Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 531.36

О СТАБИЛИЗАЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ И СТАЦИОНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛАМИ ЧАСТИЧНОЙ ДИССИПАЦИИ

Л. Е. Соколова

(Москва)

Рассматривается линейное каноническое преобразование [1], приводящее гироскопическую систему к нормальному виду. Показано, что коэффициенты преобразования могут быть выбраны действительными. Полученное преобразование применяется для исследования возможности стабилизации до асимптотической устойчивости относительного равновесия и стационарного движения механической системы.

Вопросы стабилизации механических систем управлениями $u_j(q_i, q_i^{\bullet})$ изучались в работах [2-4].

В данной работе ставится более специальная задача отыскания условий, которым должны удовлетворять силы частичной диссипации, чтобы относительное равновесие или стационарное движение механической системы стабилизировалось ими до асимптотической устойчивости.

Следует отметить, что устойчивая механическая система может быть стабилизирована до асимптотической устойчивости силой $u(q_1^{\bullet}, \ldots, q_n^{\bullet})$ произвольной природы тогда и только тогда, когда возможна стабилизация этой системы лишь одной диссипативной силой [2].

1. Приведение гироскопической системы к нормальному виду. Пусть уравнения движения линейной гироскопической системы, положение которой определяется обобщенными координатами $q_1, \ldots, q_n$, имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i^{\bullet}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \tag{1.1}$$

Здесь L — функция вида

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(b_{ij}' q_i^{\bullet} q_j^{\bullet} + b_{i,n+j}' q_i q_j^{\bullet} + b_{n+i,n+j}' q_i q_j) \tag{1.2}$$

где b_{ij}' $(i, j = 1, \ldots, 2n)$ — постоянные коэффициенты.

Уравнения (1.1) можно записать в форме Гамильтона

$$q_i^{\bullet} = \partial H / \partial p_i, \qquad p_i^{\bullet} = -\partial H / \partial q_i \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.3}$$

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij} p_i p_j + a_{i,n+j} p_i q_j + a_{n+i,n+j} q_i q_j)$$

Предположим, что квадратичная форма H определенно положительна. В этом случае корни характеристического уравнения системы (1.3)

$$\Delta(\lambda) = 0 \tag{1.4}$$

все чисто мнимые и положение равновесия $q_1 = q_2 = \ldots = q_n = 0$ устойчиво [1].

Пусть $\pm \lambda_1^{(1)} i, \pm \lambda_1^{(2)} i, \ldots, \pm \lambda_1^{(n_1)} i; \pm \lambda_2^{(n_1+1)} i, \ldots, \pm \lambda_2^{(n_2)} i; \ldots; \pm \lambda_k^{(n_{k-1}+1)} i, \ldots$ $\ldots, \pm \lambda_k^{(n)} i$ представляют собой k групп корней уравнения (1.4).

Существует [1] линейное каноническое преобразование

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} (b_{ij} q_j + b_{i,\,n+j} p_j), \qquad y_i = \sum_{j=1}^{n} (b_{n+i,\,j} q_j + b_{n+i,\,n+j} p_j) \tag{1.5}$$
$$(i = 1, \ldots, n)$$

приводящее уравнения (1.3), к нормальному виду

$$x_i^{\bullet} = y_i, \qquad y_i^{\bullet} = -(\lambda_s^{(i)})^2 x_i \quad (i = 1, \ldots, n;\ s = 1, \ldots, k) \tag{1.6}$$

Коэффициенты этого преобразования в общем случае комплексны. Найдем преобразование с действительными коэффициентами.

Пусть E — единичная матрица, A, B — матрицы коэффициентов при переменных $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$ в правых частях уравнений (1.3), (1.5), Γ — матрица вида

$$\Gamma = \begin{Vmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{Vmatrix}$$

z, u — $2n$ — вектор-столбцы; $b_1, \ldots, b_{2n}$ — вектор-строки матрицы B; (z, u) — скалярное произведение; Cz, C^2, C', $|C|$ — произведение квадратной матрицы C на столбец z, квадрат матрицы C, транспонированная матрица C и определитель матрицы C соответственно; $\pm \lambda_s i$ ($s = 1, \ldots, k$) — характеристический показатель, принадлежащий s-й группе корней уравнения (1.4).

Матрицы A', $(A')^2$ имеют простые элементарные делители, так как в противном случае равновесие было бы неустойчивым. Поэтому каждая из систем

$$(A')^2 z = -\lambda_s^2 z \qquad (s = 1, \ldots, k) \tag{1.7}$$

имеет $2(n_s - n_{s-1})$ линейно независимых решений.

Построим следующую последовательность собственных векторов матрицы $(A')^2$:

$$z_s^{(2n_{s-1}+2i-1)} = \alpha_s^{(2i-1)} \Big\{ u_s^{(2i-1)} + \sum_{j=1}^{i-1} [-(u_s^{(2i-1)}, \Gamma z_s^{(2n_{s-1}+2j)}) \times$$
$$\times z_s^{(2n_{s-1}+2j-1)} + (u_s^{(2i-1)}, \Gamma z^{(2n_{s-1}+2j-1)})\, z^{(2n_{s-1}+2j)}] \Big\}$$
$$z^{(2n_{s-1}+2i)} = A' z^{(2n_{s-1}+2i-1)} \qquad (i = 1, \ldots, n_s - n_{s-1};\ s = 1, \ldots, k;\ n_0 = 0)$$

Здесь $u_s^{(2i-1)}$ — некоторое решение системы (1.7), линейно независимое с векторами $z_s^{(2n_{s-1}+1)}, \ldots, z_s^{(2n_{s-1}+2i-2)}$, а действительные коэффициенты $\alpha_s^{(2i-1)}$ выбраны такими, что $(z_s^{(2n_{s-1}+2i-1)}, \Gamma z_s^{(2n_{s-1}+2i)}) = 1$

Положим

$$b_i = (z_s^{(2i-1)})', \qquad b_{n+i} = (z_s^{(2i)})' \tag{1.8}$$
$$(i = n_{s-1} + 1, \ldots, n_s;\quad s = 1, \ldots, k;\quad n_0 = 0)$$

Можно проверить, что равенства (1.8) определяют матрицу B линейного канонического преобразования с действительными коэффициентами, приводящего уравнения (1.3) к нормальной форме (1.6).

2. Стабилизация относительного равновесия механической системы. Рассмотрим механическую систему, подчиненную голономным стационарным связям, положение которой относительно подвижной системы отсчета x_1, x_2 x_3 определяется обобщенными координатами $q_1, \ldots, q_n$.

Пусть на рассматриваемую систему действуют не зависящие явно от времени потенциальные силы и диссипативные силы с функцией $F(q_1^{\cdot}, \ldots, q_n^{\cdot})$ ранга $p < n$, т. е. диссипация не является полной.

Допустим, система находится в положении относительного равновесия $q_1 = \ldots = q_n = 0$, которое примем за невозмущенное движение.

Если переносные силы инерции допускают силовую функцию, не зависящую явно от времени, а проекции мгновенной угловой скорости $x_1x_2x_3$ на оси $x_1x_2x_3$ постоянны, то уравнения возмущенного движения в первом приближении можно записать в форме

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i^{\cdot}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial F}{\partial q_i^{\cdot}} \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.1}$$

где L имеет вид (1.2).

Будем по-прежнему предполагать, что гамильтониан H, соответствующий L,— определенно положительная квадратичная форма $q_1, \ldots, q_n$, $p_1, \ldots, p_n$.

Функцию F представим в виде

$$F = -\frac{1}{2}(\varphi_1^2 + \ldots + \varphi_p^2), \quad \left(\varphi_r = \sum_{j=1}^{n} c_{rj}q_j^{\cdot}, \quad r = 1, \ldots, p\right) \tag{2.2}$$

В нормальных переменных, найденных при помощи действительного канонического преобразования П. 1 уравнения (2.1), функции F, $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ примут вид

$$x_i^{\cdot} = y_i + \sum_{j=1}^{p} d_{ij}\varphi_j, \qquad y_i^{\cdot} = -\lambda_s^2 x_i + \sum_{j=1}^{p} d_{n+i,\,j}\varphi_j \tag{2.3}$$

$$(i = n_{s-1} + 1, \ldots, n_s; \; s = 1, \ldots, k)$$

$$F = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} (\alpha_{ij}x_ix_j + 2n_{ij}x_iy_j + \alpha_{n+i,\,n+j}y_iy_j), \qquad \varphi_r = \sum_{j=1}^{n} (c_{rj}x_j + c_{r,\,n+j}y_j)$$

$$\alpha_{ij} = \sum_{r=1}^{p} c_{ri}c_{rj}, \qquad \alpha_{n+i,\,n+j} = \sum_{r=1}^{p} c_{r,\,n+i}c_{r,\,n+j}, \qquad n_{ij} = \sum_{r=1}^{p} c_{ri}c_{r,\,n+j}$$

Пусть F_1, $\varphi_1^{(1)}, \ldots, \varphi_p^{(1)}$ — части функций F, $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$, зависящие только от $x_1, \ldots, x_{n_1}$, $y_1, \ldots, y_{n_1}$.

Последовательно применим к форме F_1 линейное действительное преобразование, одинаковое для рядов переменных $x_1, \ldots, x_{n_1}$; $y_1, \ldots, y_{n_1}$, приводящее форму

$$f_1 = \sum_{i,j=1}^{n_1} (\alpha_{ij} + \lambda_1^2\alpha_{n+i,\,n+j})\, x_ix_j$$

к сумме квадратов, и ортогональное преобразование, приводящее кососимметрическую форму

$$f_2 = \sum_{i,j=1}^{n_1} (n_{ij} - n_{ji}) x_i y_j$$

к каноническому виду [5].

Будем сохранять в дальнейшем для новых коэффициентов α'_{ij}, n'_{ij}, d'_{ij} и новых переменных x'_i, y'_i старые обозначения. Заметим, что рассмотренные преобразования не меняют вида уравнений (2.3).

Теорема. Для того, чтобы диссипативные силы стабилизировали в первом приближении нормальную переменную x_l до асимптотической устойчивости, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты функции F_1

$$F_1 = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{s} (\alpha_{ij} x_i x_j + 2n_{ij} x_i y_j + \alpha_{n+i,\, n+j} y_i y_j) \tag{2.4}$$

$$\alpha_{ij} + \lambda_1^2 \alpha_{n+i,\, n+j} = \delta_{ij}, \qquad n_{rt} - n_{tr} = 0 \quad (r, t \neq 1, 2; 3, 4; \ldots)$$

удовлетворяли неравенствам

$$l \leqslant s, \qquad \lambda_1^2 (n_{l,\, l\pm 1} - n_{l\pm 1,\, l})^2 - 1 \neq 0 \tag{2.5}$$

Доказательство. Необходимость. Если $l > s$, т. е. переменные x_l, y_l не входят в функцию F_1, то $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ не зависят от этих переменных, поэтому уравнения (2.3) допускают ненулевое решение

$$x_l = C_l \cos \lambda_1 t + D_l \sin \lambda_1 t, \qquad x_i = y_i = 0 \quad (i \neq l)$$

Пусть $l \leqslant s$. Примем $l = 1$. Рассмотрим сумму

$$v = \sum_{r=1}^{p} \left[(c_{r1} \mp c_{r,\, n+2} \lambda_1)^2 + \lambda_1^2 \left(\frac{c_{r2}}{\lambda_1} \pm c_{r,\, n+1} \right)^2 \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{2} (\alpha_{ii} + \lambda_1^2 \alpha_{n+i,\, n+i}) \mp 2\lambda_1 (n_{12} - n_{21})$$

Если выполнено равенство $\lambda_1^2 (n_{12} - n_{21})^2 = 1$, то, согласно (2.4), v обращается в нуль, откуда следует

$$c_{r1} = \pm \lambda_1 c_{r,\, n+2}, \qquad c_{r2} = \mp \lambda_1 c_{r,\, n+1} \qquad (r = 1, \ldots, p)$$

В этом случае уравнения (2.3) допускают ненулевое решение

$$x_1 = C_1 \cos \lambda_1 t + D_1 \sin \lambda_1 t, \qquad x_1^{\cdot} = y_1, \qquad x_2 = \pm y_1 / \lambda_1, \qquad y_2 = x_2^{\cdot}$$

$$x_i = y_i = 0 \qquad (i = 3, \ldots, n)$$

Следовательно, переменная x_1 не стабилизируется до асимптотической устойчивости.

Достаточность. Так как $dH / dt = F$, где F — постоянно отрицательна, а H — определенно положительна, то из теоремы Е. А. Барбашина и Н. Н. Красовского [6, 7] следует, что движение асимптотически стремится к тем траекториям, вдоль которых $F \equiv 0$. На этих траекториях выполнены равенства [8]

$$x_i^{\cdot} = y_i, \qquad y_i^{\cdot} = -\lambda_1^2 x_i \qquad (i = 1, \ldots, n_1) \tag{2.6}$$

$$\varphi_r^{(1)} = 0 \qquad (r = 1, \ldots, p) \tag{2.7}$$

Подставляя решение уравнений (2.6)

$$x_i = C_i \cos \lambda_1 t + D_i \sin \lambda_1 t, \qquad y_i = -C_i\lambda_1 \sin \lambda_1 t + D_i \lambda_1 \cos \lambda_1 t$$

в равенства (2.7) и учитывая, что функции $\sin \lambda_1 t$, $\cos \lambda_1 t$ линейно независимы, получим

$$v_r = \sum_{l=1}^{s} (c_{rl} C_l + c_{r,\, n+l} \lambda_1 D_l) = 0, \qquad w_r = \sum_{l=1}^{s} (c_{rl} D_l - c_{r,\, n+l} \lambda_1 C_l) = 0 \tag{2.8}$$

$$(r = 1, \ldots, p)$$

Если $s = 1$, то $C_1 = D_1 = 0$. Если $s \geqslant 2$, то уравнения (2.8) эквивалентны равенству

$$V = \sum_{r=1}^{p} (v_r^2 + w_r^2) = C_1^2 + D_1^2 + C_2^2 + D_2^2 + 2\lambda_1 (n_{12} - n_{21})(C_1 D_2 - C_2 D_1) + \\ + V_1 (C_3, D_3, \ldots, C_s, D_s) \tag{2.9}$$

где V_1 неотрицательна.

При выполнении условия (2.5) функция $(V - V_1)$ определенно положительна, поэтому равенство (2.9) удовлетворяется только при $C_1 = D_1 = C_2 = D_2 = 0$, откуда следует $x_1 = 0$. Утверждение доказано.

При $n_1 = 1$ условие асимптотической устойчивости принимает вид

$$\alpha_{11} + \lambda_1^2 \alpha_{n+1,\, n+1} \neq 0 \tag{2.10}$$

Из доказательства теоремы следует, что неравенства (2.5) являются условиями отсутствия ненулевых траекторий уравнений (2.1), вдоль которых выполнены равенства

$$\varphi_i' = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} q_j = 0 \qquad (i = 1, \ldots, p)$$

Выразив из этих уравнений p последних обобщенных координат через остальные $m = n - p$ и подставив эти выражения в уравнения (2.1), придём к исследованию существования ненулевых траекторий уравнений вида (1.1) с функцией

$$L_1 = L(q_i, q_i^{\cdot}, q_{m+j}(q_i), q^{\cdot}_{m+j}(q_j^{\cdot})) \qquad (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n - m) \tag{2.11}$$

вдоль которых выполнены некоторые линейные равенства

$$\psi_r(q_1, \ldots, q_m, q_1^{\cdot}, \ldots, q_m^{\cdot}) = 0 \qquad (r = 1, \ldots, p) \tag{2.12}$$

получающиеся из последних p уравнений системы (2.1).

Теорему можно применять и в этом случае, полагая

$$L = L_1, \qquad F = -{}^1/_2 (\psi_1^2 + \ldots + \psi_p^2).$$

Если, например, $n = 2$, $F = (c_{11} q_1^{\cdot} + c_{12} q_2^{\cdot})^2$, то функция ψ_1 принимает вид

$$\psi_1 = b_{14}' (1 + c_{11}^2 / c_{12}^2) q_1^{\cdot} + (c_{11} / c_{12})(b_{44}' - b_{33}') q_1$$

так как не ограничивая общности можно положить

$$L = {}^1/_2\,[(q_1^{\boldsymbol\cdot})^2 + (q_2^{\boldsymbol\cdot})^2 + 2b_{14}'q_1q_2^{\boldsymbol\cdot} + b_{33}'q_1^2 + b_{44}'q_2^2]$$

Условия (2.5) не выполняются только тогда, когда $s = 0$, т. е. $\psi_1 \equiv 0$, откуда следует $b_{14}' = 0$, $b_{44}' = b_{33}'$.

Таким образом, относительное равновесие механической системы с двумя степенями свободы при $b_{14}' \neq 0$ стабилизируется до асимптотической устойчивости любой диссипацией ранга $p = 1$.

Пример 1. Рассмотрим вращающуюся вокруг вертикали рамку с математическим маятником, прикрепленным к оси вращения рамки с помощью упругих пружин так, что вертикальная плоскость, в которой находится маятник, и точка подвеса маятника могут совершать соответственно крутильные и вертикальные колебания.

Кинетическая энергия T и силовая функция U имеют вид

$$T = {}^1/_2\, m[(x^{\boldsymbol\cdot})^2 + l^2 (\varphi^{\boldsymbol\cdot})^2 + 2\, l \sin \varphi x^{\boldsymbol\cdot}\varphi^{\boldsymbol\cdot} + l^2 \sin^2 \varphi\omega^2 + 2l^2\omega \sin^2 \varphi\psi^{\boldsymbol\cdot} + l^2 \sin^2 \varphi\, (\psi^{\boldsymbol\cdot})^2]$$

$$U = -{}^1/_2\, k_2x^2 - {}^1/_2\, k_3\psi^2 + mgl\cos\varphi + mgx$$

Здесь Ψ — угол между вертикальной плоскостью и плоскостью рамки, x — смещение точки подвеса маятника от конца недеформированной пружины, φ — угол отклонения маятника от вертикали, k_2, k_3 — коэффициенты жесткости пружин, m, l — масса и длина маятника, ω — угловая скорость вращения рамки.

За невозмущенное движение примем решение

$$q_1 = q_2 = q_3 = 0 \tag{2.13}$$

$$q_1 = l\,(\varphi - \varphi_0),\; q_2 = x - x_0,\; q_3 = l\psi \;(\cos\varphi_0 = g\,/\,(l\omega^2),\; x_0 = mg\,/\,k_2)$$

Уравнения возмущенного движения в первом приближении запишутся в форме (2.1) с функциями L, F

$$L = {}^1/_2 m\,[(q_1^{\boldsymbol\cdot})^2 + 2\sin\varphi_0 q_1^{\boldsymbol\cdot} q_2^{\boldsymbol\cdot} + (q_2^{\boldsymbol\cdot})^2 + \sin^2\varphi_0\,(q_3^{\boldsymbol\cdot})^2 + 2\omega\sin 2\,\varphi_0 q_1 q_3^{\boldsymbol\cdot}] - {}^1/_2\,[(\omega^2 - $$
$$- g^2\,/\,l^2\omega^2)q_1^2 + k_2q_2^2 + (k_3\,/\,l)q_3^2]$$

$$F = -{}^1/_2\,(c_{11}q_1^{\boldsymbol\cdot} + c_{12}q_2^{\boldsymbol\cdot} + c_{13}q_3^{\boldsymbol\cdot})^2$$

Условия определенной положительности H имеют вид

$$k_2 > 0,\; k_3 > 0,\; \omega^2 - g^2\,/\,l^2\,\omega^2 > 0$$

Если принять $k_2\,/\,m = 48$ *сек*$^{-2}$, $k_3\,/\,m = 11$ *м*^{2} / *сек*^{2}, $\omega = 6$ *сек*$^{-1}$, $l = 0{,}54$ *м*, то функция H будет иметь вид

$$H = {}^1/_2\; m\,(4p_1^2 - 4\sqrt{3}p_1p_2 + 4p_2^2 + {}^4/_3 p_3^2 - 8\sqrt{3}p_3q_1 + 63q_1^2 + 48q_2^2 + 36q_3^2)$$

Корни характеристического уравнения (1.4) все различны, поэтому анализ условия устойчивости (2.10) приводит к выводу, что решение (2.13) будет асимптотически устойчивым при выполнении неравенства

$$(c_{12}^2 + c_{13}^2)\,[c_{13}^2 + (c_{12} + 2\sqrt{3}c_{11})^2]\,[c_{13}^2 + (27c_{12}\,/\,\sqrt{3} - 16c_{11})^2] \neq 0$$

Пример 2. Рассмотрим твердое тело, движущееся в центральном ньютоновом поле сил в среде без сопротивления. Внутри тела расположена материальная точка массы m. Предположим, что центр масс O механической системы тело — точка движется по невозмущаемой круговой орбите с угловой скоростью ω.

Пусть C — центр сил, $CX_1X_2X_3$ — неподвижная система отсчета, $Ox_1x_2x_3$ — орбитальная система координат, $O_1y_1y_2y_3$ — система координат с осями, направленными по главным центральным осям инерции тела.

За обобщенные координаты q_1, q_2, q_3 примем соответственно углы ψ, ϑ, γ [9], определяющие положение $O_1y_1y_2y_3$ относительно $Ox_1x_2x_3$, и координаты q_4, q_5, определяющие положение точки относительно $O_1y_1y_2y_3$

$$y_i = f_i\,(q_4,\ q_5)\ \ (i = 1,\ 2,\ 3)$$

Пусть выполнены равенства

$$f_{20} = f_{30} = (\partial f_1 \,/\, \partial q_4)_0 = (\partial f_1 \,/\, \partial q_5)_0 = 0$$

где f_{i0} — значение функции $f\,(q_4,\ q_5)$ при $q_4 = q_5 = 0$.
Для обеспечения асимптотической устойчивости относительного равновесия $q_1 = \ldots$ $\ldots = q_5 = 0$, которое примем за невозмущенное движение, введем вязкое трение с диссипативной функцией $F = -1/2\,[(q_4^{\boldsymbol\cdot})^2 + (q_5^{\boldsymbol\cdot})]^2$.

Уравнения возмущенного движения в первом приближени имеют вид (2.1), где

$$\begin{gathered}2L = A_1\,(q_1^{\boldsymbol\cdot})^2 + (A_2 + m_1f_{10}^2)\,(q_2^{\boldsymbol\cdot})^2 + (A_3 + m_1f_{10}^2)\,(q_3^{\boldsymbol\cdot})^2 + \\ + 2\omega\,(A_2 + A_1 - A_3)\,q_1q_2^{\boldsymbol\cdot} + [(A_2 - A_3)q_1^2 + 4\,(A_1 - A_3 - m_1f_{10}^2)q_2^2 + \\ + 3\,(A_1 - A_2 - m_1f_{10}^2)q_3^2]\omega^2 + m_1\{(a_4q_4^{\boldsymbol\cdot} + a_5q_5^{\boldsymbol\cdot})^2 + (b_4q_4^{\boldsymbol\cdot} + b_5q_5^{\boldsymbol\cdot})^2 + 2f_{10}[(a_4q_4^{\boldsymbol\cdot} + \\ + a_5q_5^{\boldsymbol\cdot})q_3^{\boldsymbol\cdot} - (b_4q_4^{\boldsymbol\cdot} + b_5q_5^{\boldsymbol\cdot})q_2^{\boldsymbol\cdot}] + 3f_{10}\omega^2\,[(\partial^2f_1/\partial q_4^2)_0q_4^2 + 2\,(\partial^2 f_1 \,/\, \partial q_4\partial q_5\partial)_0 \times \\ \times q_4q_5 + (\partial^2 f_1/\,\partial q_5^2)_0q_5^2 + 8q_2\,(b_4q_4 + b_5q_5) - 6q_3\,(a_4q_4 + a_5q_5)] - (b_4q_4 + b_5q_5)^2\omega^2\} - \\ - k_4q_4^2 - k_5q_5^2\end{gathered}$$

$$m_1 = mM \,/\, (m + M), \qquad a_i = (\partial f_2 \,/\, \partial q_i)_0, \qquad b_i = (\partial f_3 \,/\, \partial q_i)_0$$
$$(i = 4{,}5)$$

Для исследования асимптотической устойчивости рассмотрим введенную ранее равенством (2.11) функцию L_1, получающуюся из функции L при $q_4 = q_4^{\boldsymbol\cdot} = q_5 =$ $= q_5^{\boldsymbol\cdot} = 0$.

Функции ψ_1, ψ_2 из равенств (2.12) имеют вид

$$\psi_i = 4\omega b_{i+3}\,(l_{12} \,/\, B_2)q_2 + 3a_{i+3}\,(B_2 - B_1 - B_3)\omega^2q_3 - b_{i+3}\,(l_{12} \,/\, B_2)q_1^{\boldsymbol\cdot}$$

$$B_i = A_i + m_1f_{10}^2 \qquad (i = 2,\ 3), \qquad l_{12} = (A_3 - A_1 - A_2)\omega, \qquad B_1 = A_1$$

Если выполнено неравенство

$$\begin{gathered}B_1B_2\,(B_2 - B_1)^2 + (B_2 - B_1)B_3\,[-12B_1\,(B_3 - B_1) - 3B_2\,(B_3 - B_2) - 3\,(B_3 - \\ - B_1 - B_2)^2] + 4B_2^2\,(B_3 - B_2)\,(B_3 - B_1) \neq 0 \qquad (2.14)\end{gathered}$$

то корни уравнения (1.4), соответствующего лагранжиану L_1, будут все различны, и условия асимптотической устойчивости (2.10) можно привести к виду

$$l_{12}\,(B_2 - B_1 - B_3)\,(b_4^2 + b_5^2)\,(a_4^2 + a_5^2) \neq 0$$

Если неравенство (2.14) нарушено, то $n_1 = 2$, и условие асимптотической устойчивости, получающееся из критерия (2.9), имеет вид

$$l_{12}\,(B_2 - B_1 - B_3)\,(b_4a_5 - a_4b_5) \neq 0$$

3. Стабилизация стационарного движения. Рассмотрим механическую систему, подчиненную голономным стационарным связям, положение которой определяется обобщенными координатами q_1, ..., q_n, где последние k координат циклические. Примем, что индексы r, s изменяются от единицы до $(n - k)$, а индексы m, l — от $(n - k + 1)$ до n.

Пусть на рассматриваемую систему действуют потенциальные силы с силовой функцией $U = U\,(q_r)$, диссипативные силы с диссипативной функцией $\Phi = -\,^1/_2\,[(q_{n-k+1}^{\cdot})^2 + \ldots + (q_n^{\cdot})^2]$ и некоторые постоянные силы F_m, такие, что система допускает движение

$$q_r = 0, \quad q_m^{\cdot} = q_{m0}^{\cdot} = \mathrm{const} \tag{3.1}$$

Пусть кинетическая энергия T имеет вид

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} q_i^{\cdot} q_j^{\cdot}$$

Решение (3.1) будет [10] асимптотически устойчивым в первом приближении, если не существует ненулевых траекторий уравнений вида (1.1) с функцией

$$L = \delta^2\left(\frac{1}{2}\sum_{r,s} a_{rs} q_r^{\cdot} q_s^{\cdot} + \frac{1}{2}\sum_{r,l} a_{rl} q_r^{\cdot} q_{l0}^{\cdot} + \sum_{m,l} a_{ml} q_{m0}^{\cdot} q_{l0}^{\cdot} + U\right) \tag{3.2}$$

вдоль которых выполнены равенства

$$\varphi_m = \sum_s a_{ms}^{\circ} q_s^{\cdot} + \sum_l \left[\sum_s (\partial a_{ml} / \partial q_s)_0 q_s\right] q_{l0}^{\cdot} = 0 \tag{3.3}$$

Применим к функции L и функции

$$F = -\frac{1}{2}\sum_m \varphi_m^2$$

преобразование, предложенное в п.2.

Тогда условия отсутствия таких ненулевых траекторий, а следовательно, и условия асимптотической устойчивости примут вид (2.5), (2.10).

Пример 3. Рассмотрим механическую систему, представляющую собой гироскоп в кардановом подвесе, заключенный в кожух, который жестко скреплен со стержнем. Стержень может вращаться относительно неподвижной точки O_1. Центр тяжести гироскопа расположен на оси стержня в точке O. Стержень, кожух и кольца считаются невесомыми.

Пусть $O_1X_1X_2X_3$ — неподвижная система координат с вертикально направленной вверх осью O_1X_3, $Ox_1x_2x_3$ — система, неизменно связанная со стержнем, причем ось Ox_3 направлена по стержню от точки O к точке O_1, а ось внешнего кольца направлена по Ox_1.

Положение стержня определим углами α_1 и β_1, где β_1 — угол между осью Ox_3 и проекцией стержня на плоскость $O_1X_1X_3$, α_1 — угол между этой проекцией и осью O_1X_3. Положение гироскопа относительно $Ox_1x_2x_3$ определим углами α, β, γ [11].

Кинетическая энергия T и силовая функция U имеют вид

$$\begin{gathered}2T = Ml^2[\cos^2\beta_1(\alpha_1^{\cdot})^2 + (\sin^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1)(\beta_1^{\cdot})^2] + A_1(\alpha^{\cdot}\cos\beta + \beta_1^{\cdot}\cos\beta + \\ + \alpha_1^{\cdot}\cos\beta_1\sin\alpha_1\sin\beta + \alpha_1^{\cdot}\sin\beta_1\cos\alpha\sin\beta)^2 + A_1(\beta^{\cdot} + \alpha_1^{\cdot}\cos\beta_1\cos\alpha - \\ - \alpha_1^{\cdot}\sin\beta_1\sin\alpha)^2 + A_3[(\alpha^{\cdot} - \alpha_1^{\cdot}\sin\beta_1)\sin\beta + \gamma^{\cdot} - (\alpha_1^{\cdot}\cos\beta_1\sin\alpha + \\ + \alpha_1^{\cdot}\sin\beta_1\cos\alpha)\cos\beta]^2\end{gathered}$$

$$U = -Mgl\cos\beta_1\cos\alpha_1 - {}^1/_2\,k_1(\alpha - \alpha_0)^2 - {}^1/_2\,k_2(\beta - \beta_0)^2$$

где M — масса гироскопа, A_1, A_3 — соответственно экваториальный и осевой моменты инерции гироскопа, l — расстояние O_1O, k_1, k_2 — коэффициенты упругости пружин, фиксирующих положение $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$. Координата γ — циклическая.

Пусть F_5 — постоянный момент, уравновешивающий момент диссипативных сил — $k\gamma^{\cdot}$ на стационарном движении

$$\alpha_1 = \beta_1 = 0,\ \alpha = \alpha_0 = \pi / 2,\ \beta = \beta_0 = \pi / 4,\ \gamma^{\cdot} = \gamma_0^{\cdot}$$

В таком случае, если сохранить за возмущениями обозначения исходных переменных, функции L, φ_5, определяемые равенствами (3.2), (3.3), имеют вид

$$\begin{aligned} 2L = Ml^2 [(\alpha_1^{\cdot})^2 + (\beta_1^{\cdot})^2] + {}^1/{}_2 A_1 (\alpha^{\cdot} + \beta_1^{\cdot} + \alpha_1^{\cdot})^2 + A_1 (\beta^{\cdot})^2 + {}^1/{}_2 A_3 (\alpha^{\cdot} + \beta_1^{\cdot} - \alpha_1^{\cdot})^2 + \\ + \sqrt{2}\, A_3 \gamma_0^{\cdot} \beta (\alpha_1^{\cdot} + \beta_1^{\cdot} + \alpha^{\cdot}) - Mgl\alpha_1^2 - Mgl\beta_1^2 - k_1\alpha^2 - k_2\beta^2 \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\varphi_5 = \sqrt{2} / 2 (\alpha^{\cdot} + \beta_1^{\cdot} - \alpha_1^{\cdot})$$

Полагая в выражении (3.4) $\alpha = \alpha_1 - \beta_1$, получим функцию L_1

$$\begin{aligned} L_1 = {}^1/{}_2 [(Ml^2 + 2A_1)(\alpha_1^{\cdot})^2 + Ml^2 (\beta_1^{\cdot})^2 + A_1 (\beta^{\cdot})^2 + 2\sqrt{2}\, A_3\gamma_0^{\cdot}\beta\alpha_1^{\cdot} - \\ - (Mgl + k_1)\alpha_1^2 + 2k_1\alpha_1\beta_1 - (Mgl + k_1)\beta_1^2 - k_2\beta^2] \end{aligned}$$

Функция ψ_1 из равенства (2.12) имеет вид

$$\psi = k_1 (A_1 + Ml^2)\beta_1 + [-k_1 (A_1 + Ml^2) + A_1 Mgl]\alpha_1 - \sqrt{2} / 2 A_3 \gamma_0^{\cdot} Ml^2 \beta^{\cdot}$$

Если предположить, что корни $\pm\lambda_1 i$, $\pm\lambda_2 i$, $\pm\lambda_3 i$ уравнения (1.4), соответствующего L_1, все различны, то условие асимптотической устойчивости по нормальной переменной x_i примет вид

$$\begin{aligned} A_1 Mgl - k_1 (A_1 + Ml^2) [1 + k_1(Ml^2\lambda_i^2 - Mgl - k_1)^{-1}] - A_3^2 Ml^2 (\gamma_0^{\cdot})^2 \lambda_i^2 (A_1\lambda_i^2 - \\ - k_2)^{-1} \neq 0 \end{aligned}$$

Автор благодарит Г. К. Пожарицкого за ценные замечания к работе.

Поступила 14 X 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Уиттекер Э. Т. Аналитическая динамика. М., Гостехиздат, 1956.
2. Габриелян М. С., Красовский Н. Н. К задаче о стабилизации механической системы. ПММ, 1964, т. 28, вып. 5.
3. Габриелян М. С. О стабилизации механической системы при одной циклической координате, Изв. АН АрмССР, Серия физико-математических наук, 1965, т. 18, вып. 6.
4. Габриелян М. С. О влиянии диссипативных и гироскопических сил на управляемость и наблюдаемость механических систем. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2.
5. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., Физматгиз, 1966.
6. Красовский Н. Н. Некоторые задачи устойчивости движения. М., Физматгиз, 1959.
7. Барбашин Е. А., Красовский Н. Н. Об устойчивости движения в целом. Докл. АН СССР, т. 86, вып. 3, 1952.
8. Соколова Л. Е. Об асимптотической устойчивости равновесий гироскопических систем с частичной диссипацией. ПММ, 1968, т. 32, вып. 2.
9. Сарычев В. А. Исследование динамики системы гравитационной стабилизации. ИСЗ, 1963, вып. 16.
10. Пожарицкий Г. К. Об асимптотической устойчивости равновесий и стационарных движений при частичной диссипации. ПММ, 1961, т. 25, вып. 4.
11. Ишлинский А. Ю. Механика гироскопических систем. М., Изд-во АН СССР, 1963.