в работах [12,13].

Наличие существенных вычислительных трудностей при исследовании неавтономных задач привело к появлению в литературе ряда приближенных методов [3-7, 11]. При решении задач о неустановившемся движении газа внутри ударной волны Л. И. Седов предложил строить приближенные решения при помощи интерполяционных формул для основных функций, характеризующих движение газа [1].

В данной работе показано, что при исследовании взрыва в среде с переменной плотностью и переменным начальным давлением (0.1) интерполяционные формулы можно использовать только для одной функции, характеризующей движение газа. Остальные величины определяются из точных уравнений движения; при этом коэффициенты интерполяционных формул можно определить из интегральных и граничных условий задачи по аналогии с тем, как это делается в приближенных теориях пограничного слоя.

1. Постановка задачи и основные уравнения. Систему уравнений газовой динамики, описывающих одномерные адиабатические возмущенные движения среды при взрыве возьмем в следующем виде [2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= 0, & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial r} + \frac{(\nu - 1) \rho v}{r} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial r} + \gamma p \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\nu - 1}{r} v \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь t — время, r — эйлерова координата, v — скорость, p — давление, ρ — плотность, γ — показатель адиабаты, $\nu = 1, 2, 3$ соответственно для плоской, цилиндрической и сферической симметрии.

Для решения задачи о взрыве требуется найти решение системы уравнений (1.1), удовлетворяющее трем граничным условиям на фронте ударной волны ($r = r_2$)

$$v(r_2, t) = v_2, \quad \rho(r_2, t) = \rho_2, \quad p(r, t) = p_2 \quad (1.2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{2c}{\gamma+1} \left[1 - \frac{a^2}{c^2} \right], & \rho_2 &= \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \rho_1 \left[1 + \frac{2}{\gamma-1} \frac{a^2}{c^2} \right]^{-1} \\ p_2 &= \frac{2\rho_1 c^2}{\gamma+1} \left[1 - \frac{\gamma-1}{2\gamma} \frac{a^2}{c^2} \right], & c &= \frac{dr_2}{dt}, & a^2 &= \frac{\gamma p_1}{\rho_1} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Зависимости $v_2(t)$, $\rho_2(t)$, $p_2(t)$ заранее неизвестны, их определение равносильно определению радиуса ударной волны $r_2(t)$.

Кроме условий (1.2), в центре симметрии имеем граничное условие для скорости

$$v(0, t) = 0 \quad (1.4)$$

В момент времени $t = 0$ в центре симметрии выделяется конечная энергия E_0 и заданы начальные условия

$$\begin{aligned} v(r, 0) &= 0 & \rho(r, 0) &= Ar^{-\omega} \\ p(r, 0) &= Cr^{-\kappa}, & r_2(0) &= 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Из системы определяющих параметров видно, что если за искомые функции взять безразмерные величины

$$f = \frac{v}{c}, \quad g = \frac{\rho}{\rho_2}, \quad h = \frac{p}{p_2} \quad (1.6)$$

то они зависят от двух безразмерных переменных, за которые возьмем

$$\lambda = \frac{r}{r_2}, \quad q = \frac{a^2}{c^2}, \quad a_1 = a(r_2) \quad (1.7)$$

и постоянных параметров ν , γ , ω и κ .

2. Решение задачи в линеаризированной постановке. При изучении начальной стадии взрыва, когда взрывная волна еще достаточно сильная, переменная величина q мала, решение поставленной задачи можно определить методом линеаризации относительно известного автомодельного решения. Система (1.1) в безразмерных переменных (1.6) и (1.7) имеет вид

$$\begin{aligned} (f - \lambda) \frac{\partial f}{\partial \lambda} + \frac{(\gamma - 1 + 2q)[2\gamma - (\gamma - 1)q]}{\gamma(\gamma + 1)^2} \frac{1}{g} \frac{\partial h}{\partial \lambda} + \\ + \left(\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{f}{2q} \right) r_2 \frac{dq}{dr_2} + \frac{(\omega + \kappa)}{2} f = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$(f - \lambda) \frac{\partial \ln g}{\partial \lambda} + \frac{\partial f}{\partial \lambda} + \frac{(\nu - 1)f}{\lambda} + \left(\frac{\partial \ln g}{\partial q} - \frac{2}{\gamma - 1 + 2q} \right) r_2 \frac{dq}{dr_2} - \omega = 0$$

$$\begin{aligned} (f - \lambda) \frac{\partial \ln h}{\partial \lambda} + \gamma \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda} + \frac{(\nu - 1)f}{\lambda} \right) + \left(\frac{\partial \ln h}{\partial q} - \right. \\ \left. - \frac{2\gamma}{[2\gamma - (\gamma - 1)q]q} \right) r_2 \frac{dq}{dr_2} - \kappa = 0 \end{aligned}$$

Введем безразмерные радиус и время, а также безразмерный радиус ударной волны

$$R = \frac{r}{r^0}, \quad \tau = \frac{t}{t^0}, \quad R_2(q) = \frac{r_2}{r^0}$$

$$r^0 = \left(\frac{E_0}{c}\right)^n, \quad t^0 = r^{0m} \left(\frac{A}{\gamma c}\right)^{1/2}, \quad n = \frac{1}{\nu - \kappa}, \quad m = 1 - \frac{\omega - \kappa}{2} \quad (2.2)$$

Чтобы получить полное решение задачи о взрыве, нужно определить зависимость $R_2(q)$, а также функции $f(\lambda, q)$, $g(\lambda, q)$, $h(\lambda, q)$ в плоскости λ, q , внутри квадрата $0 \leq \lambda \leq 1$, $0 \leq q \leq 1$. Эти функции должны удовлетворять следующим граничным и начальным условиям:

$$f(1, q) = \frac{2}{\gamma + 1} (1 - q), \quad g(1, q) = h(1, q) = 1, \quad f(0, q) = 0$$

$$f(\lambda, 0) = f_0(\lambda), \quad g(\lambda, 0) = g_0(\lambda), \quad h(\lambda, 0) = h_0(\lambda) \quad (2.3)$$

где $f_0(\lambda)$, $g_0(\lambda)$, $h_0(\lambda)$ — известные функции, соответствующие автономной задаче, когда $q = 0$ [2].

При $\omega < \nu$ масса газа внутри сферического объема, содержащего начало координат, и скорость распределения ударной волны в начальной стадии взрыва конечны [1]. Если $\omega < \nu$ и $\nu - \kappa > 0$, то для начальной стадии взрыва величина q мала, следовательно, можно искать линеаризованное решение задачи в виде [3]

$$f(\lambda, q) = f_0(\lambda) + qf_1(\lambda) + \dots$$

$$g(\lambda, q) = g_0(\lambda) + qg_1(\lambda) + \dots$$

$$h(\lambda, q) = h_0(\lambda) + qh_1(\lambda) + \dots \quad (2.4)$$

$$\frac{dq}{dR_2} = \frac{q}{nR_2(1 + A_1q + \dots)}$$

Если подставить функции $f(\lambda, q)$, $g(\lambda, q)$, $h(\lambda, q)$ из (2.4) в систему уравнений (2.1), то, пренебрегая членами порядка q^2 и выше, получим для определения функций $f_1(\lambda)$, $g_1(\lambda)$, $h_1(\lambda)$ и постоянной A_1 систему линейных дифференциальных уравнений вида

$$(f_0 - \lambda)g_0f_1' + \frac{2(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2}h_1' + \left[f_0' + \left(\frac{\omega - \kappa}{2} + \frac{1}{2n}\right)\right]g_0f_1 +$$

$$+ \left[(f_0 - \lambda)f_0' + \left(\frac{\omega - \kappa}{2} - \frac{1}{2n}\right)f_0\right]g_1 + \frac{4\gamma - (\gamma - 1)^2}{\gamma(\gamma + 1)^2}h_0' + \frac{1}{2n}f_0g_0A_1 = 0 \quad (2.5)$$

$$g_0f_1' + (f_0 - \lambda)g_1' + \left(\frac{\nu - 1}{\lambda}g_0 + g_0'\right)f_1 +$$

$$+ \left(\frac{\nu - 1}{\lambda}f_0 + f_0' + \frac{1}{n} - \omega\right)g_1 - \frac{2}{(\gamma - 1)n}g_0 = 0$$

$$\gamma h_0f_1' + (f_0 - \lambda)h_1' + \left(h_0' + \gamma \frac{\nu - 1}{\lambda}h_0\right)f_1 + \gamma \left(f_0' + \frac{\nu - 1}{\lambda}f_0\right)h_1 +$$

$$+ \frac{1}{n}\left(A_1 - \frac{\gamma - 1}{2\gamma}\right)h_0 - \kappa h_1 = 0$$

Преобразуем систему (2.5) к виду, удобному для дальнейших исследований. Для этого введем искомые функции $F(\lambda)$, $G(\lambda)$ и $H(\lambda)$, связанные с $f_1(\lambda)$, $g_1(\lambda)$, $h_1(\lambda)$ соотношениями

$$f_1(\lambda) = (f_0 - \lambda)F(\lambda), \quad g_1(\lambda) = g_0G(\lambda), \quad h_1(\lambda) = h_0H(\lambda) \quad (2.6)$$

После преобразований (2.6) получим систему уравнений относительно новых искомых функций

$$\begin{aligned} & (f_0 - \lambda)^2 F' + \frac{2(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2} \frac{h_0}{g_0} H' + (f_0 - \lambda) \left[2f_0' - 1 + \frac{\omega - \kappa}{2} + \frac{1}{2n} \right] F + \\ & + \frac{2(\gamma - 1) h_0'}{(\gamma + 1)^2 g_0} H + \left[(f_0 - \lambda) f_0' + \frac{\omega - \kappa}{2} - \frac{1}{2n} \right] G + \\ & + \frac{4\gamma - (\gamma - 1)^2 h_0'}{\gamma(\gamma + 1)^2 g_0} + \frac{1}{2n} f_0 A_1 = 0 \\ & (f_0 - \lambda) F' + (f_0 - \lambda) G' + (f_0' - 1) F + \left(\frac{v-1}{\lambda} + \frac{g_0'}{g_0} \right) (f_0 - \lambda) F + (2.7) \\ & + \left(\frac{v-1}{\lambda} f_0 + f_0' + \frac{1}{n} - \omega \right) G + (f_0 - \lambda) \frac{g_0'}{g_0} G - \frac{2}{(\gamma - 1)n} = 0 \\ & \gamma(f_0 - \lambda) F' + (f_0 - \lambda) H' + (f_0 - 1) \gamma F + (f_0 - \lambda) \left[\frac{h_0'}{h} + \gamma \frac{v-1}{\lambda} \right] F + \\ & + (f_0 - \lambda) \frac{h_0'}{h_0} H + \gamma \left[f_0' + \frac{v-1}{\lambda} f_0 - \kappa \right] + \frac{1}{n} \left(A_1 - \frac{\gamma-1}{2\gamma} \right) = 0 \end{aligned}$$

Граничные условия

$$F(1) = \frac{2}{\gamma - 1}, \quad G(1) = 0, \quad H(1) = 0 \quad (2.8)$$

Решение поставленной линеаризованной задачи о взрыве в общем случае (при любых ω) сводится к численному интегрированию системы уравнений (2.7) при граничных условиях (2.8), при этом коэффициенты системы определяются автомодельным решением задачи. Однако в случае, когда

$$\omega = \omega_1 = \frac{3v - 2 + \gamma(2 - v)}{\gamma + 1} \quad (2.9)$$

решение можно получить в замкнутом виде. Это объясняется тем, что при указанном значении ω автомодельное решение имеет простой вид

$$f_0(\lambda) = \frac{2}{\gamma + 1} \lambda, \quad g_0(\lambda) = \lambda^{v-2}, \quad h_0(\lambda) = \lambda^v \quad (2.10)$$

Подставив $f_0(\lambda)$, $g_0(\lambda)$, $h_0(\lambda)$ из (2.10) в коэффициенты уравнений (2.7), получим систему трех обыкновенных неоднородных уравнений с коэффициентами, зависящими от параметров γ и v

$$\begin{aligned} & \lambda F' + \frac{2}{\gamma - 1} \lambda H' + \frac{2v}{\gamma - 1} H - \frac{1}{2(\gamma - 1)} \left[8 + \left(\frac{1}{n} + 2b_3 - 2 \right) (\gamma + 1) \right] F + \\ & + \frac{1}{(\gamma - 1)^2} \left[2(1 - \gamma) - \left(\frac{1}{n} - 2b_3 \right) (\gamma + 1) \right] G + \\ & + \frac{v}{(\gamma - 1)^2} \left[\frac{4\gamma - (\gamma - 1)^2}{\gamma} + \frac{\gamma + 1}{vn} A_1 \right] = 0 \quad (2.11) \\ & \lambda F' + \lambda G' + 2(v - 1) F - \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} 2(2v + \gamma - 1) \left[\frac{1}{n} + b_2 - v \right] G + \frac{2(\gamma + 1)}{(\gamma - 1)^2 n} = 0 \\ & \gamma \lambda F' + \lambda H' + v(\gamma + 1) F - \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} (v + \gamma b_1) H + \frac{\gamma + 1}{(\gamma - 1)n} \left(\frac{\gamma - 1}{2\gamma} - A_1 \right) = 0 \end{aligned}$$

Здесь $b_3 = (\omega - \kappa) / 2$, $b_2 = -\omega$, $b_1 = -\kappa$.

Если за независимую переменную принять $\ln \lambda$, то система (2.11) будет системой уравнений с постоянными коэффициентами.

Характеристическое уравнение системы (2.11) в общем случае кубическое; для $\gamma = 3$ при $\nu = 2; 3$; а при $\nu = 1$ для любых γ оно распадается на линейное и квадратное.

Записав решение системы (2.11) и возвратившись к прежним искомым функциям по формулам (2.6), получим

$$\begin{aligned} f_1(\lambda) &= \frac{1-\gamma}{1+\gamma} \lambda [\alpha_1 + C_1 \lambda^{k_1} + C_2 \lambda^{k_2} + C_3 \lambda^{k_3}] \\ g_1(\lambda) &= \lambda^{\nu-2} \left[\alpha_2 + \frac{(k_1+2\nu-2)(\gamma-1)}{\nu(\gamma+1) - k_1(\gamma-1) + 2(\nu-1)(\gamma-3)} C_1 \lambda^{k_1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(k_2+2\nu-2)(\gamma-1)}{\nu(\gamma+1) - k_2(\gamma-1) + 2(\nu-1)(\gamma-3)} C_2 \lambda^{k_2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(k_3+2\nu-2)(\gamma-1)}{\nu(\gamma+1) - k_3(\gamma-1) + 2(\nu-1)(\gamma-3)} C_3 \lambda^{k_3} \right] \\ h_1(\lambda) &= \lambda^\nu \left[\alpha_3 + \frac{[k_1\gamma + \nu(\gamma+1)](\gamma-1)}{\nu(\gamma+1) - k_1(\gamma-1) + 2(\nu-1)\gamma(\gamma-3)} C_1 \lambda^{k_1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{[k_2\gamma + \nu(\gamma+1)](\gamma-1)}{\nu(\gamma+1) - k_2(\gamma-1) + 2(\nu-1)\gamma(\gamma-3)} C_2 \lambda^{k_2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{[k_3\gamma + \nu(\gamma+1)](\gamma-1)}{\nu(\gamma+1) - k_3(\gamma-1) + 2(\nu-1)\gamma(\gamma-3)} C_3 \lambda^{k_3} \right] \end{aligned} \quad (2.12)$$

Здесь C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, k_1, k_2, k_3 — корни характеристического уравнения системы (2.11)

$$\begin{aligned} \alpha_i &= B_i + A_1 D_i, \quad i = 1, 2, 3 \\ B &= \nu + \gamma b_1, \quad D = 2(2\nu + \gamma - 1) + (b_2 + 1/n - \nu)(\gamma + 1) \\ B_1 &= \frac{2\gamma B B_3 - (\gamma - 1)/n}{2\nu\gamma(\gamma - 1)}, \quad D_1 = \frac{B D_3 + 1/n}{\nu(\gamma - 1)}, \quad D_2 = \frac{2(\nu - 1)[B D_3 + 1/n]}{\nu(\gamma - 1) D} \\ B_2 &= \frac{1}{\nu\gamma(\gamma - 1) D} \left\{ 2\gamma(\nu - 1) B B_3 + \frac{1}{n} [2\nu\gamma(\gamma + 1) - (\nu - 1)(\gamma - 1)] \right\} \\ B_3 &= \frac{\nu^2}{\gamma\Delta} [(\gamma - 1)^2 - 4\gamma] D(\gamma - 1) - \frac{2}{\gamma\Delta} \left[1 - \gamma - (\gamma + 1) \left(\frac{1}{2n} - b_3 \right) \right] \times \\ &\times \left[\frac{2}{n} (\gamma + 1) \nu\gamma - \frac{(\nu - 1)(\gamma - 1)}{n} \right] - \frac{(\gamma - 1)^2}{2\gamma\Delta} \left[4 + (\gamma + 1) \left(\frac{1}{2n} + b_3 - 1 \right) \right] \frac{D}{n} \\ D_3 &= \frac{\gamma - 1}{\nu\Delta} \left[4 + (\gamma + 1) \left(\frac{1}{2n} + b_3 - 1 \right) \right] \frac{D}{n} - \frac{\gamma^2 - 1}{\Delta} \frac{D}{n} - \\ &- \frac{4(\nu - 1)}{\nu\Delta} \left[1 - \gamma - (\gamma + 1) \left(\frac{1}{2n} - b_3 \right) \right] \frac{1}{n} \\ \Delta &= 2\nu^2(\gamma - 1)^2 D - (\gamma - 1) \left[4 + (\gamma + 1) \left(\frac{1}{2n} - 1 + b_3 \right) \right] B D + \\ &+ 4(\nu - 1) \left[1 - \gamma - (\gamma + 1) \left(\frac{1}{2n} - b_3 \right) \right] B \end{aligned}$$

Постоянные C_1, C_2, C_3 и A_1 определяются из граничных условий для функций $f_1(\lambda), g_1(\lambda), h_1(\lambda)$.

После нахождения величины A_1 можно найти $R_2(q)$ и $\tau(q)$. Известно, что для автомодельного решения имеют место зависимости [1]

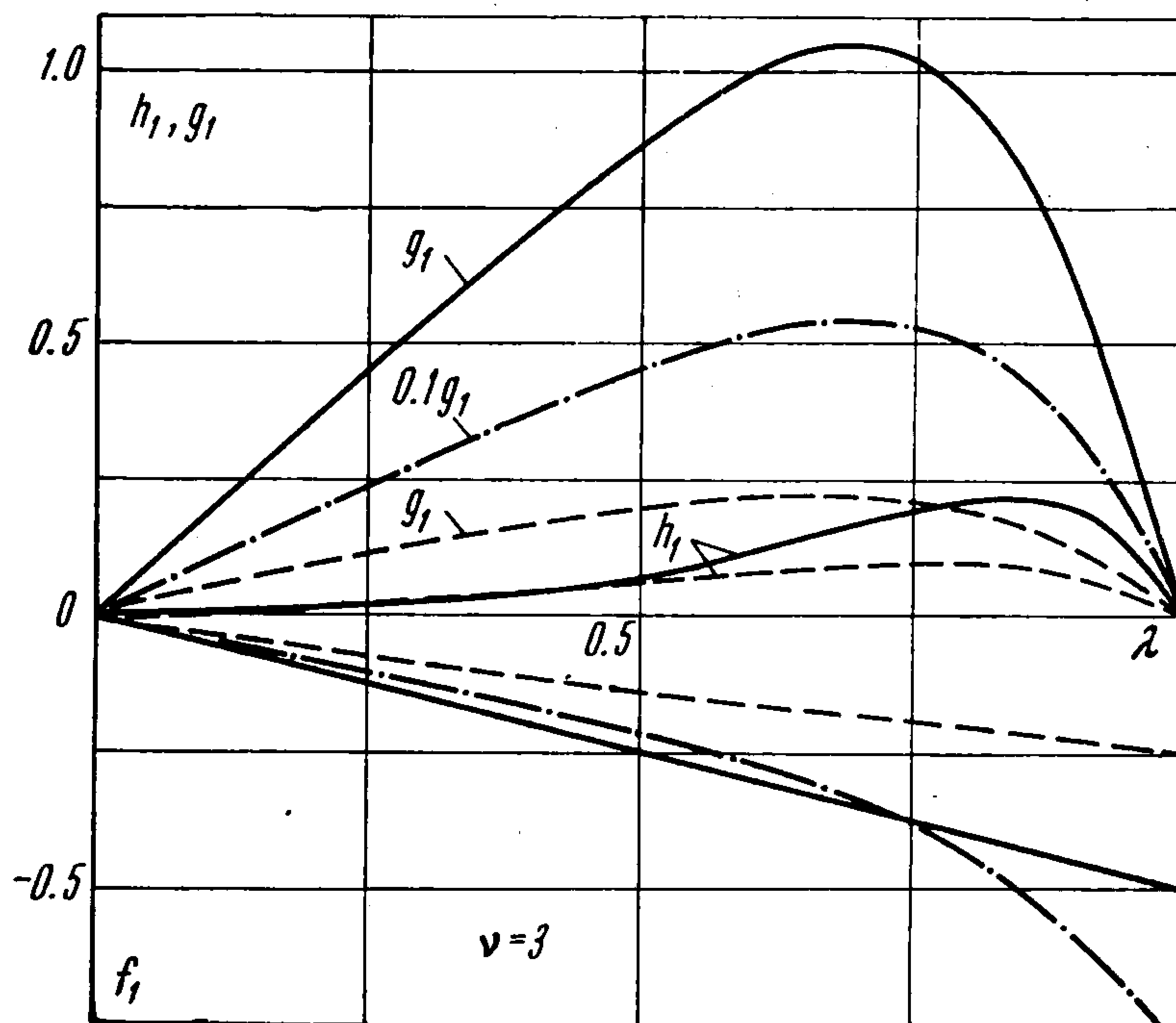
$$R_2(q) = A_0 q^n, \quad \tau(q) = \delta A_0^m q^{n/q}, \quad A_0 = \frac{\delta^{2n}}{(\gamma\alpha_0)^n}, \quad \delta = \frac{2}{\nu + 2 - \omega} \quad (2.13)$$

Для линеаризированной задачи из (2.4) с учетом (2.13) получим

$$R_2(q) = A_0 q^n \exp(n A_1 q), \quad \tau(q) = \delta A_0^m q^{n/\delta} \left[1 + \frac{mn}{n + \delta} A_1 \delta \right] \quad (2.14)$$

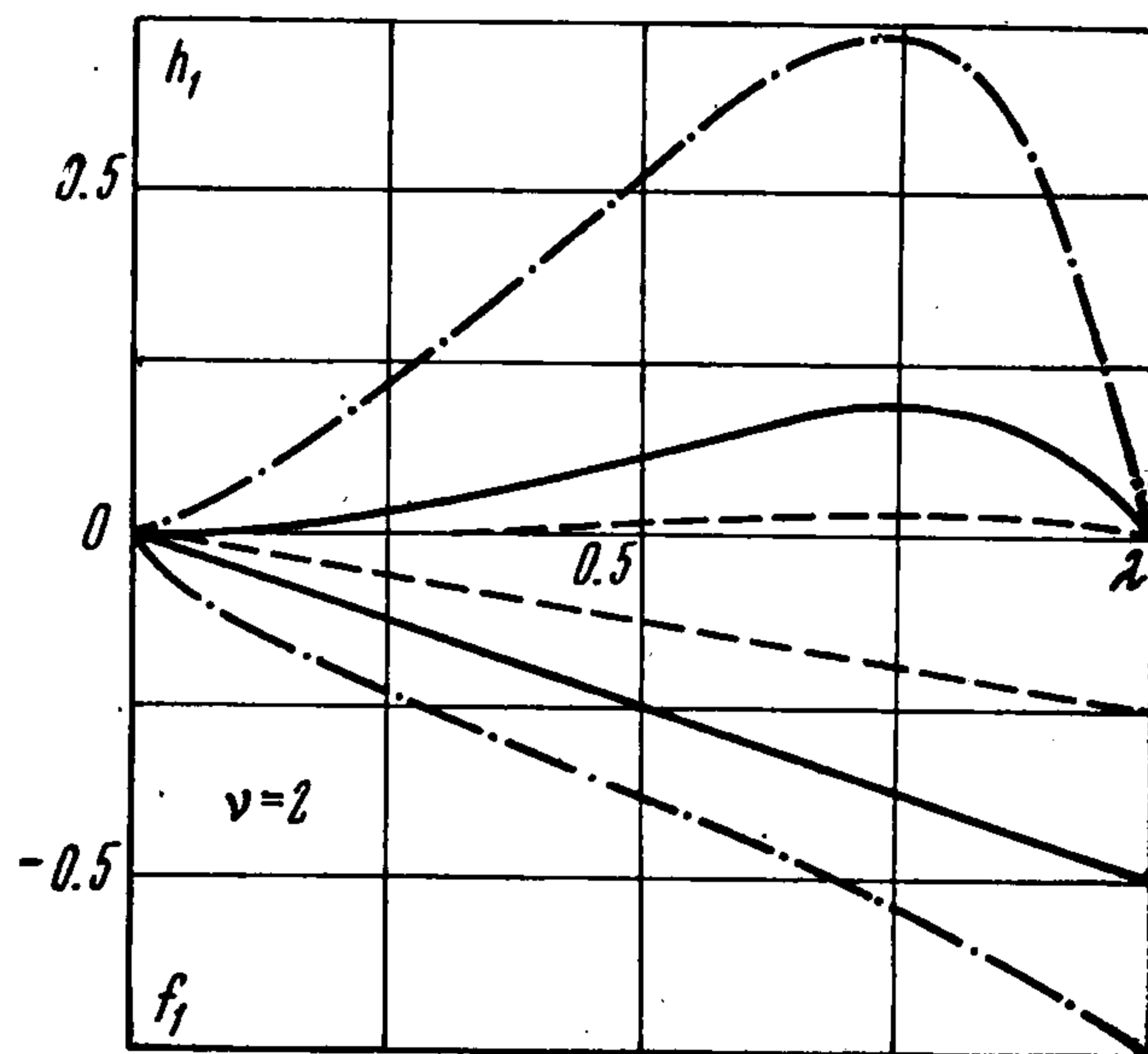
С использованием формул (2.12) и граничных условий построены зависимости для $f_1(\lambda)$, $g_1(\lambda)$, $h_1(\lambda)$ (фиг. 1—3) при разных ν , κ и γ .

На фиг. 1, 2 представлены величины h_1 , f_1 , g_1 , характеризующие отличие давления, скорости и плотности от автомодельных значений, при разных законах распределения начальной плотности и начального давления в случае сферической (фиг. 1,



Фиг. 1

$\nu = 3$) и цилиндрической (фиг. 2, $\nu = 2$) симметрии при $\gamma = 3, 7, 5/3$; соответствующие ω определяются по формуле (2.9). На фиг. 1 сплошные линии $\gamma=3, \kappa=0$; пунктирные линии $\gamma=7, \kappa=1/3$; штрихпунктирные линии $\gamma=1.5, \kappa=2.4$. На фиг. 2 сплошные линии $\gamma=3, \kappa=0$; пунктирные линии $\gamma=7, \kappa=-1$; штрихпунктирные линии $\gamma=5/3, \kappa=1$. На фиг. 3 даны величины h_1, f_1, g_1 в случае постоянной начальной плотности, но переменного начального давления при $\nu = 3, \gamma = 7$, f_1 дано пунктирной линией.



Фиг. 2

3. Решение нелинеаризированной задачи. В начальной стадии взрыва, когда взрывная волна достаточно сильна (для малых q) движение газа описывается линеаризованным решением, это решение можно использовать для задания начальных данных при расчете полной неавтомодельной задачи приближенными аналитическими или численными методами [7,10,12].

Для решения полной неавтомодельной задачи о взрыве требуется найти решение системы (1.1), удовлетворяющее краевым и начальным условиям (1.2) — (1.5).

Определение зависимостей $v_2(t)$, $\rho_2(t)$ и $p_2(t)$ в соотношении (1.2) равносильно определению радиуса ударной волны $r_2(t)$. Для этого необходимо ввести соотношение, которое связывало бы энергию взрыва E_0 с параметрами на фронте ударной волны. Этим соотношением служит закон сохранения

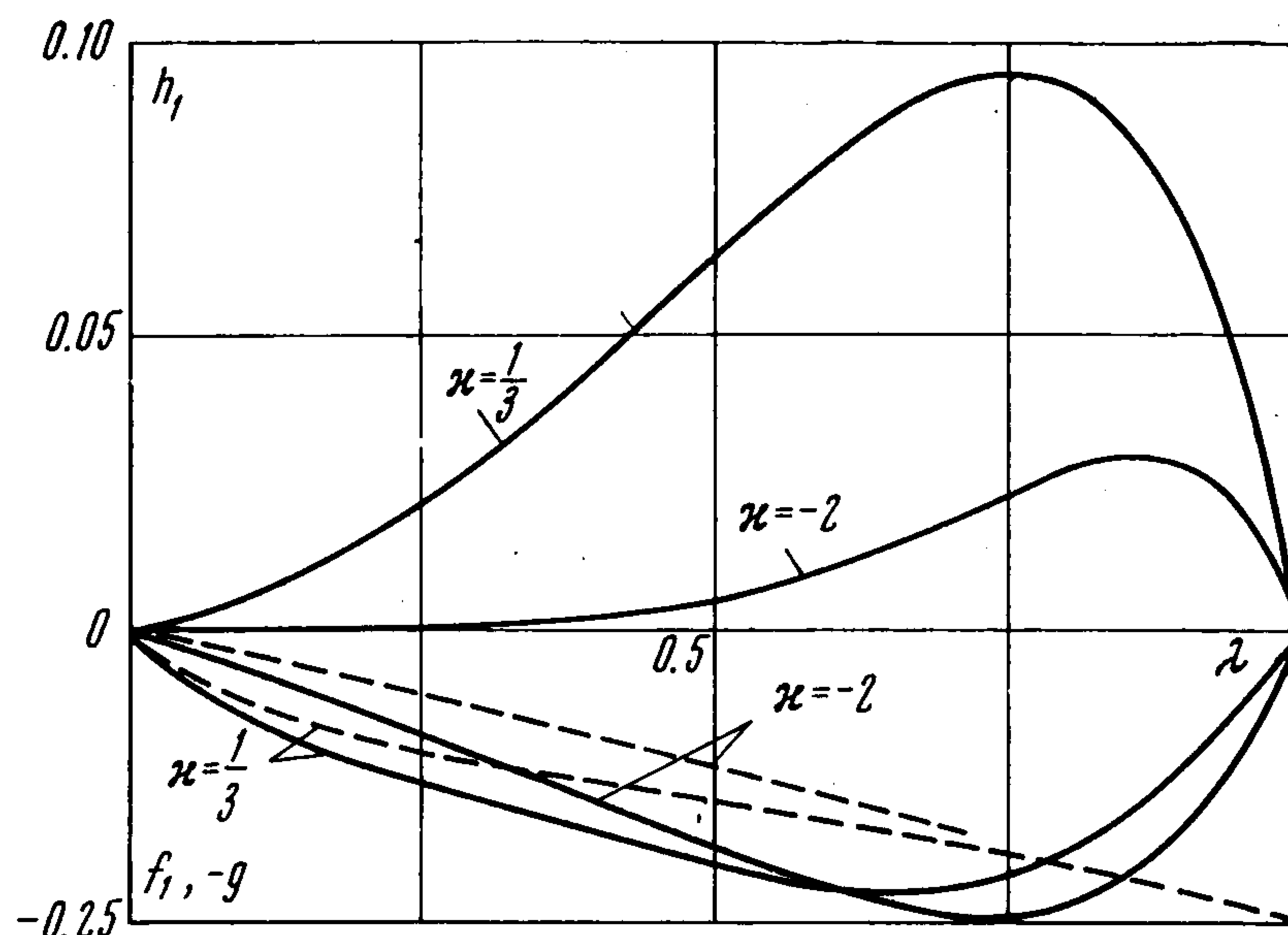
ния энергии, согласно которому полная энергия движущегося газа в каждый момент времени равняется сумме начальной энергии газа, вовлеченного в движение, и энергии взрыва E_0 .

В интегральном законе сохранения энергии перейдем к безразмерным переменным (1.8) и будем считать в дальнейшем постоянной в начальном распределении давления (0.1) $\kappa = \omega$. Получим

$$E_0 + \delta_v \frac{\rho_1 r_2^v}{(v-\omega)(\gamma-1)} = \delta_v r_2^v \left[\frac{\rho_2 v_2^2}{2} \int_0^1 \left(\frac{v}{v_2} \right)^2 \left(\frac{\rho}{\rho_2} \right) \lambda^{v-1} d\lambda + \frac{\rho_2}{\gamma-1} \int_0^1 \frac{\rho}{\rho_2} \lambda^{v-1} d\lambda \right]$$

$$\delta_v = 2\pi(v-1) + (v-2)(v-3) \quad (3.4)$$

Интегральным законом удобно пользоваться для определения радиуса ударной волны $r_2(t)$, если найдено решение системы уравнений (1.1). Сис-



Фиг. 3

тема (1.1) с условиями (1.2) — (1.5) имеет решение, причем все искомые функции распределения газодинамических величин определяются в явном виде, если известна зависимость эйлеровой координаты r от t и лагранжевой координаты ξ .

Будем искать r в следующем виде:

$$r = c(t) \xi^{\alpha_1(t)} + b \quad (3.2)$$

В качестве лагранжевой координаты берем начальную координату частицы ξ . Так как в момент прохождения через частицу ударной волны лагранжева координата $\xi = r_2$, то коэффициенты в (3.2) имеют вид

$$b = 0, \quad c(t) = r_2^{1-\alpha_1(t)} \quad (3.3)$$

Из закона сохранения масс в дифференциальной форме, используя (3.2) (3.3), получим

$$\rho = \rho_2 \left(\frac{r}{r_2} \right)^{\alpha(t)} \quad (3.4)$$

$$\alpha(t) = v \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right) - \omega \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad \alpha_1(t) = \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad (3.5)$$

В дальнейшем будем считать, что распределение плотности внутри ударной волны определяется формулами (3.4), (3.5). Тогда из второго

уравнения системы (1.1) можно определить скорость, а из первого — давление в газе. Третьим уравнением системы (1.1) — уравнением энергии — можно воспользоваться для определения радиуса ударной волны $r_2(t)$, но удобнее пользоваться интегральным законом сохранения энергии (3.1) для всей области возмущенного движения, заключенного внутри ударной волны.

Подставим выражение $\rho(r, t)$ из (3.4) во второе уравнение системы (1.1) и решим его относительно скорости с учетом граничного условия в центре (1.4). Получим

$$v(r, t) = v_2(t) \frac{r}{r_2} - \frac{r}{\alpha(t) + v} \frac{d\alpha}{dt} \ln \frac{r}{r_2} \quad (3.6)$$

Подставим $\rho(r, t)$ и $v(r, t)$ в первое уравнение (1.1) согласно (3.4) и (3.6) и решим его относительно давления с учетом граничного условия на ударной волне (1.2). Получим

$$p(r, t) = p_2 + \frac{\rho_2 r_2 H_1}{\alpha(t) + 2} - \frac{\rho_2 r_2}{\alpha(t) + 2} \left(\frac{r}{r_2} \right)^{\alpha(t)} \left[H_1 + H_2 \ln \frac{r}{r_2} + H_3 \left(\ln \frac{r}{r_2} \right)^2 \right] \quad (3.7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{v_2^2}{r_2} + \frac{dv_2}{dt} - \frac{v_2}{r_2} \frac{dr_2}{dt} + \frac{dr_2}{dt} \frac{d}{dt} \left(\ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) - v_2 \frac{d}{dt} \left(\ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) - \frac{H_2}{\alpha(t) + 2} \\ H_2 &= 2H_3 - 2v_2 \frac{d}{dt} \left(\ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) - \frac{r_2 \rho_1}{\rho_2} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right) - \frac{2H_3}{\alpha(t) + 2} \\ H_3 &= r_2 \left[\frac{d}{dt} \left(\ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \right]^2 \end{aligned}$$

После некоторых преобразований формулы (3.4), (3.6), (3.7), определяющие распределение безразмерных характеристик движения в возмущенной области, можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{p}{p_2} &= 1 + \frac{H_1 \rho_2 r_2}{(\alpha + 2) p_2} (1 - \lambda^{\alpha+2}) - \frac{\rho_2 r_2}{p_2} \lambda^{\alpha+2} (H_2 + H_3 \ln \lambda) \ln \lambda \quad (3.8) \\ \frac{v}{v_2} &= (1 - H_4 \ln \lambda) \lambda, \quad \frac{\rho}{\rho_2} = \lambda^\alpha, \quad \alpha = v \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right) - \omega \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad \lambda = \frac{r}{r_2} \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} H_1 &= -\frac{a^2}{r_0} \frac{2}{(\gamma + 1) q^2} \left[\frac{(1 - q^2) \psi}{(\gamma + 1) R_2} + \frac{(1 + 3q^2)}{q} \frac{dq}{dR_2} \right] - \frac{\psi}{\Omega - v\psi} H_2 \\ H_2 &= \frac{16a^2}{r_0} \left\{ \frac{(1 - q^2)}{(\gamma + 1) \psi q} \frac{dq}{dR_2} - \frac{2R}{(\Omega - v\psi) \psi} \left(\frac{dq}{dR_2} \right)^2 + \frac{R}{4\psi q} \frac{d^2 q}{dR_2^2} \right\} \\ H_3 &= \frac{16a^2}{r_0} \frac{R}{\psi^2} \left(\frac{dq}{dR_2} \right)^2, \quad H_4 = -\frac{2(\gamma + 1) R q}{(1 - q^2) \psi} \frac{dq}{dR_2} \\ q &= \frac{a}{c}, \quad \psi = \gamma - 1 + 2\gamma^2, \quad \Omega = 2(v - \omega) + (v + 2 - \omega)(\gamma - 1) + 4q^2 \end{aligned}$$

Решение (3.8) удовлетворяет всем граничным условиям и выражается через параметры на фронте ударной волны и координату фронта $r_2(t)$, время t в это решение явно не входит.

Из формул (3.8) и (1.2) ясно, что все характеристики движения газа в возмущенной области можно выразить через функцию $r_2(t)$. Подчинив решение (3.8) интегральному закону сохранения энергии (3.1), получим

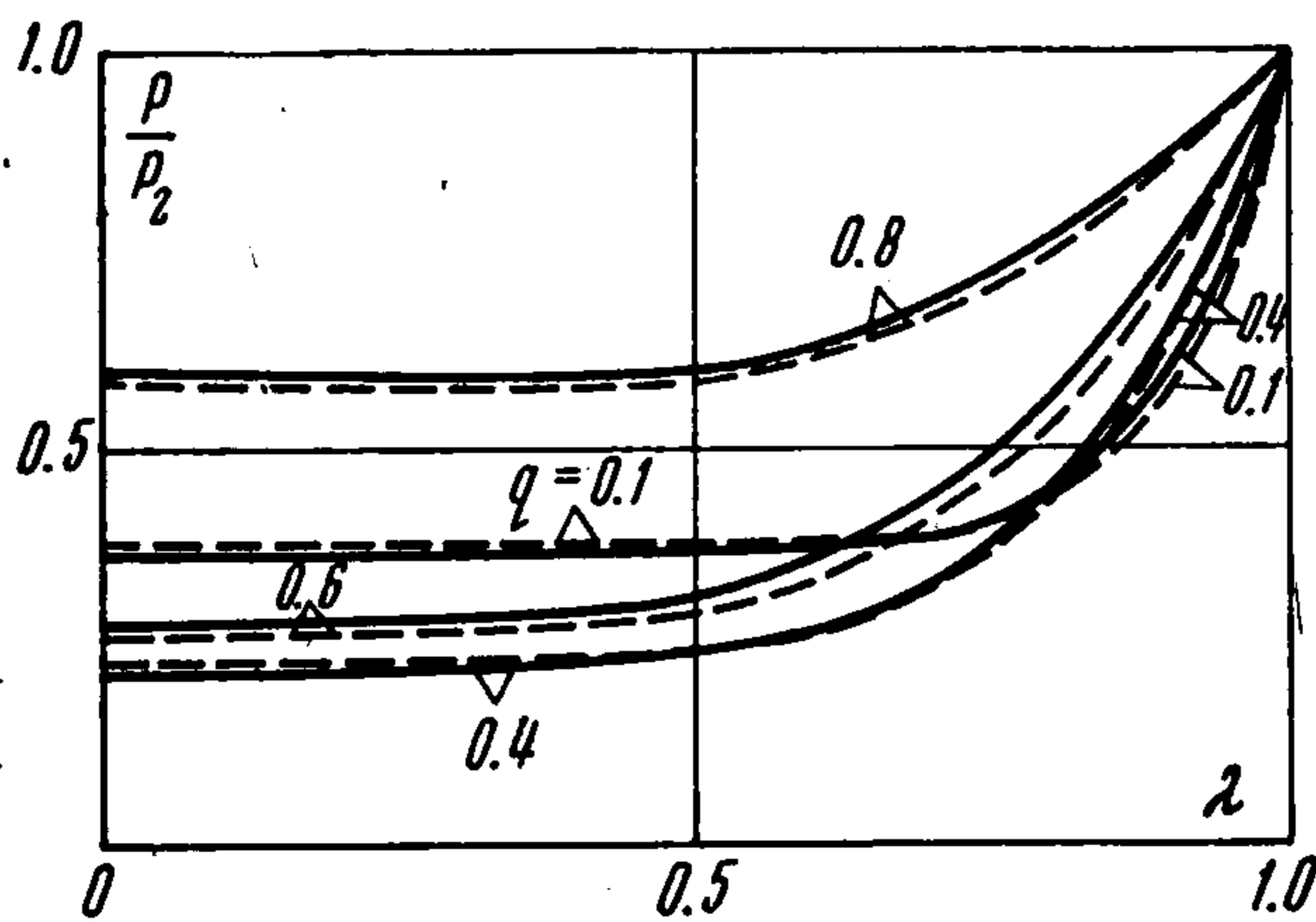
уравнение, из которого можно найти закон движения ударной волны

$$R_2^2 q \frac{d^2 q}{dR_2^2} - 4R_2^2 q^2 \frac{[2 + \nu(\gamma - 1)]}{\Omega} \left(\frac{dq}{dR_2} \right)^2 + \frac{(1 + 3q^2)}{2(\gamma + 1)} \frac{\Omega R_2}{q} \frac{dq}{dR_2} +$$

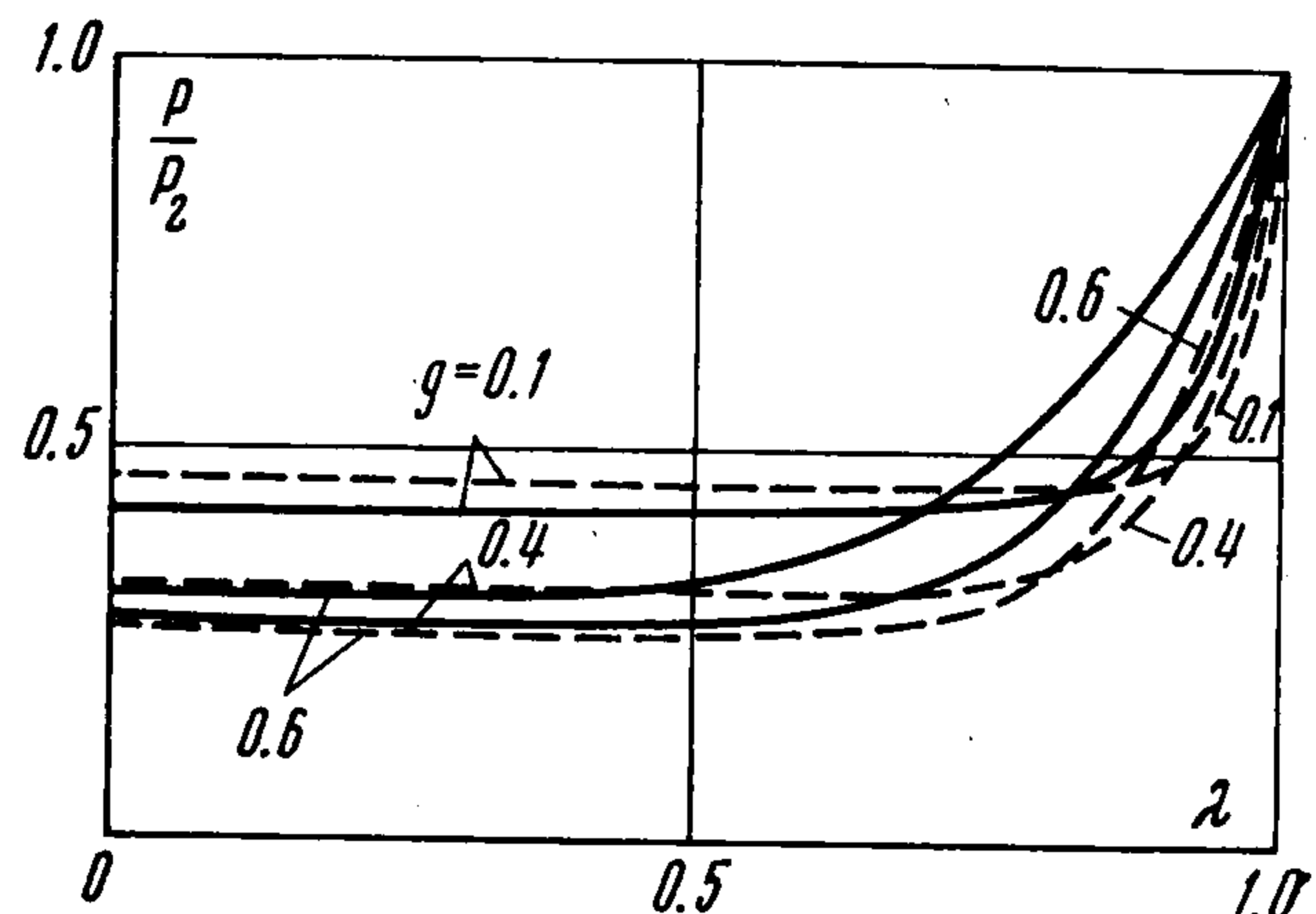
$$+ \frac{2(1 - q^2) R_2 q}{\gamma + 1} [\nu(\gamma - 1) + 2] \frac{dq}{dR_2} + \frac{(1 - q^2) \Omega}{2(\gamma + 1)^2} [\psi - \Omega - \nu(\gamma - 1)(1 - q^2)] +$$

$$+ \frac{\nu(\gamma - 1) \Omega^2 q^2}{4\gamma(\gamma + 1) \delta_\nu R_2^{\nu - \omega}} - \frac{\omega \Omega^2 q^2}{(\nu - \omega) 4\gamma(\gamma + 1)} = 0 \quad (3.9)$$

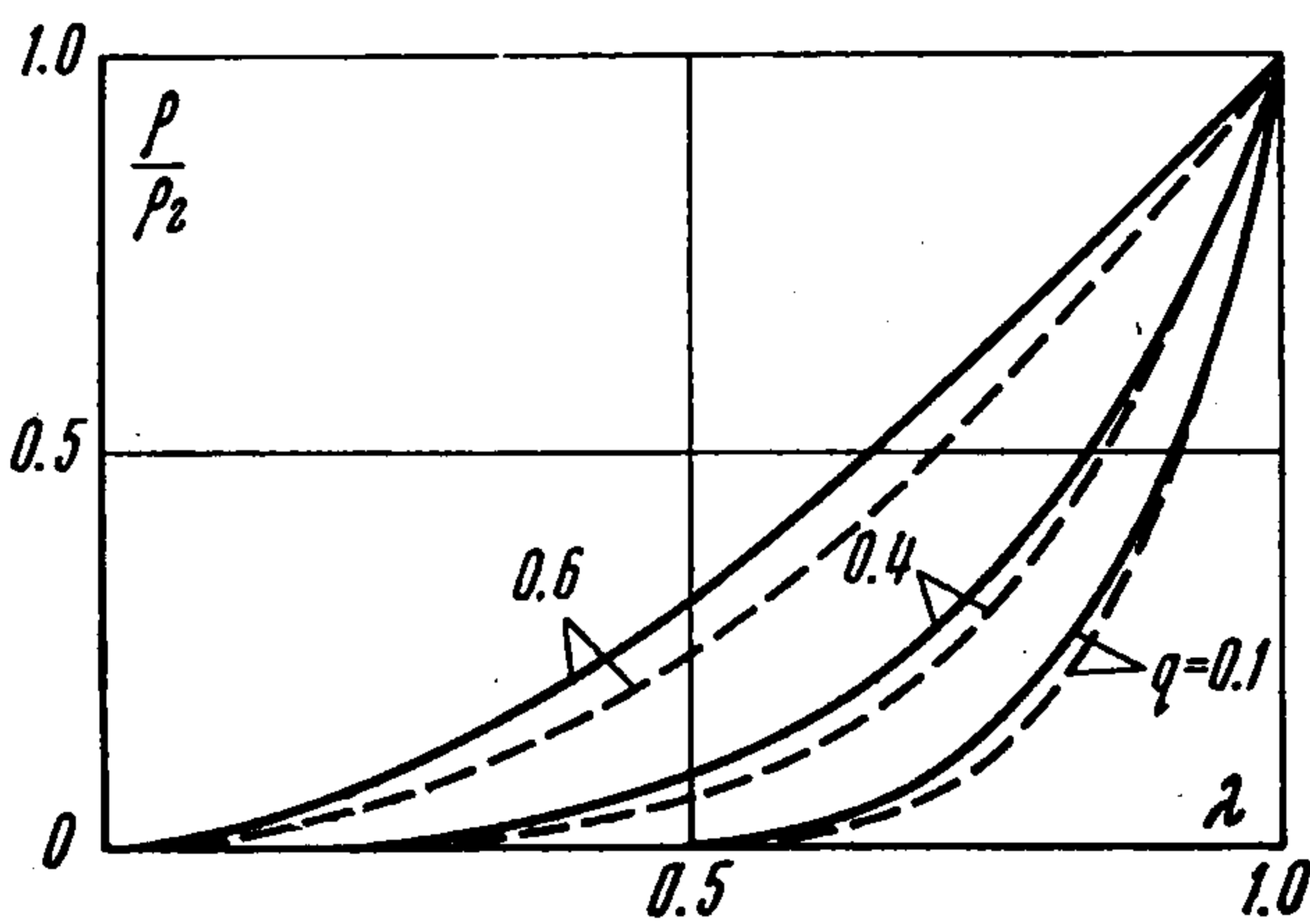
Для численного интегрирования уравнения (3.9) сведем его к системе двух уравнений первого порядка. Взяв за независимое переменное параметр $q = a/c$, а за иско-



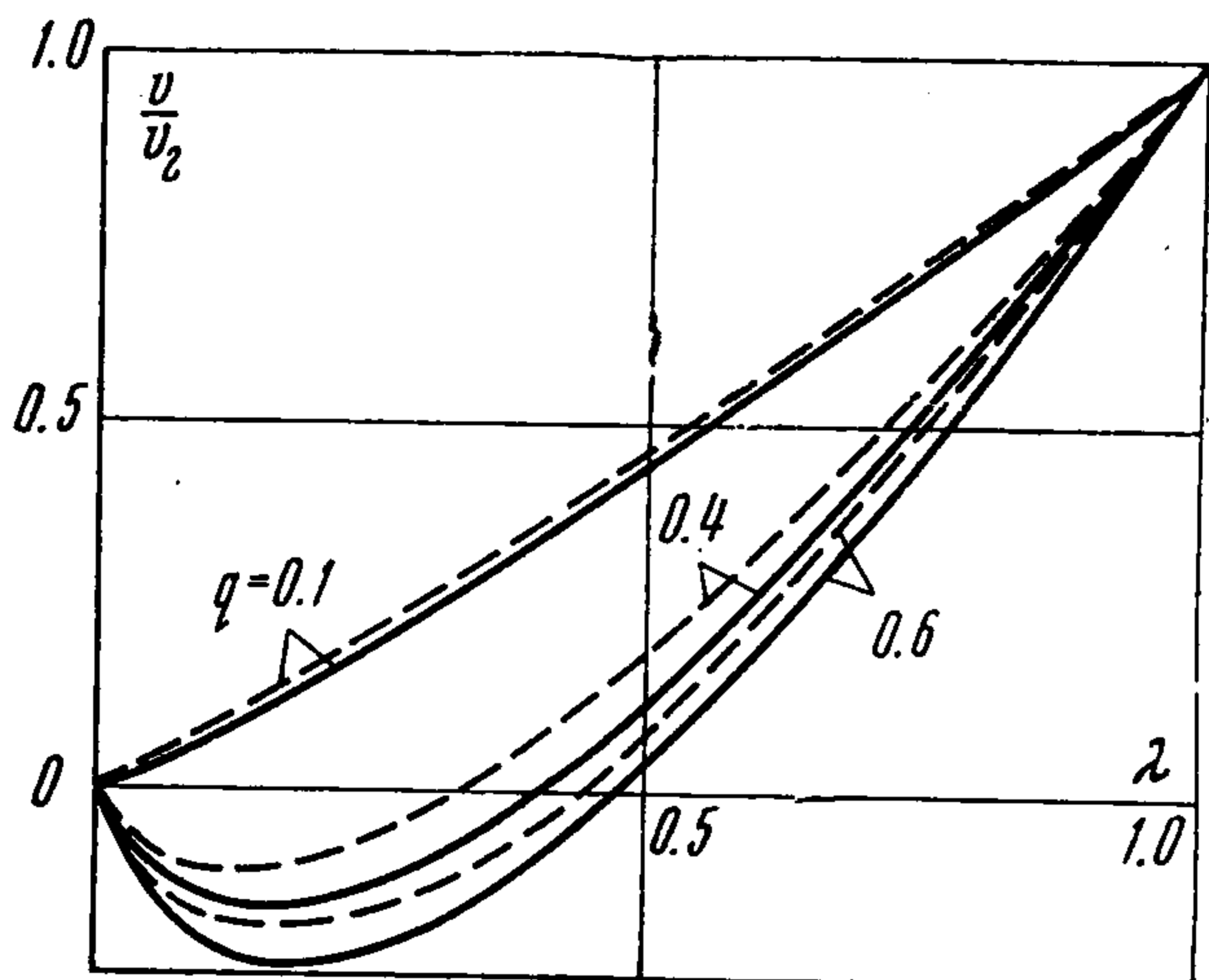
Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

мые функции $R_2(q)$ и $\sigma(q) = dq/dR_2$, получим после некоторых преобразований

$$\frac{d\sigma}{dq} = \frac{4[2 + \nu(\gamma - 1)]q}{\Omega} \sigma - \frac{(1 + 3q^2)}{2(\gamma + 1)R_2 q^2} \Omega - \frac{2(1 - q^2)[2 + \nu(\gamma - 1)]}{(\gamma + 1)R_2} -$$

$$- \frac{(1 - q^2)\Omega}{2(\gamma + 1)^2 R_2^2 q \sigma} [\psi - \Omega - \nu(\gamma - 1)(1 - q^2)] -$$

$$- \frac{\nu(\gamma - 1)\Omega^2 q}{4\gamma(\gamma + 1)\sigma \delta_\nu R_2^{\nu + 2 - \omega}} + \frac{\omega \Omega^2 q}{4(\nu - \omega)(\gamma + 1)\sigma R_2^2}$$

$$\frac{dR_2}{dq} = \frac{1}{\sigma}$$

Начальное условие для решения системы (3.10) нужно брать в точке $q = 0$, $R_2 = 0$. Эта точка особая; асимптотика вблизи нее записывается в виде

$$q = C_0 R_2^{\nu - \omega/2}, \quad C_0^2 = \frac{\delta_\nu \gamma [2(\gamma - 1)(\gamma - 3) - 3(\nu - \omega)(\gamma + 1)]}{\nu(\gamma^2 - 1)[2(\nu - \omega) + (\nu + 2 - \omega)(\gamma - 1)]} \quad (3.11)$$

Методом Рунге — Кутты было проведено интегрирование системы уравнений (3.10) с асимптотикой (3.11) для случаев сферической симметрии ($\nu = 3$) при разных значениях показателя адиабаты γ и показателя ω в законе распределения плотности и давления.

На фиг. 4, 5 показаны распределения полей безразмерных давлений при значениях $\gamma = 5/3$ (фиг. 4) и $\gamma = 1.4$ (фиг. 5) и разных значениях параметров q , ω , (сплошная линия $\omega = 0.5$, пунктирная $\omega = 0.33$).

На фиг. 6 при $\gamma = 5/3$ представлено распределение безразмерной плотности для разных q , ω ($\omega = 0.5; 0.33$).

На фиг. 7 при $\omega = 0.5$ представлены безразмерные скорости для разных q , γ , (сплошная линия $\gamma = 1.4$, пунктирная $\gamma = 5/3$).

Из фиг. 4, 5 видно, что величина безразмерного давления для заданного γ с уменьшением ω изменяется немонотонно. Из фиг. 6 видно, что с уменьшением ω безразмерная плотность уменьшается. Из фиг. 7 следует, что при заданном $\omega = 0.5$ безразмерные скорости увеличиваются с увеличением γ .

Поступила 13 IV 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., Гостехиздат, 1957.
2. Седов Л. И. Движение воздуха при сильном взрыве. Докл. АН СССР, 1946, т. 52, № 1.
3. Коробейников В. П., Мельникова Н. С., Рязанов Е. В. Теория точечного взрыва, М., Физматгиз, 1961.
4. Хоцимский Д. Е., Кондрашова И. Л., Власова З. П., Казакова Р. К. Расчет точечного взрыва с учетом противодействия. Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1957, т. 50.
5. Sakurai A. On propagation and structure of the blast wave. J. Phys. Soc. Japan, 1953, vol. 8, № 5, 1954, vol. 9, № 2.
6. Мельникова Н. С., Саламахин Т. М. О расчете точечного взрыва в различных газах. ПМТФ, 1964, № 4.
7. Коробейников В. П., Чушкин П. И. Метод расчета точечного взрыва в газах. Докл. АН СССР, 1964, т. 154, № 3.
8. Коробейников В. П., Мельникова Н. С. О точных решениях линеаризованной задачи о точечном взрыве с противодействием. Докл. АН СССР, 1957, т. 116, № 2.
9. Коробейников В. П., Рязанов Е. В. К теории линеаризованных задач о взрыве с учетом противодействия. ПММ, 1959, т. 23, вып. 7.
10. Мельникова Н. С. О точечном взрыве в среде с переменной начальной плотностью. Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1966, т. 37.
11. Карликов В. П. Решение линеаризованной осесимметричной задачи о точечном взрыве в среде с переменной плотностью. Докл. АН СССР, 1955, т. 101, № 6.
12. Korablenikov V. P. On the gas flow due to solar flares. J. Solar Res. and Study Solar Terrestrial, Phys. 1969, № 7.
13. Коробейников В. П. О приложении анализа размерностей к вопросам движения межпланетного газа при солнечных вспышках. Докл. АН СССР, 1969, т. 185, № 6, 54.