

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ПЛАЗМЕ С ТЕНЗОРНОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ

Ю. П. Емец

(Киев)

Дается точное решение задачи о распределении тока в неоднородной плазме, находящейся в магнитном поле между непроводящими плоскостями. Исследуется слоистая плазма, параметры которой принимают различные значения в последовательно чередующихся ячейках. В рассматриваемой задаче с двухфазной моделью неоднородностей электрическое поле имеет периодическую структуру и определяется как взаимным соотношением локальных свойств плазмы в ячейках так и самой геометрией ячеек. Расчет электрического поля сводится к последовательному решению двух краевых задач Римана для четной двояко-периодической функции.

Полученное решение задачи используется для вычисления эффективных значений проводимости и параметра Холла, позволяющих, в рамках принятой точно разрешимой электродинамической модели, установить аномальные свойства плазмы в сильном магнитном поле. В частном случае из общего решения следуют формулы для расчета плоского электрического поля в анизотропно проводящей среде для прямоугольной области при наличии двух идеальных электродов.

1. Периодическая структура поля в полосе. При анизотропии проводимости, обусловленной эффектом Холла, распределение тока чувствительно к наличию неоднородностей параметров среды. В сильном магнитном поле даже слабые изменения характеристик среды существенно определяют структуру электрического поля.

Рассмотрим слоистую неоднородность параметров в среде, которая может возникать, например, в магнитогидродинамических устройствах при перемещении по каналу газа с чередующимися зонами высокой и низкой температуры или при переменной подаче в газ легкоионизируемых веществ. Такого рода периодические неоднородности движущейся плазмы в некоторых случаях создаются специально в схемах магнитогидродинамических преобразователей энергии переменного тока.

Необходимо отметить, что стратификация проводимости среды — довольно распространенное явление. Оно наблюдается, например, при прохождении электрического тока в газах в результате развития ионизационной неустойчивости; разряд положительного столба оказывается обычно слоистым в широких пределах изменения давления газа. Другой пример слоистой структуры дают полупроводники с неоднородным распределением примесей.

Для исследования электрических полей в такого рода системах рассмотрим следующую модельную задачу. Пусть среда, в которой проявляется эффект Холла, находится в магнитном поле между непроводящими параллельными плоскостями и пусть параметры среды (проводимость и

коэффициент Холла) принимают два различных значения в последовательно чередующихся прямоугольных ячейках (фиг. 1).

Исследуем двумерное распределение тока, применяя следующую систему уравнений:

$$\mathbf{j} + \frac{\beta}{H} \mathbf{j} \times \mathbf{H} - \sigma \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (1.1)$$

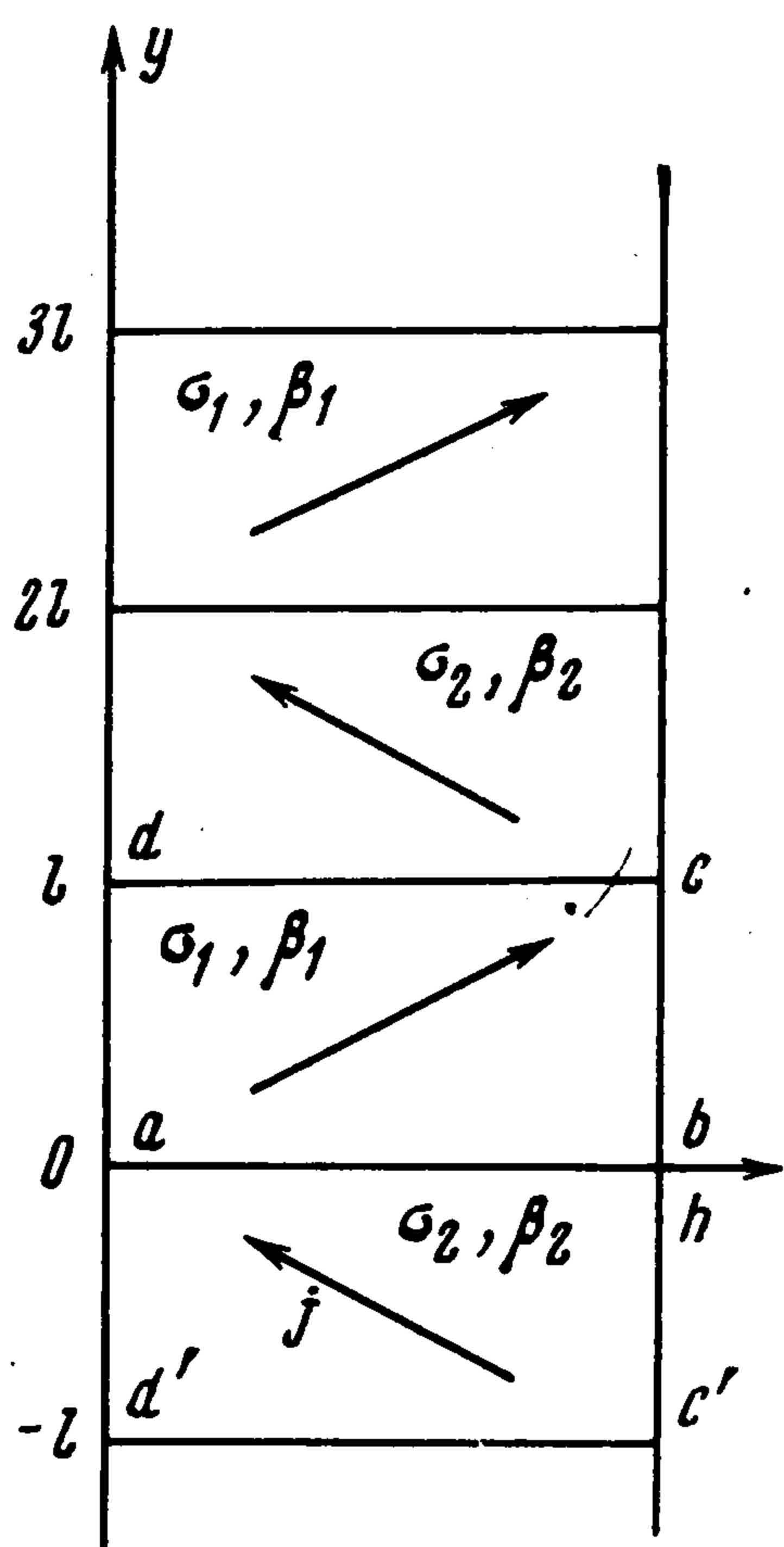
Здесь использованы общепринятые обозначения.

Будем считать, что в полосе $0 < x < h$ величины \mathbf{j} , \mathbf{E} , \mathbf{H} , σ , β определяются следующими заданными функциями координат:

$$\mathbf{j} = (j_x(x, y), j_y(x, y), 0), \quad \mathbf{E} = (E_x(x, y), E_y(x, y), 0), \quad \mathbf{H} = (0, 0, H_z(x))$$

$$\sigma, \beta, H = \begin{cases} \sigma_1, \beta_1, H_1 & \text{при } 0 < x < h, 2(k-1)l < y < (2k-1)l \\ \text{и } -2kl < -y < (1-2k)l \\ \sigma_2, \beta_2, H_2 & \text{при } 0 < x < h, (2k-1)l < y < 2kl \\ \text{и } (1-2k)l < -y < 2(1-k)l \end{cases}$$

Таким образом, в задаче допускается также периодическое изменение магнитного поля. Неоднородные свойства среды при этом могут быть обусловлены изменением \mathbf{H} или вызываться иными причинами; в частном случае магнитное поле в полосе принимается всюду однородным.



Фиг. 1

При сделанных предположениях в каждой ячейке можно ввести комплексный ток $j(z) = j_x(x, y) - ij_y(x, y)$ ($z = x + iy$).

Сформулируем граничные условия для определения $j(z)$. Достаточно ограничиться рассмотрением двух смежных ячеек; во всех последующих парах ячеек вследствие имеющейся в задаче симметрии картина поля повторяется (фиг. 1).

На границе ячеек должны выполняться соотношения

$$\begin{aligned} j_{x1} &= 0 & \text{на } da \text{ и } bc \\ j_{x2} &= 0 & \text{на } ad' \text{ и } c'b \\ j_{y1} &= j_{y2}, \quad E_{x1} = E_{x2} & \text{на } ab, cd \text{ и } d'c' \end{aligned} \quad (1.2)$$

Индексами 1 и 2 фиксируются величины в каждой из двух смежных ячеек соответственно.

За положительное направление обхода по границе ячейки, как обычно, принимается направление, при котором область ячейки остается слева. Первые два выражения в (1.2) определяют условие непротекания тока через изоляционные плоскости, два других соотношения следуют из общих условий на границе [раздела двух разнородных сред.

Считается заданной величина полного тока, протекающего в полосе

$$I = \int_0^h j_y(x) dx \quad (1.3)$$

Перейдем к решению задачи. Обозначим через S^+ прямоугольник $abcd$, а прямоугольник симметричный ему относительно вещественной оси — через S^- , и введем две вспомогательные кусочно-голоморфные функции $\Psi_1(z)$ и $\Psi_2(z)$

$$\Psi_1(z) = \begin{cases} \Psi_1^+(z) = j_1(z) = j_{x1}(x, y) - ij_{y1}(x, y), & z \in S^+ \\ \Psi_1^-(z) = \bar{j}_1(z) = j_{x1}(x, -y) + ij_{y1}(x, -y), & z \in S^- \end{cases}$$

$$\Psi_2(z) = \begin{cases} \Psi_2^+(z) = \bar{j}_2(z) = j_{x2}(x, -y) + ij_{y2}(x, -y), & z \in S^+ \\ \Psi_2^-(z) = j_2(z) = j_{x2}(x, y) - ij_{y2}(x, y), & z \in S^- \end{cases} \quad (1.4)$$

Распространим функции (1.4) автоморфно

$$\Psi_i(z) = \Psi_i(z') \quad (i = 1, 2)$$

относительно группы подстановок

$$z' = z + 2mh + 2nil, \quad z' = -z \quad (1.5)$$

на всю плоскость комплексного переменного. Каждый из прямоугольников S^+ и S^- представляет собой фундаментальную область группы (1.5). Основной функцией группы является эллиптическая функция Вейерштрасса $\gamma(z)$, которая принимает всякое значение в фундаментальной области один раз [1].

Для исследования сформулированной полевой задачи применим теорию краевой задачи Римана для автоморфных функций, развитую в работах Л. И. Чибриковой [2, 3].

Обозначим через $\gamma(t)$ значение нормальной составляющей тока $j_y(t)$ на границе ячеек $L_1 = bc + da$, $L_2 = ad' + c'b$ и $L_3 = ab + cd + a'c'$. Из первых трех соотношений (1.2) с помощью (1.4) и (1.5) получаем две неоднородные краевые задачи Римана для четных двойко-периодических функций

$$\begin{cases} \Psi_1^+(t) = -\Psi_1^-(t) & \text{на } L_1 \\ \Psi_1^+(t) = \Psi_1^-(t) - 2i\gamma(t) & \text{на } L_3 \\ \Psi_2^+(t) = -\Psi_2^-(t) & \text{на } L_2 \\ \Psi_2^+(t) = \Psi_2^-(t) + 2i\gamma(t) & \text{на } L_3 \end{cases} \quad (6.1)$$

$$(t \in L = L_1 + L_2 + L_3)$$

Предполагается, что $\gamma(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера, и рассматриваются решения, обладающие вне граничной линии L свойством

$$\bar{\Psi}_i(z) = \Psi_i(z) \quad (i = 1, 2) \quad (1.7)$$

Задачи Римана (1.6) соответствуют смешанным задачам для голоморфных функций в прямоугольниках S^+ и S^- и отличаются только знаком перед свободным членом. Это указывает на симметрию картины электрического тока относительно вещественной оси. Из решения задач (1.6), для краткости изложения здесь опущенных, вытекают соотношения для токов на L_3

$$j_{x1}(t) = -j_{x2}(t), \quad t \in L_3 \quad (1.8)$$

Условия (1.2) и (1.8) дают полную систему граничных значений для функций $j_i(z)$ ($i = 1, 2$) в прямоугольниках S^+ и S^- . При этом необходимо иметь в виду, что в (1.6) значение $\gamma(t)$ на L_3 заранее неизвестно, поэтому в окончательном решении задачи необходимо установить допустимость сделанных предположений относительно функции $\gamma(t)$.

Используя соотношения (1.2), (1.8) и закон Ома (1.1), получаем с помощью (1.4) следующую однородную задачу Римана с разрывными коэффициентами для $\Psi_1(z)$:

$$\begin{aligned} \Psi_1^+(t) &= - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 - i(\sigma_2\beta_1 - \sigma_1\beta_2)}{\sigma_1 + \sigma_2 + i(\sigma_2\beta_1 - \sigma_1\beta_2)} \Psi_1^-(t) \text{ на } L_3 \\ \Psi_1^+(t) &= - \Psi_1^-(t) \text{ на } L_1 \end{aligned} \quad (1.9)$$

Задача Римана для функции $\Psi_2(z)$ имеет аналогичный вид.

Общее решение задачи (1.9), соответствующее условиям (1.2), дается формулой

$$\begin{aligned} \Psi_1(z) &= C \exp\left(-\frac{\pi i}{2} + \pi i \varepsilon\right) \left[\frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}\right]^{2\varepsilon} \\ u &= \left(\frac{Kz}{h}; k\right), \quad \varepsilon = \frac{1}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sigma_1\beta_2 - \sigma_2\beta_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Здесь C — постоянная, K — полный эллиптический интеграл первого рода, k — модуль эллиптического интеграла, h — ширина полосы, sn , cn и dn — функции Якоби. Под $(\operatorname{cn} u / \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u)^{2\varepsilon}$ подразумевается ветвь, голоморфная в прямоугольнике S^+ и принимающая на границе ab положительное значение.

Функция $\Psi_1(z)$, определяемая формулой (1.10), согласно (1.4) дает распределение тока в S^+ . Рассмотрим поведение электрического поля на границе прямоугольника.

На ab имеем

$$\begin{aligned} \Psi_1^+(x) &= C (\sin \pi \varepsilon - i \cos \pi \varepsilon) P(x) \\ P(x) &= \left[\frac{\operatorname{cn}(Kx/h; k)}{\operatorname{sn}(Kx/h; k) \operatorname{dn}(Kx/h; k)}\right]^{2\varepsilon}, \quad 0 < x < h \end{aligned} \quad (1.11)$$

Отсюда на основании (1.4) и закона Ома следует

$$\begin{aligned} j_{y1}(x) &= CP(x) \left[1 + \left(\frac{\sigma_1\beta_2 - \sigma_2\beta_1}{\sigma_1 + \sigma_2}\right)^2\right]^{-1/2} \\ j_{x1}(x) &= \frac{\sigma_1\beta_2 - \sigma_2\beta_1}{\sigma_1 + \sigma_2} j_{y1}(x), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{\sigma_1 + \sigma_2} j_{y1}(x) \end{aligned} \quad (1.12)$$

На bc , преобразуя эллиптические функции по стандартным формулам [4], получаем

$$\begin{aligned} \Psi_1^+(y) &= -iCR(y), \quad R(y) = \left[\frac{\operatorname{sn}(Ky/h; k) \operatorname{dn}(Ky/h; k)}{\operatorname{cn}(Ky/h; k)}\right]^{2\varepsilon} \\ k' &= \sqrt{1 - k^2}, \quad 0 < y < l \end{aligned} \quad (1.13)$$

и следовательно, имеем

$$j_{y1}(y) = CR(y), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{\sigma_1} j_{y1}(y), \quad j_{x1}(y) = 0 \quad (1.14)$$

Выражения для электрического поля на cd сохраняют форму (1.11) и (1.12), необходимо только заменить $P(x)$ на $P^{-1}(x)$; аналогично для написания формул для $j_{y1}(x)$ и $E_{y1}(y)$ на da требуется в (1.13) и (1.14) вместо $R(y)$ подставить $R^{-1}(y)$. Как видно, $j_y(x)$, т. е. $\gamma(x)$, на линиях сшивания решений удовлетворяет условию Гельдера, что соответствует ранее сделанному предположению относительно $\gamma(x)$ в задачах Римана (1.6).

Постоянная C , как отмечалось выше, находится из соотношения (1.3). Подставляя в (1.3) величину $j_{y1}(x)$ из (1.11), (1.12) и вычисляя интеграл, получаем выражение

$$C = \frac{2IK(k)}{\pi h F[(1/2 + \varepsilon), (1/2 - \varepsilon); 1; k^2]} \quad (1.15)$$

где F — гипергеометрическая функция.

Формулы (1.4), (1.10) и (1.15) полностью решают поставленную задачу.

Картина поля в прямоугольнике S^- зеркально симметрична полю в S^+ относительно вещественной оси; в последующих парах ячеек конфигурация поля повторяется.

Как видно из приведенного решения, распределение тока существенно зависит от взаимных соотношений локальных параметров среды в смежных ячейках.

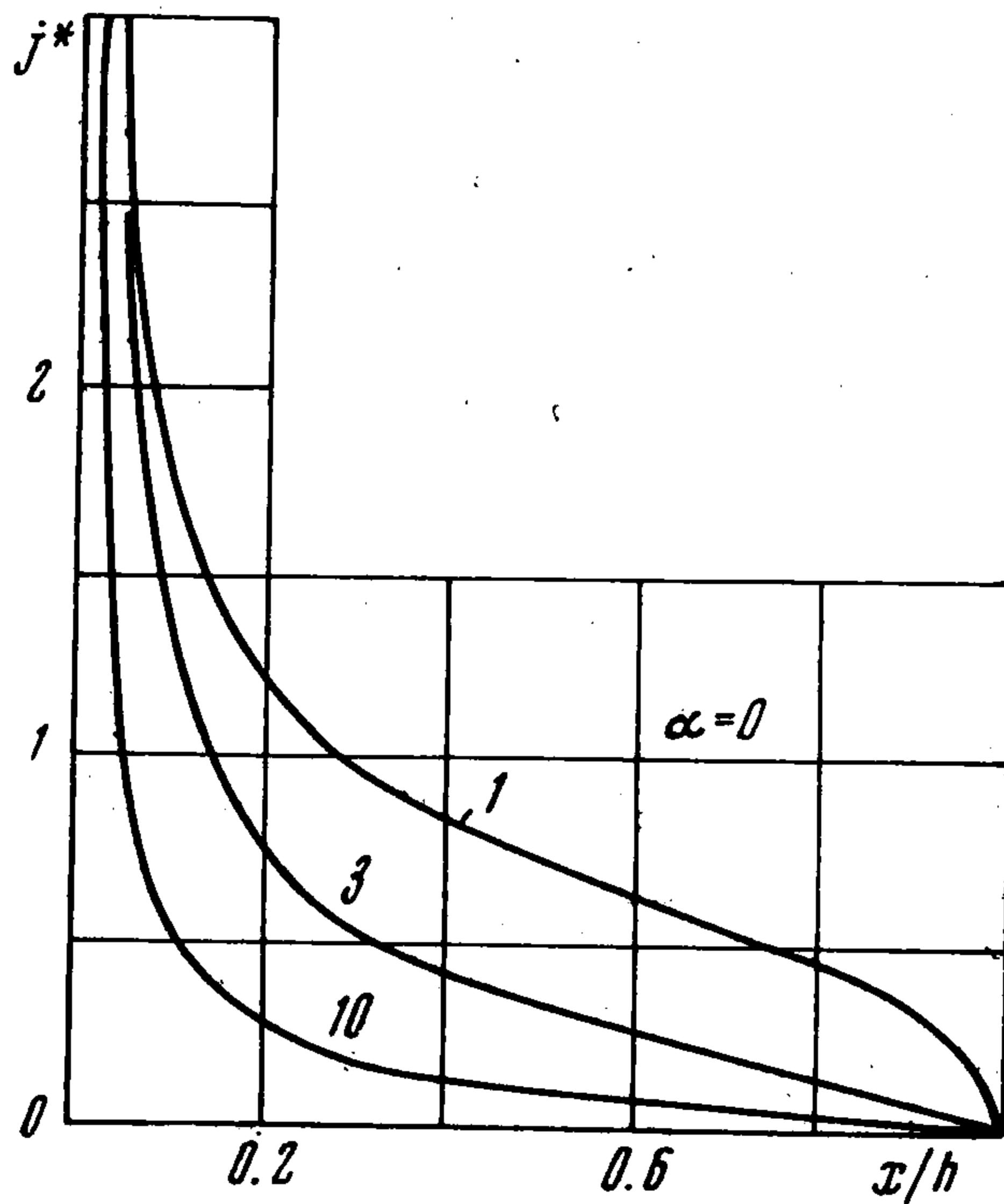
Рассмотрим этот вопрос более подробно.

При отсутствии эффекта Холла ($\beta_1 = 0$ и $\beta_2 = 0$) ток в полосе однороден: $j_x = 0$, $j_y = I/h$. Таким же остается распределение тока и при наличии эффекта Холла, когда во всей полосе сохраняет постоянное значение коэффициент Холла R_H ($R_H = \beta / \sigma H$) при всюду однородном магнитном поле $R_{H1} = R_{H2}$ ($H_1 = H_2$) или, если $H_1 \neq H_2$, при выполнении более общего условия $R_{H1}H_1 = R_{H2}H_2$. Во всех других случаях прохождение электрического тока вдоль полосы характеризуется периодическим сгущением линий тока попеременно у каждой границы полосы.

Суммарную картину поля можно представить как результат наложения двух частных распределений тока — однородного продольного тока $j_y = \text{const}$ и периодических вихрей тока, возникающих вследствие закорачивания холловских эдс на границах ячеек, где нарушается условие потенциальности электрического поля.

Наибольшая концентрация тока возникает на линиях соприкосновения ячеек, причем в одной угловой точке ток бесконечно возрастает (имеет интегрируемую особенность), а в другой — принимает нулевые значения. Вдоль полосы особенности распределения тока в угловых точках чередуются, так что ток принимает нулевое значение (бесконечно возрастает) попеременно то у одной, то у другой границы полосы.

В целом имеет место своего рода пространственная модуляция тока с шагом, определяемым размером ячеек. Для иллюстрации на фиг. 2 приведены графики относительных значений тока $j_* = hj_y(x) / I$ для четырех значений параметра $\alpha = (\sigma_1\beta_2 - \sigma_2\beta_1) /$



Фиг. 2

$l(\sigma_1 + \sigma_2) = 0, 1, 3$ и 10 . Кривые построены по формулам (1.12), (1.15) и соответствуют случаю квадратных ячеек ($l/h = 1$). Из графиков видно, что неоднородность распределения тока в полосе возрастает при увеличении параметра α .

2. Аномальная проводимость среды в сильном магнитном поле. Как видно из приведенного решения, в плазме с эффектом Холла структура электрического поля определяется неоднородностями свойств среды. Это отражает общую тенденцию распределения тока в неоднородной плазме, согласно которой флуктуация параметров плазмы порождает в среде электрические вихри тока размерами порядка размеров флуктуаций. Возникновение таких вихрей приводит к искривлению и запутыванию линий тока, джоулева диссипация увеличивается, а напряженность холловского поля падает. Количественно это явление можно связать с изменением электрических характеристик среды в целом и характеризовать его эффективными значениями проводимости σ_{eff} и параметра Холла β_{eff} . Сложной картине поля с локальными параметрами среды σ и β сопоставляется «сглаженное» поле с эффективными параметрами σ_{eff} и β_{eff} . При таком подходе, в рамках феноменологической теории, не раскрывая механизма турбулентности плазмы, удастся объяснить физическую ситуацию и направленность процесса в турбулентной плазме на основе уравнений Максвелла и закона Ома, не привлекая уравнений переноса.

Задача определения электрических характеристик среды по заданному уровню флуктуаций обладает большой общностью, так как к схеме расчета могут быть отнесены явления, приводящие к стратификации среды вследствие разных причин.

В случае двухфазных флуктуаций, когда параметры плазмы принимают два дискретных значения в хаотически распределенных областях, площади которых равны, а размеры значительно меньше размеров системы, задача определения σ_{eff} и β_{eff} была решена А. М. Дыхне [5] с помощью уравнений (1.1), которые являются исходными в данной работе. Однако, если размеры флуктуаций сравнимы с характерным размером системы или флуктуации регулярно распределены в пространстве, как в рассматриваемом здесь случае, эффективные параметры должны определяться из решения краевой задачи.

Отождествим интегрально однородное распределение тока $j_x = 0$, $j_y = I/h$ в полосе с плазмой, характеризующейся постоянными параметрами σ_{eff} и β_{eff} , с найденным неоднородным распределением тока. Условиями эквивалентности будет равенство в двух случаях полного тока I , протекающего в полосе, холловских напряжений и падения напряжения вдоль полосы на длине $2l$.

В первом случае два указанных напряжения определяются формулами

$$U_H = \frac{\beta_{eff}}{\sigma_{eff}} I, \quad U = \frac{2}{\sigma_{eff}} \frac{l}{h} I \quad (2.1)$$

При неоднородном распределении тока холловское напряжение по линии соприкосновения ячеек на основании (1.12) и падение напряжения по длине двух ячеек согласно (1.14) даются формулами

$$U_H = C \frac{\beta_1 + \beta_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \left[1 + \left(\frac{\sigma_1 \beta_2 - \sigma_2 \beta_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \right)^2 \right]^{-1/2} \int_0^h P(x) dx \quad (2.2)$$

$$U = C \left(\frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2} \right) \int_0^l R(y) dy$$

Вычисляя интегралы в (2.2) и подставляя в формулы значение постоянной (1.15), находим

$$U_H = I \frac{\beta_1 + \beta_2}{\sigma_1 + \sigma_2}, \quad U = I \delta \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\sigma_1 \sigma_2} \left[1 + \left(\frac{\sigma_1 \beta_2 - \sigma_2 \beta_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (2.3)$$

$$\delta = l F \left[\left(\frac{1}{2} + \varepsilon \right), \left(\frac{1}{2} - \varepsilon \right); 1; k'^2 \right] / h F \left[\left(\frac{1}{2} + \varepsilon \right), \left(\frac{1}{2} - \varepsilon \right); 1; k^2 \right]$$

Здесь F — гипергеометрическая функция, k и $k' = \sqrt{1-k^2}$ — модуля эллиптических интегралов первого рода.

Приравнявая, выражения для U_H и U , представленные в (2.1) и (2.3), получаем два соотношения, из которых следуют формулы

$$\sigma_{eff} = \frac{2\delta\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \left[1 + \left(\frac{\sigma_1\beta_2 - \sigma_2\beta_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (2.4)$$

$$\beta_{eff} = \frac{2\delta\sigma_1\sigma_2(\beta_1 + \beta_2)}{(\sigma_1 + \sigma_2)^2} \left[1 + \left(\frac{\sigma_1\beta_2 - \sigma_2\beta_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

Полученные выражения определяют эффективные параметры среды при $l/h \ll 1$. Выполнение последнего условия необходимо, поскольку холловское напряжение при переменных параметрах среды изменяется вдоль полосы. Этим изменением можно пренебречь при выполнении упомянутого условия, в противном случае необходимо проводить усреднения холловского напряжения по длине. Заметим еще, что при $l/h \gtrsim 1$ в рассматриваемой модели введение эффективных параметров теряет смысл, так как все характерные размеры неоднородностей не малы по сравнению с характерным размером полосы (h).

Проанализируем полученные формулы в отдельных случаях.

1°. Выражения (2.4), при выполнении условия $\beta_1/\sigma_1 = \beta_2/\sigma_2$ принимают вид

$$\sigma_{eff} = \frac{2\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}, \quad \beta_{eff} = \frac{2\sigma_1\sigma_2(\beta_1 + \beta_2)}{(\sigma_1 + \sigma_2)^2} \quad (\delta = 1) \quad (2.5)$$

При этом, как уже отмечалось выше, распределение тока в полосе будет однородным ($j_x = 0, j_y = \text{const}$). В рамках элементарной теории плазмы, когда $\sigma = n e^2 \tau / m$, $\beta = e \tau H / m c$ (n, e, τ, m — концентрация, заряд, время столкновений и масса электронов соответственно; c — скорость света), условие $\beta_1/\sigma_1 = \beta_2/\sigma_2$ эквивалентно соотношению $H_1/n_1 = H_2/n_2$ и при однородном магнитном поле ($H_1 = H_2$) означает равенство концентраций электронов в смежных ячейках. На этом свойстве основано предложение Е. П. Велихова о подавлении ионизационной неустойчивости в низкотемпературной плазме путем полной ионизации присадки.

2°. Если $\beta = \beta_1 = \beta_2$ и неоднородность плазмы связана с изменением проводимости ($\sigma_1 \neq \sigma_2$), то при больших значениях безразмерного параметра $\beta^2 \Delta^2 \gg 1$ ($\Delta = |\sigma_1 - \sigma_2| / (\sigma_1 + \sigma_2)$ — относительная величина флуктуации проводимости) имеем

$$\sigma_{eff} = \frac{2l\sigma_1\sigma_2}{h\beta|\sigma_1 - \sigma_2|}, \quad \beta_{eff} = \frac{2l\sigma_1\sigma_2}{h|\sigma_1^2 - \sigma_2^2|} \quad (2.6)$$

При получении (2.6) из (2.4) учтено, что $\delta \sim l/h$, если $\beta^2 \Delta^2 \gg 1$.

Формулы (2.6) показывают, что при увеличении магнитного поля электропроводность среды уменьшается, а параметр Холла насыщается. Даже малые неоднородности проводимости при больших параметрах Холла приводят к сильному изменению характеристик среды в целом. В этом заключаются аномальные свойства плазмы в сильном магнитном поле. В рассматриваемой модели проводимость уменьшается обратно пропорционально магнитному полю, а параметр Холла не зависит от магнитного поля. Интересно отметить, что и в модели плазмы со случайным распределением неоднородностей, рассмотренной А. М. Дыхне [5], установлен такой же вид зависимостей σ_{eff} и β_{eff} .

Особенность полученного результата состоит в том, что σ_{eff} и β_{eff} зависят от линейных размеров ячейки, а также в том, что при $\sigma_2 / \sigma_1 \rightarrow 0$ β_{eff} ведет себя как $4l\sigma_2 / h\sigma_1$, т. е. насыщается на уровне, определяемом соотношением σ_2 / σ_1 , в отличие от результатов работы [5], где $\beta_{eff} \rightarrow 1$ при $\sigma_2 / \sigma_1 \rightarrow 0$.

3°. Аналогично можно исследовать другой предельный случай, когда $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$, а $\beta_1 \neq \beta_2$. Если величина флуктуации мала $|\beta_1 - \beta_2| \ll 2$, то $\sigma_{eff} \rightarrow \sigma$, $\beta_{eff} \rightarrow \beta_1 \sim \beta_2$. При $|\beta_1 - \beta_2| \gg 2$ имеем

$$\sigma_{eff} = \frac{2l\sigma}{h|\beta_1 - \beta_2|}, \quad \beta_{eff} = \frac{l(\beta_1 + \beta_2)}{h|\beta_1 - \beta_2|} \quad (2.7)$$

Отсюда видно, что при наличии только флуктуаций параметра Холла асимптотические выражения, характеризующие свойства плазмы в сильном магнитном поле, имеют такой же вид, что в рассмотренном выше случае, когда флуктуирует только проводимость.

В умеренных магнитных полях и при совместном изменении локальных параметров плазмы σ и β для анализа характеристик плазмы необходимо обращаться к общим формулам (2.4).

3. Эффективные параметры плазмы при наличии скольжения ионов. В сильном магнитном поле в низкотемпературной плазме помимо электронов ларморовское вращение приобретают ионы, и закон Ома записывается в отличной от (1.1) форме

$$\mathbf{j} + \frac{\beta_e}{H} \mathbf{j} \times \mathbf{H} - \frac{\beta_e \beta_i}{H^2} (\mathbf{j} \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H} - \sigma \mathbf{E} = 0$$

В математическом отношении учет скольжения ионов не приводит к новой задаче; необходимые формулы получаются из предыдущих заменой σ_v, β_v на σ_v^*, β_v^* ($v = 1, 2$), где

$$\sigma_v^* = \frac{\sigma_v}{1 + \gamma_v \beta_v^2}, \quad \beta_v^* = \frac{\beta_v}{1 + \gamma_v \beta_v^2}, \quad \gamma_v = \frac{\beta_{ev}}{\beta_{iv}}$$

Во всех случаях асимптотические выражения для эффективных параметров плазмы в сильном магнитном поле, когда существенно проявляется скольжение ионов ($\gamma_v \beta_v^2 \gg 1$), имеют один и тот же вид

$$\sigma_{eff} = \frac{2\sigma_1\sigma_2}{\gamma_1\beta_1^2\sigma_2 + \gamma_2\beta_2^2\sigma_1}, \quad \beta_{eff} = \frac{2\sigma_1\sigma_2\beta_1\beta_2(\gamma_1\beta_1 + \gamma_2\beta_2)}{(\gamma_1\beta_1^2\sigma_2 + \gamma_2\beta_2^2\sigma_1)^2}$$

Формулы для эффективных характеристик плазмы не зависят теперь от линейных размеров ячеек, и распределение тока в полосе будет однородным. Эффективный параметр Холла с ростом магнитного поля не насыщается, как выше в рассмотренных случаях 2° и 3°, а уменьшается. В целом зависимость $\beta_{eff}(H)$ характеризуется наличием максимума — в слабых

магнитных полях β_{eff} растет пропорционально H , а в сильных магнитных полях, когда проявляется скольжение ионов, β_{eff} уменьшается обратно пропорционально H .

4. Построенное решение задачи в п.1. в частном случае дает также решение задачи о двумерном распределении тока в прямоугольной области с электродами и соответствует расчету поля в полупроводниковой пластине с двумя симметрично установленными идеальными электродами, когда пластина находится в однородном магнитном поле. Это решение получается предельным переходом $\sigma_2 \rightarrow \infty$ и отличается от исходного (1.10), (1.15) только выражением для холловского угла ϵ ; вместо формулы, выписанной в (1.10), имеем

$$\epsilon = \frac{1}{\pi} \arctg(-\beta), \quad 0 \leq |\epsilon| < \frac{1}{2} \quad (\beta \equiv \beta_1) \quad (4.1)$$

Вычисляя напряжение между электродами

$$U = \frac{C}{\sigma_1} \int_0^l R(y) dy \quad (4.2)$$

где C и $R(y)$ даются формулами (1.15) и (1.11) (при $\sigma_2 \rightarrow \infty$) получаем полное сопротивление пластины

$$\Omega = \frac{U}{I} = \frac{\sqrt{1+\beta^2}}{\sigma d} \frac{F\left[\left(\frac{1}{2} + \epsilon\right), \left(\frac{1}{2} - \epsilon\right); 1; k'^2\right]}{F\left[\left(\frac{1}{2} + \epsilon\right), \left(\frac{1}{2} - \epsilon\right); 1; k^2\right]} \quad (4.3)$$

Здесь d — толщина пластины. Формула (4.3) принимает особенно простой вид $\Omega = \sqrt{1+\beta^2} / \sigma d$, если пластина имеет прямоугольную форму ($l/h = 1$).

Поступила 29 XII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Г о л у б е в В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.—Л., Гостехиздат, 1950.
2. Ч и б р и к о в а Л. И. О краевой задаче Римана для автоморфных функций. Уч. зап. Казанск. у-та, 1956, т. 166, кн. 4, стр. 59—110.
3. Ч и б р и к о в а Л. И. О граничных задачах для прямоугольника. Краевые задачи функций комплексного переменного. Казань, Казанский ун-т, 1964, стр. 15—39.
4. А х и е з е р Н. И. Элементы теории эллиптических функций. М., «Наука», 1971.
5. Д ы х н е А. М. Аномальное сопротивление плазмы в сильном магнитном поле. ЖЭТФ, 1970, т. 59, вып. 2(8).