Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 531/534:001.8

ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Л. В. Петухов, В. А. Троицкий

(Ленинград)

Рассматриваются задачи оптимизации процессов управления для систем, описываемых уравнениями второго порядка гиперболического типа, поставленные в форме связанной двумерной задачи Больца вариационного исчисления. Получены необходимые условия стационарности. Показано, что оптимальным решениям соответствуют множители Лагранжа, которые могут иметь разрывы внутри области допустимых изменений.

Оптимальные задачи для гиперболических уравнений с условиями на характеристиках для функционалов простейшего вида были рассмотрены в работах [1,2] при помощи принципа максимума Понтрягина.

1. Постановка задачи. Рассмотрим заданные в двумерной области Ω $(a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d)$ уравнение в частных производных и соотношения следующего вида:

$$L(z) = a_{11}z_{xx} + a_{22}z_{yy} + a_1 z_x + a_2 z_y = f(x, y, z, u) \tag{1.1}$$

$$\psi_k(x, y, u) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, r < m) \tag{1.2}$$

Здесь z_x, z_y, z_{xx}, z_{yy} — первые и вторые частные производные разыскиваемой непрерывной функции $z(x, y)$. Под $u = (u_1(x, y), \ldots, u_m(x, y))$ понимается m-мерный вектор кусочно-непрерывных управлений $u_k(x, y)$. Коэффициенты $a_1 = a_1(x, y)$, $a_2 = a_2(x, y)$, $a_{11} = a_{11}(x, y)$, $a_{22} = a_{22}(x, y)$ и функции $f = f(x, y, z, u)$ и $\psi_k = \psi_k(x, y, u)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные по всем аргументам до третьего порядка включительно при $x, y \in \Omega$.

Будем считать заданными начальные и граничные условия

$$z(a, y) = \varphi_1(y), \qquad z_x(a, y) = \varphi_2(y) \tag{1.3}$$

$$\varphi_c(x, z, z_y) = 0 \quad \text{при } y = c \tag{1.4}$$
$$\varphi_a(x, z, z_y) = 0 \quad \text{при } y = d$$

В этих равенствах функции $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\varphi_c(x, z, z_y)$ и $\varphi_d(x, z, z_y)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные по всем аргументам до третьего порядка включительно.

Поставим следующую оптимальную задачу: среди поверхностей, удовлетворяющих внутри области Ω уравнениям (1.1) и (1.2), при $x = a$ — соотношениям (1.3), а при $y = c$ и $y = d$ — зависимостям (1.4), найти такую, которая сообщает минимум функционалу

$$J = \iint\limits_{\Omega} f_0\, dx\, dy + \int\limits_c^d \varphi_b\, dy + \chi(z^\circ(b, y)) \tag{1.5}$$

Здесь $z^\circ(b, y) = (z(b, y_1^\circ), \ldots, z(b, y_p^\circ))$ — p-мерный вектор, где y_k° — заданные числа и $y_1^\circ = c$, $y_p^\circ = d$. Функции $f_0 = f_0(x, y, z, u)$ и $\chi(z^\circ(b, y))$ непрерывны вместе с производными по всем аргументам до третьего порядка включительно. Функция $\varphi_b = \varphi_b(y, z(b, y), z_x(b, y))$ кусочно-непрерывна, причем $\varphi_b(y, z, z_x) = \varphi_{b\gamma}(y, z, z_x)$ при $y \in (y_\gamma, y_{\gamma+1})$ и $\varphi_{b\gamma}(y, z, z_x)$ непрерывна вместе с производными до третьего порядка включительно. Разрывы функции $\varphi_b(y, z, z_x)$ при $y = y_\gamma$ считаются заданными.

2. Необходимое условие стационарности J. Уравнение Эйлера. Для сформулированной задачи могут быть доказаны леммы о включении поверхности E, сообщающей минимум функционалу (1.5), в однопараметрическое или многопараметрическое семейства поверхностей сравнения. При помощи этих лемм доказывается первое необходимое условие стационарности функционала J. Здесь оно будет использоваться в таком же виде, как и в работах [3,4] для связанной одномерной задачи Больца и в докладе [5] для многомерной задачи.

Для того чтобы функционал J принимал минимальное значение на поверхности E, на ней необходимо выполнить равенство

$$\Delta I = 0 \tag{2.1}$$

в котором

$$I = I_0 + I_1 + I_2 = \chi(z^\circ(b, y)) + \int_a^b L_1'\,dx + \int_c^d L_1''\,dy + \iint_\Omega L_2\,dx\,dy \tag{2.2}$$

$$L_1'(z_y, z, \eta_c, \eta_d, x) = \eta_c\varphi_c(x, z, z_y) + \eta_d\varphi_d(x, z, z_y) \tag{2.3}$$

$$L_1''(z_x, z, \eta_1, \eta_2, y) = \eta_1[z(a, y) - \varphi_1(y)] + \eta_2[z_x(a, y) - \varphi_2(y)]$$

$$L_2(z_{xx}, z_{yy}, z_x, z_y, u, \lambda, \mu, x, y) = f_0 + \lambda L(z) - \lambda f + \sum_{k=1}^{r} \mu_k\psi_k$$

где $\lambda = \lambda(x, y)$, $\mu_k = \mu_k(x, y)$, $\eta_c = \eta_c(x)$, $\eta_d = \eta_d(x)$, $\eta_1 = \eta_1(y)$, $\eta_2 = \eta_2(y)$ — неопределенные множители Лагранжа, ΔI — полная вариация функционала I.

При вычислении вариации ΔI будем считать, что вся область Ω состоит из n элементарных областей ω_i $(i = 1, \ldots, n)$; в каждой из них функции $z(x, y)$ и $\lambda(x, y)$ непрерывны и имеют непрерывные производные, а функции $\mu_k(x, y)$ и $u_1(x, y), \ldots, u_m(x, y)$ — непрерывны.

Элементарная область ω_i имеет кусочно-гладкую границу S_i. Гладкие отрезки S_{ij} $(j = 1, \ldots, \tau_i)$ этой границы могут быть линиями следующих типов: 1) частью границы области Ω, 2) линией разрыва параметров управления, не совпадающей с характеристикой уравнения (1.1), 3) линией разрыва параметров управления, совпадающей с характеристикой уравнения (1.1), 4) линией разрыва множителей $\lambda(x, y)$, $\mu_k(x, y)$, совпадающей с характеристикой (1.1). Число нехарактеристических граничных линий, внутренних для области Ω, обозначим через q_1, а число характеристических граничных линий — через q_2. Введем обозначение $q = q_1 + q_2$. Будем считать, что граница S_i имеет τ_i точек M_{ij} нарушения гладкости. В каждой из них могут пересекаться любое конечное число нехарактеристических граничных линий с одной или двумя характеристическими граничными линиями. Пусть m_a, m_b, m_c и m_d — числа элементарных областей ω_i, примыкающих к участкам границы $x = a$, $x = b$, $y = c$ и $y = d$ области Ω.

Рассмотрим отдельные слагаемые левой части равенства (2.1). Начнем с вариации ΔI_2. Составив ее, будем иметь

$$\Delta I_2 = \iint\limits_{\Omega} \Big[\frac{\partial L_2}{\partial z}\delta z + \lambda L(\delta z) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial L_2}{\partial u_k}\delta u_k\Big] dx\,dy + \sum_{i=1}^{n} \oint\limits_{S_i} L_2 \delta N\,ds \tag{2.4}$$

Здесь δz, δu_k и δN — вариации функций z, u_k и граничного контура S_i по направлению нормали. После применения формулы Грина — Римана к интегралу, содержащему $L(\delta z)$, и использования формул (2.3), получим

$$\begin{aligned}
\Delta I_2 = \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{\omega_i} \Big\{ \Big[(a_{11}\lambda_i)_{xx} + (a_{22}\lambda_i)_{yy} - (a_1\lambda_i)_x - (a_2\lambda_i)_y - \frac{\partial f}{\partial z}\lambda_i + \frac{\partial f_0}{\partial z}\Big] \delta z_i + \\
+ \sum_{k=1}^{m} \Big[\sum_{\alpha=1}^{r} \mu_{\alpha i} \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial u_{ki}} + \frac{\partial f_0}{\partial u_k} - \lambda_i \frac{\partial f}{\partial u_k}\Big] \delta u_{ki} \Big\} dx\,dy + \\
+ \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{S_i} \{ [a_1\lambda_i\delta z_i + a_{11}\lambda_i\delta z_{ix} - (a_{11}\lambda_i)_x \delta z_i] n_{1i} + \\
+ [a_2\lambda_i\delta z_i - a_{22}\lambda_i\delta z_{iy} + (a_{22}\lambda_i)_y \delta z_{iy}] n_{2i} + L_2\delta N \} ds \\
n_1 = \frac{dx}{dN} = \frac{dy}{ds}, \qquad n_2 = \frac{dy}{dN} = -\frac{dx}{ds}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Здесь n_1, n_2 — направляющие косинусы нормали к контуру S; N и s — координаты, отсчитываемые по нормали и по касательной к контуру (касательная направлена в сторону положительного обхода контура, нормаль считается внешней); δN — вариация контура S_i по направлению нормали; индексом i отмечена принадлежность соответствующих функций элементарной области ω_i.

Вычислив вариации ΔI_1 и ΔI_0, найдем

$$\Delta I_1 = \int\limits_c^d (\eta_1\delta z + \eta_2\delta z_x)\,dy + \int\limits_a^b \eta_c \Big(\frac{\partial \varphi_c}{\partial z}\delta z + \frac{\partial \varphi_c}{\partial z_y}\delta z_y\Big) dx + \tag{2.6}$$

$$+ \int\limits_a^b \eta_l \Big(\frac{\partial \varphi_d}{\partial z}\delta z + \frac{\partial \varphi_d}{\partial z_y}\delta z_y\Big) dx + \int\limits_c^d \Big(\frac{\partial \varphi_b}{\partial z}\delta z + \frac{\partial \varphi_b}{\partial z_y}\delta z_y\Big) dy + \sum_{k=1}^{m_b} (\varphi_{bk}^{-} - \varphi_{bk}^{+})\,\Delta y_k$$

$$\Delta I_0 = \sum_{\gamma=1}^{p} \frac{\partial \chi}{\partial z_\gamma}\delta z\,(b, y_\gamma{}^\circ) \tag{2.7}$$

Индексы минус и плюс означают левый и правый пределы функции φ_b.

Подставив ΔI_0, ΔI_1 и ΔI_2 в равенство (2.1), получим выражение, содержащее слагаемые, зависящие от двукратных интегралов по элементарным областям ω_i, от интегралов по границам S_i этих областей и от интегралов по участкам границы области Ω, и слагаемые, не зависящие от интегралов. Обычные для вариационного исчисления рассуждения позволяют установить, что для выполнения условия стационарности (2.1) нужно приравнять нулю каждую из этих групп слагаемых. Приравняв нулю слагаемые, содержащие кратные интегралы, и применив основную лемму вариационного исчисления, получим уравнение Эйлера

$$M(\lambda) = (a_{11}\lambda)_{xx} + (a_{22}\lambda)_{yy} - (a_1\lambda)_x - (a_2\lambda)_y = (\partial f / \partial z)\lambda - \partial f_0 / \partial z \qquad (2.8)$$

определяющее множитель $\lambda(x, y)$, и соотношения

$$\sum_{\alpha=1}^{r} \mu_\alpha \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial u_k} + \frac{\partial f_0}{\partial u_k} - \lambda \frac{\partial f}{\partial u_k} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, m) \qquad (2.9)$$

которые должны выполняться в каждой из элементарных областей ω_i, т. е. в каждой точке области Ω, в которой $\lambda(x, y)$ и $\mu_\alpha(x, y)$ непрерывны. В связи с этим индексы i в уравнениях (2.8) и (2.9) опущены.

3. Условия Эрдмана — Вейерштрасса. Для получения условий Эрдмана — Вейерштрасса на граничных линиях S_i элементарных областей ω_i и граничных условий в точках границы области Ω проведем анализ оставшихся слагаемых в вариации ΔI. Сначала перейдем в ΔI к координатам s и N, отсчитываемым по касательной и по нормали к граничным контурам. Тогда для производных некоторой функции $F(x, y)$ будем иметь формулы $F_x = F_N n_1 - F_s n_2$, $F_y = F_N n_2 + F_s n_1$. Применим их при вычислении входящих в соотношение (2.5) производных δz_x, δz_y, $(a_{11}\lambda)_x$, $(a_{22}\cdot\lambda)_y$ и проинтегрируем по частям слагаемые, содержащие производную δz_s. После проведения этих операций выражение для вариаций примет вид

$$\begin{aligned}
\Delta I = &\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{\tau_i} \int_{S_{ij}} \Big\{ A_{1ij}\lambda_{ij}\delta z_{ijN} + [(a_1 n_{1ij} + a_2 n_{2ij})\lambda_{ij} - (A_{1ij}\lambda_{ij})_N - 2(A_{2ij}\lambda_{ij})_s + \\
&+ (A_{3ij} - A_{1ij})\rho_{ij}^{-1}]\,\delta z_{ij} + [f_0 + \lambda_{ij} L(z_{ij}) - \lambda_{ij} f]\,\delta N_{ij}\Big\}\, ds + \\
&+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{\tau_i} [A_2\lambda\delta z]_{M_{ij}}^{M_{i,j+1}} + \int_a^b \left[\eta_c \frac{\partial \varphi_c}{\partial z}\delta z(x, c) + \eta_c \frac{\partial \varphi_c}{\partial z_y}\delta z_y(x, c)\right] dx + \qquad (3.1) \\
&+ \int_a^b \left[\eta_d \frac{\partial \varphi_d}{\partial z}\delta z(x, d) + \eta_d \frac{\partial \varphi_d}{\partial z_y}\delta z_y(x, d)\right] dx + \int_c^d [\eta_1 \delta z(a, y) + \\
&+ \eta_2 \delta z_x(a, y)]\, dy + \int_c^d \left[\frac{\partial \varphi_b}{\partial z}\delta z(b, y) + \frac{\partial \varphi_b}{\partial z_x}\delta z_x(b, y)\right] dy + \\
&+ \sum_{k=1}^{m_b} (\varphi_{bk}^- - \varphi_{bk}^+)\Delta y_k + \sum_{\gamma=1}^{p} \frac{\partial \chi}{\partial z_\gamma}\delta z(b, y_\gamma^\circ) = 0
\end{aligned}$$

Здесь введены обозначения A_1, A_2 и A_3, определяемые формулами (П.3) (см. приложение), в которых $a_{12} = 0$ и через ρ_i обозначен радиус кривизны контура S_i. Входящие в соотношение (3.1) вариации δz_{ij}, δz_{ijN}, $\delta z|_{M_{ij}}$ преобразуем по формулам

$$\delta z_{ij} = \Delta z_{ij} - z_{ijN}\delta N_{ij}, \quad \delta z_{ijN} = \Delta z_{ijN} - z_{ijNN}\delta N \qquad (3.2)$$

$$\delta z|_{M_{ij}} = \Delta z|_{M_{ij}} - z_{ijx}\Delta x_{ij} - z_{ijy}\Delta y_{ij} \qquad (3.3)$$

где Δz_{ij} — вариации функции z на линии S_{ij}, $\Delta z|_{M_{ij}}$ — вариация этой функции в точке M_{ij}, а Δx_{ij} и Δy_{ij} — вариации координат точки M_{ij} Воспользовавшись равенствами (3.2) и (3.3), приведем выражение (3.1) к виду

$$\begin{gathered}
\Delta I = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\tau_i}\int_{S_{ij}}\{A_1\lambda\Delta z_N + [(a_1n_1 + a_2n_2)\lambda - (A_1\lambda)_N - 2(A_2\lambda)_s + \\
+ (A_3 - A_1)\rho^{-1}\lambda]\,\Delta z + [f_0 - \lambda f + 2A_2\lambda(z_{sN} - \rho^{-1}z_s) + \\
+ A_3\lambda(z_{ss} + \rho^{-1}z_N) - (a_1n_2 - a_2n_1)\lambda z_s + (A_1\lambda)_N z_N + \\
+ 2(A_2\lambda)_s z_N + (A_1 - A_3)\rho^{-1}\lambda z_N]\,\delta N\}\,ds + \\
+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\tau_i}[A_2\lambda\Delta z - A_2\lambda(z_x\Delta x + z_y\Delta y)]_{M_{ij}}^{M_{ij+1}} + \\
+ \sum_{k=1}^{m_c}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\eta_c\left[\frac{\partial\varphi_c}{\partial z}\Delta z(x, c) + \frac{\partial\varphi_c}{\partial z_y}\Delta z_y(x, c)\right]dx + \\
+ \sum_{k=1}^{m_d}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\eta_d\left[\frac{\partial\varphi_d}{\partial z}\Delta z(x, d) + \frac{\partial\varphi_d}{\partial z_y}\Delta z_y(x, d)\right]dx + \\
+ \sum_{k=1}^{m_a}\int_{y_k}^{y_{k+1}}[\eta_1\Delta z(a, y) + \eta_2\Delta z_x(a, y)]\,dy + \sum_{k=1}^{m_b}\int_{y_k}^{y_{k+1}}\left[\frac{\partial\varphi_b}{\partial z}\Delta z(b, y) + \right. \\
\left. + \frac{\partial\varphi_b}{\partial z_x}\Delta z_x(b, y)\right]dy + \sum_{k=1}^{m_b}(\varphi_{bk}^- - \varphi_{bk}^+)\,\Delta y_k + \sum_{\gamma=1}^{p}\frac{\partial\chi}{\partial z_\gamma}\Delta z(b, y_\gamma^\circ) = 0
\end{gathered} \tag{3.4}$$

Здесь и далее опущены индексы i и j и использованы равенства

$$\begin{aligned}
-(a_1n_1 + a_2n_2)\lambda z_N &= -\lambda a_1 z_x - \lambda a_2 z_y - \lambda(a_1n_2 - a_2n_1)z_s \\
-A_1\lambda z_{NN} &= -\lambda a_{11}z_{xx} - \lambda a_{22}z_{yy} + 2A_2\lambda(z_{sN} - \rho^{-1}z_s) + \\
&\quad + A_3\lambda(z_{ss} - \rho^{-1}z_N)
\end{aligned} \tag{3.5}$$

и на основании условия (2.1) требуется, чтобы вариация равнялась нулю.

Перейдем к установлению условий Эрдмана — Вейерштрасса на разных участках граничных линий S_{ij} элементарных областей ω_i.

Рассмотрим линию второго типа и будем считать, что она разграничивает области ω_i и ω_k. Функции, относящиеся к области ω_i, отметим индексом минус, а функции, относящиеся к области ω_k, — индексом плюс. Тогда при переходе через линию S_{ij}

$$\begin{gathered}
\Delta z^- = \Delta z^+ = \Delta z, \qquad \Delta z_N^- = \Delta z_N^+ = \Delta z_N \\
\delta N^- = \delta N^+ = \delta N
\end{gathered} \tag{3.6}$$

(эти вариации независимы).

Выделим в (3.4) слагаемые, содержащие Δz_N, и приравняем их нулю; получим $\lambda^- A_1^- - \lambda^+ A_1^+ = 0$. На линии второго типа $A_1^- = A_1^+ \neq 0$ Поэтому

$$\lambda^- = \lambda^+ \text{ на } S_{ij} \tag{3.7}$$

Выделив в (3.4) слагаемые, зависящие от Δz, найдем

$$\begin{gathered}
-2A_2\lambda_s^- - A_1\lambda_N^- + B_1\lambda^- = -2A_2\lambda_s^+ - A_1\lambda_N^+ + B_1\lambda^+ \\
B_1 = a_1n_1 + a_2n_2 - A_{1N} - 2A_{2s} - \rho^{-1}(A_1 - A_3)
\end{gathered} \tag{3.8}$$

На линии S_{ij} справедливо равенство (3.7) и соотношение $\lambda_s^- = \lambda_s^+$. Следовательно, выполняется равенство

$$\lambda_N^- = \lambda_N^+ \quad \text{на } S_{ij} \tag{3.9}$$

Наконец, если выделить в (3.4) слагаемые, содержащие δN, и учесть полученные выше условия, то получится соотношение

$$f_0^- - \lambda^- f^- = f_0^+ - \lambda^+ f^+ \quad \text{на } S_{ij} \tag{3.10}$$

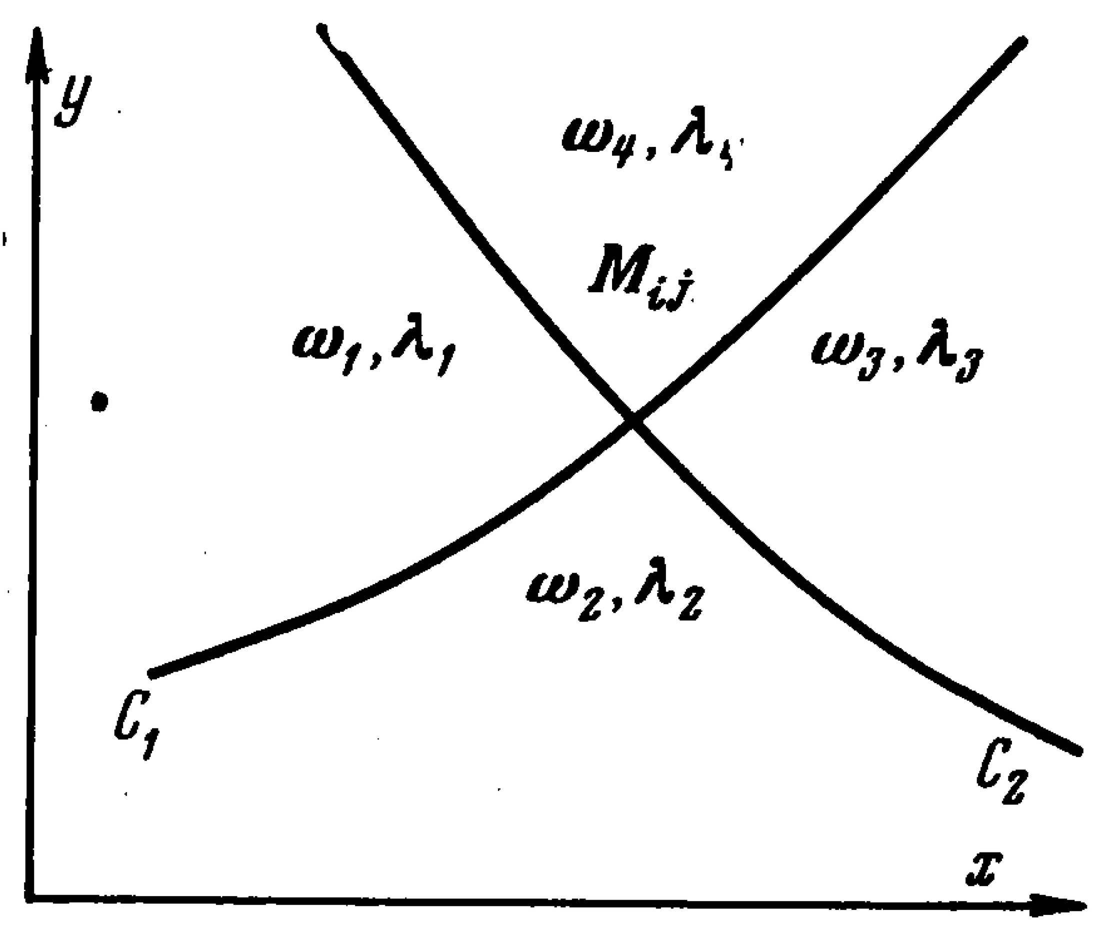
Следует отметить, что входящие в вариацию (3.4) слагаемые, зависящие от Δz, Δx и Δy, вычисленных в точках M_{ij}, для линий S_{ij} второго типа взаимно уничтожаются.

Изучим отрезок S_{ij} третьего типа. Так как S_{ij} отрезок характеристики, то на нем выполняется равенство $A_1 = 0$ и обращаются в нуль слагаемые в (3.5), содержащие Δz_N. В связи с этим на S_{ij} может иметь место неравенство $\lambda^- \neq \lambda^+$. Приравняв нулю коэффициент при вариации Δz, получим уравнение

$$-2A_2[\lambda^- - \lambda^+]_s + B_1[\lambda^- - \lambda^+] = 0 \quad \text{на } S_{ij} \tag{3.11}$$

определяющее изменение разрыва $\lambda^- - \lambda^+$ множителя λ вдоль характеристики. Следовательно, этот разрыв может быть найден, если будут заданы условия на границе области Ω, которые будут получены в дальнейшем. Если изучаемая линия фиксирована, то $\delta N = 0$. В случае подвижной линии условия имеют достаточно сложный вид и будут исследованы ниже.

Рассмотрим точку M_{ij} пересечения двух характеристик C_1 и C_2 (фиг. 1). В этой точке может пересекаться любое число нехарактеристических линий — они не вводят дополнительных разрывов множителя λ, поэтому можно использовать показанные на фиг. 1 обозначения.



Фиг. 1

Выделив из (3.4) слагаемые, относящиеся к точке M_{ij}, после сокращения на отличный от нуля множитель $A_{2C_1} - A_{2C_2}$, получим выражение

$$[\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4]_{M_{ij}} = 0 \tag{3.12}$$

показывающее, что величина разрыва множителя λ на характеристике не меняется при переходе через другую характеристику.

4. Граничные условия. Рассмотрим теперь линии S_{ij} первого типа, которые являются частями внешней границы области Ω. Начнем с границы $x = a$, $c \leqslant y \leqslant d$. Приравняв нулю коэффициенты при вариациях $\Delta z_x(a, y)$ и $\Delta z(a, y)$, получим по два условия

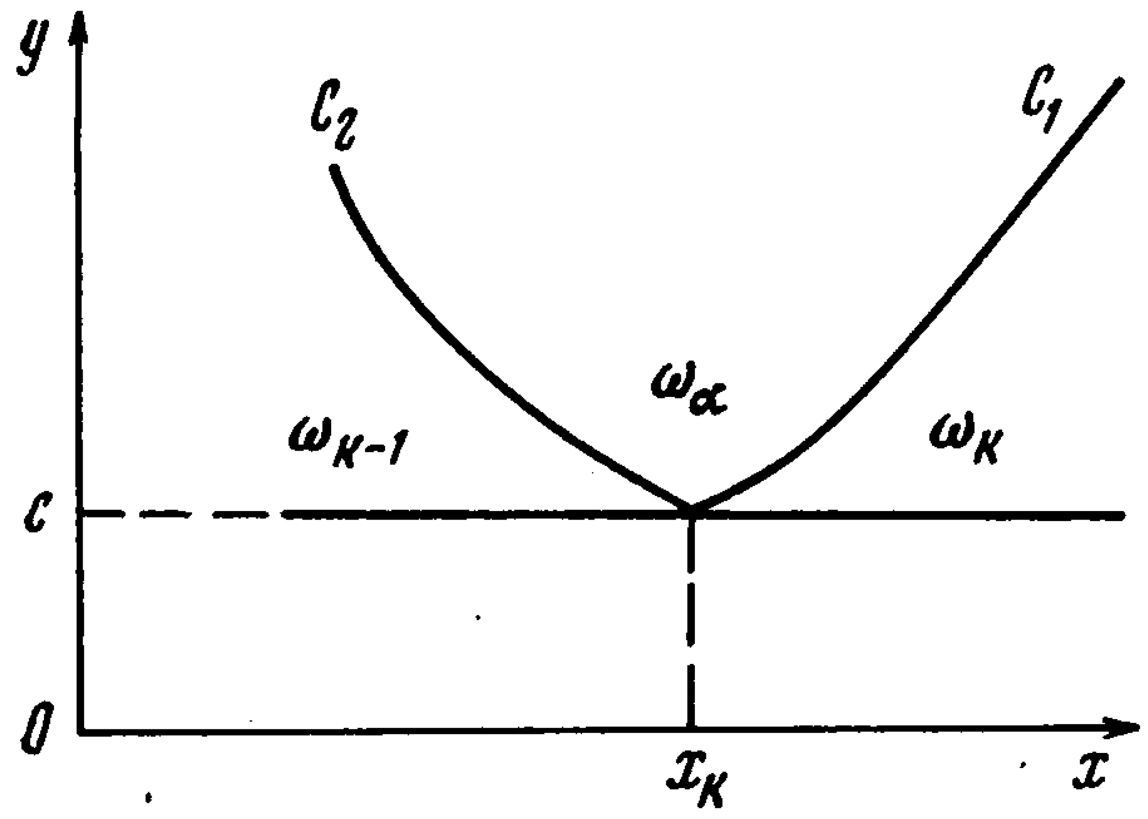
$$A_{1a}\lambda_k(a, y) = \eta_{2k} \qquad (k = 1, \ldots, m_a) \tag{4.1}$$
$$-A_{1a}\lambda_{kx}(a, y) + (a_1 - A_{1ax})\lambda_k(a, y) = \eta_{1k}$$

Анализ слагаемых, содержащих вариации $\Delta z_y\,(x, c)$ и $\Delta z\,(x, c)$ для граничного участка $y = c$, $a \leqslant x \leqslant b$, приводит к следующим результатам:

$$A_{1c}\lambda_k(x, c) = \eta_{ck}\partial\varphi_c / \partial z_y \qquad (k = 1, \ldots, m_c)$$

$$A_{1c}\lambda_{ky}(x, c) - (a_2 - A_{1cy})\,\lambda_k(x, c) = -\eta_{ck}\partial\varphi_c / \partial z \tag{4.2}$$

Если на границе $y = c$ имеются показанные на фиг. 2 точки пересечения характеристических линий C_1 и C_2, то для разрывов множителя λ получается следующее соотношение, которое должно выполняться при $x = x_k$, $y = c$:



Фиг. 2

$$\lambda_\alpha - \lambda_k = \begin{cases} -\lambda_\alpha + \lambda_{k-1}, & \varphi_{czy}\,|_{x=x_k} \neq 0 \\ \lambda_\alpha - \lambda_{k-1}, & \varphi_{czy}\,|_{x=x_k} = 0 \end{cases} \tag{4.3}$$

Здесь были использованы формулы (П. 10) приложения.

Для участка границы $y = d$, $a \leqslant x \leqslant b$ находятся аналогичные условия. Во всех его точках будем иметь

$$A_{1d}\lambda_k(x, d) = \eta_{dk}\,\partial\varphi_d / \partial z_y \qquad (k = 1, \ldots, m_d) \tag{4.4}$$

$$A_{1d}\lambda_{ky}(x, d) - (a_2 - A_{1dy})\,\lambda_k(x, d) = -\eta_{dk}\,\partial\varphi_d / \partial z$$

В точках $x = x_k$ пересечения характеристик получим

$$\lambda_\alpha - \lambda_k = \begin{cases} -\lambda_\alpha + \lambda_{k-1}, & \varphi_{dzy}\,|_{x=x_k} \neq 0 \\ \lambda_\alpha - \lambda_{k-1}, & \varphi_{dzy}\,|_{x=x_k} = 0 \end{cases} \tag{4.5}$$

Для участка границы $x = b$, $c \leqslant y \leqslant d$ получаются следующие условия:

$$A_{1b}\lambda_k(b, y) = -\partial\varphi_{bk} / \partial z_x \qquad (k = 1, \ldots, m_b) \tag{4.6}$$

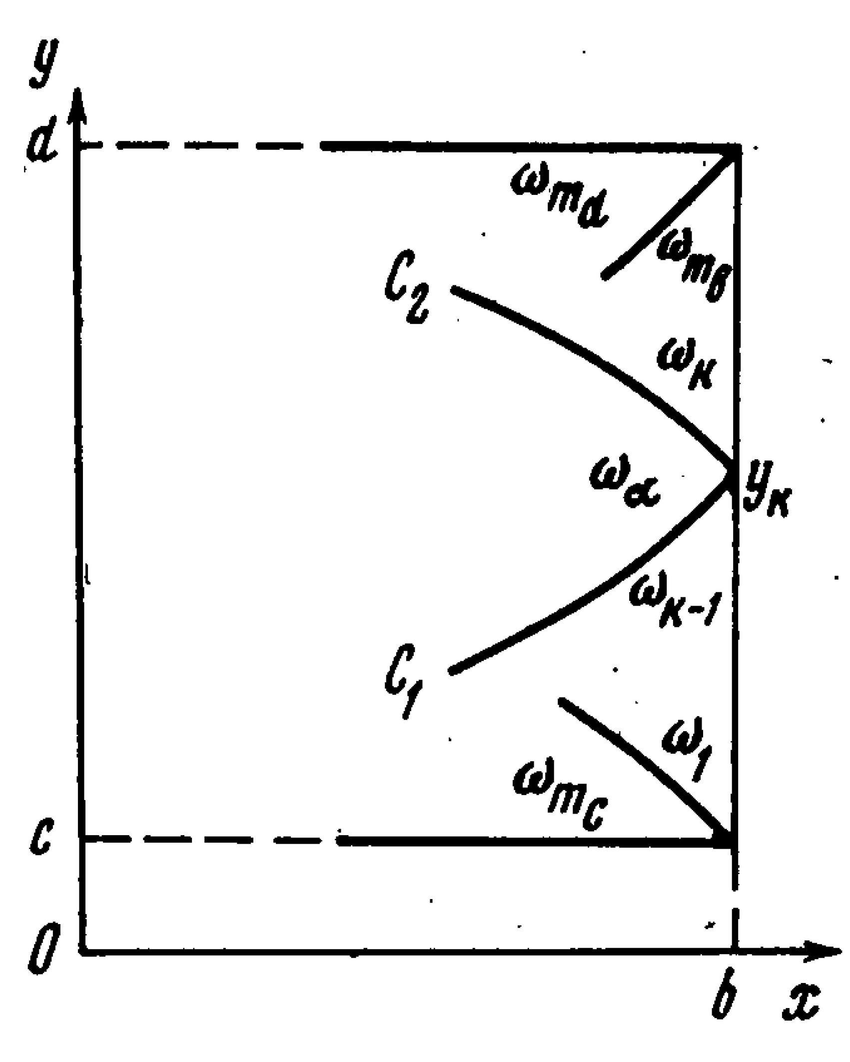
$$-A_{1b}\lambda_{kx}(b, y) + (a_1 - A_{1bx})\,\lambda_k(b, y) = -\partial\varphi_{bk} / \partial z$$

На этом участке имеются описанные выше заданные точки

$$y = y^\circ_\gamma \; (\gamma = 1, \ldots, p), \quad y_1^\circ = c, \quad y_p^\circ = d$$

и могут иметься некоторое число подвижных точек. И те и другие точки пронумерованы от единицы до m_b, причем $y_1 = c$, а $y_{m_b} = d$ (фиг. 3). Анализ слагаемых в выражении (3.4), соответствующих $y = y_k$, $x = b$ $(k = 2, \ldots, m_b - 1)$, приводит к условиям

$$\lambda(b, y_k) = \frac{1}{2}\lambda(b, y_k - 0) + \frac{1}{2}\lambda(b, y_k + 0) - \frac{1}{2\sqrt{-a_{11}a_{22}}}\frac{\partial\chi}{\partial z\,(b, y_k)} \qquad (k = 2, \ldots, m_b - 1) \tag{4.7}$$



Фиг. 3

Для точки $y_1 = y_1^\circ = c, x = b$ это условие заменяется следующим:

$$\lambda(b - 0, c) = \lambda(b, c + 0) - \frac{1}{\sqrt{-a_{11}a_{22}}}\frac{\partial\chi}{\partial z\,(b, y_1^\circ)}, \qquad \frac{\partial\varphi_c}{\partial z_y} \neq 0 \tag{4.8}$$

Аналогично в точке $y_{m_b} = y_p{}^\circ = d,\ x = b$

$$\lambda(b-0, d) = \lambda(b, d-0) - \frac{1}{\sqrt{-a_{11}a_{22}}}\frac{\partial\chi}{\partial z\,(b, y_p{}^\circ)}, \quad \frac{\partial\varphi_d}{\partial z_y} \neq 0 \qquad (4.9)$$

Если производные $\partial\varphi_c/\partial z_y = 0$ или $\partial\varphi_d/\partial z_y = 0$, то в угловых точках множитель λ может иметь соответственно разрыв $\lambda(b-0,\ c) \neq \lambda(b,\ c+0)$ или $\lambda(b-0,\ d) \neq \lambda(b,\ d-0)$.

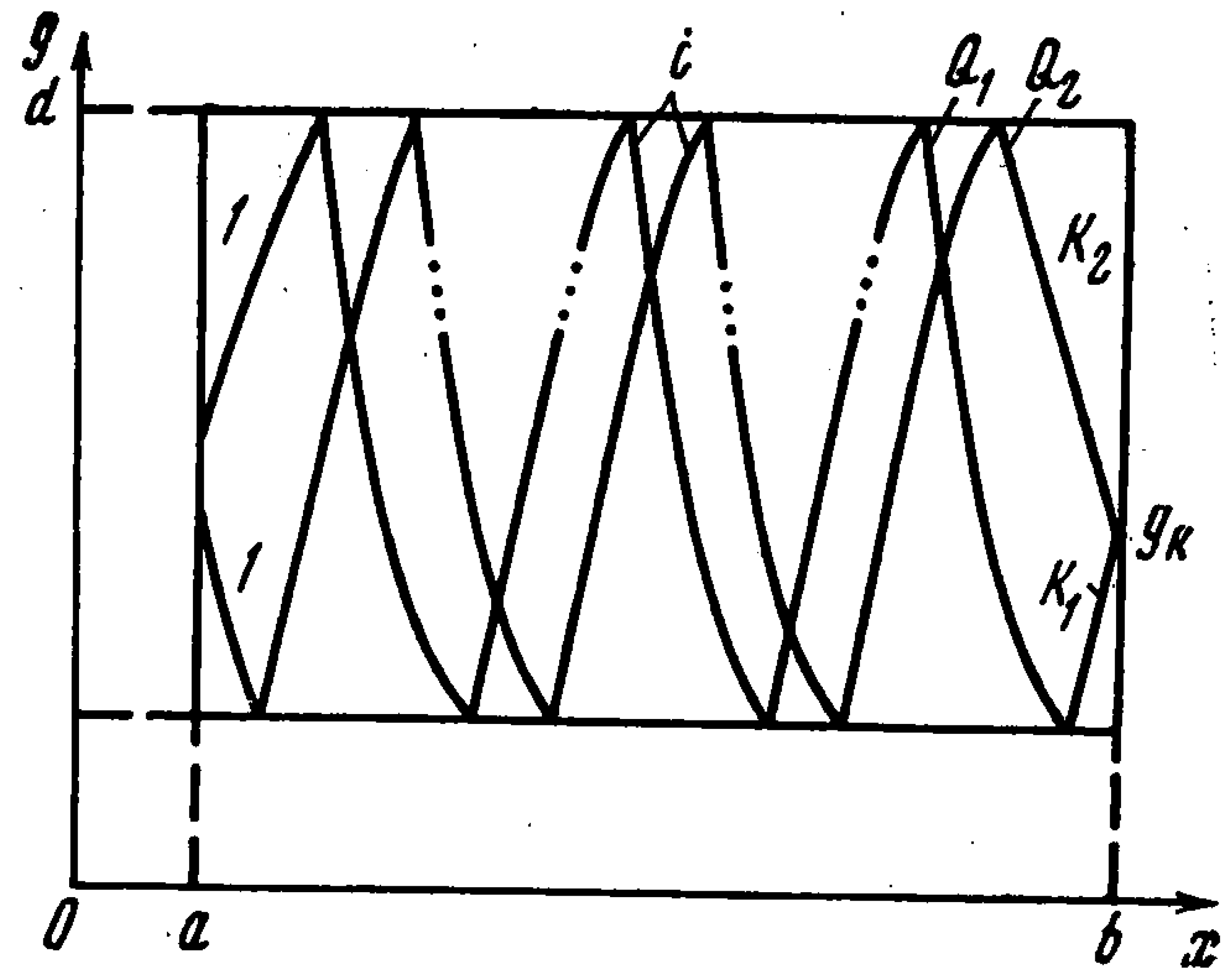
Найдем необходимое условие в случае подвижных характеристик. Выпишем из (3.4) оставшиеся слагаемые и внесем слагаемые, содержащие Δx и Δy, под интеграл, для чего используем формулы (П.17) и (П.20). После приведения подобных членов получим

$$\sum_{i=1}^{n_0}\sum_{j=1}^{\tau_{0i}}\int\limits_{S_{ij}}\left[f_0 - \frac{1}{2}(\lambda^+ + \lambda^-)f\right]\delta N\,ds +$$

$$+\sum_{k=1}^{m_b}[a_{11}(b, y_k)\lambda(b, y_k)(z_x{}^- - z_k{}^+) + \varphi_b{}^- - \varphi_b{}^+]\,\Delta y_k = 0 \qquad (4.10)$$

$$z_x{}^- = z_x(b,\ y_x - 0)', \qquad z_x{}^+ = z_x(b,\ y_k + 0)$$

Здесь n_0 — число элементарных областей, образованных характеристиками, τ_{0i}—число гладких характеристических линий, ограничивающих ω_i, $\lambda^- = \lambda(x, y-0)$, $\lambda^+ = \lambda(x, y+0)$, где x и y лежат на характеристике S_{ij}.



Фиг. 4

Предположим, что имеется одна подвижная точка $y_k \neq y_\gamma{}^0$ $(\gamma = 1, \ldots, p)$. Тогда область Ω будет разбита линиями Q_1 и Q_2, состоящими соответственно из k_1 и k_2 отрезков характеристик (фиг. 4). Обозначим через x_i' пересечение i-го отрезка характеристики линии Q_1 с границей $y = d$, если $k_1 - i$ — нечетное, или с границей $y = c$, если $k_1 - i$ — четное $(i = 2, \ldots, k_1)$, а через x_j'' пересечение j-го отрезка характеристики линии Q_2 с границей $y = c$, если $k_2 - j$ — нечетное, или с границей $y = d$, если $k_2 - j$ — четное $(j = 2, \ldots, k_2)$.

В выражении (4.10) δN на каждом участке S_{ij} зависят от вариации постоянных D_1 и D_2 (см. (П.16)). Линии Q_1 и Q_2 непрерывные и исходят из точки $x = b$, $y = y_k$, поэтому каждый отрезок их определяется в конечном итоге этой точкой.

Вариация $k_\alpha - i + 1$ отрезка характеристики линии Q_α $(\alpha = 1, 2)$ будет иметь вид

$$\delta D_{\alpha k_\alpha - i+1} = \Theta_{\alpha, i}\Delta y_k \qquad (i = 1, \ldots, k_\alpha) \qquad (4.11)$$

Здесь

$$\Theta_{1,i} = \begin{cases} F_{1y}(b, y_k) \quad (i = k_1) \\ \dfrac{F_{1x}(x'_{i+1}, d)F_{2x}(x'_{i+2}, c)\ldots F_{2x}(x'_{k_1}, c)}{F_{2x}(x'_{i+1}, d)F_{1x}(x'_{i+2}, c)\ldots F_{1x}(x'_{k_1}, c)} F_{1y}(b, y_k) \quad (k_1 - i \text{ — четное}) \\ \dfrac{F_{2x}(x'_{i+1}, c)F_{1x}(x'_{i+2}, d)\ldots F_{2x}(x'_{k_1}, c)}{F_{1x}(x'_{i+1}, c)F_{2x}(x'_{i+2}, d)\ldots F_{1x}(x'_{k_1}, c)} F_{1y}(b, y_k) \quad (k_1 - i \text{ — нечетное}) \end{cases} \tag{4.12}$$

$$\Theta_{2,i} = \begin{cases} F_{2y}(b, y_k) \quad (i = k_2) \\ \dfrac{F_{2y}(x''_{i+1}, c)F_{1x}(x''_{i+2}, d)\ldots F_{1x}(x''_{k_2}, d)}{F_{1x}(x''_{i+1}, c)F_{2x}(x''_{i+2}, d)\ldots F_{2x}(x''_{k_2}, d)} F_{2y}(b, y_k) \quad (k_2 - i \text{ — четное}) \\ \dfrac{F_{1x}(x''_{i+1}, d)F_{2x}(x''_{i+2}, c)\ldots F_{1x}(x''_{k_2}, d)}{F_{2x}(x''_{i+1}, d)F_{1x}(x''_{i+2}, c)\ldots F_{2x}(x''_{k_2}, d)} F_{2y}(b, y_k) \quad (k_2 - i \text{ — нечетное}) \end{cases} \tag{4.13}$$

Приравнивая нулю коэффициенты при Δy_k, получим последнее необходимое условие

$$\sum_{i=1}^{k_1} \Theta_{1,i} \int_{x_i'}^{x'_{i+1}} \left[f_0^+ - f_0^- - \frac{1}{2}(\lambda^- + \lambda^+)(f^+ - f^-)\right]\frac{dx}{\theta_1} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k_2} \Theta_{2,i} \int_{x_i''}^{x''_{i+1}} \left[f_0^+ - f_0^- - \frac{1}{2}(\lambda^- + \lambda^+)(f^+ - f^-)\right]\frac{dx}{\theta_2} = \tag{4.14}$$

$$= \varphi_b^+ - \varphi_b^- + a_{11}(b, y_k)\lambda(b, y_k)(z_x^+ - z_x^-) = 0$$

Здесь $x_1' = x_1'' = a, \quad x'_{k_1+1} = x''_{k_2+1} = b$

$$\theta_1 = \begin{cases} |F_{1y}| & (k_1 - i\text{—четное}) \\ |F_{2y}| & (k_1 - i\text{—нечетное}) \end{cases}$$

$$\theta_2 = \begin{cases} |F_{1y}| & (k_2 - i\text{—нечетное}) \\ |F_{2y}| & (k_2 - i\text{—четное}) \end{cases}$$

Приложение. Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение гиперболического типа [6,7]:

$$a_{11}z_{xx} + a_{12}z_{xy} + a_{22}z_{yy} + a_1z_x + a_2z_y = f(x, y, z, u) \tag{П.1}$$

Здесь использованы обозначения П.1. Перейдем к новым переменным s и N, отсчитываемым по касательной и по нормали кривой C. Получим

$$A_1z_{NN} + 2A_2z_{sN} + A_3z_{ss} + Bz_N + (-a_1n_2 + a_2n_1 - 2\rho^{-1}A_2)z_s = f \tag{П.2}$$

$$A_1 = a_{11}n_1^2 + a_{12}n_1n_2 + a_{22}n_2^2$$

$$A_2 = -a_{11}n_1n_2 + {}^1/_2a_{12}(n_1^2 - n_2^2) + a_{22}n_1n_2 \tag{П.3}$$

$$A_3 = a_{11}n_2^2 - a_{12}n_1n_2 + a_{22}n_1^2$$

$$B = a_1n_1 + a_2n_2 + \rho^{-1}A_3$$

Здесь ρ — радиус кривизны C, n_1 и n_2 — направляющие косинусы нормали.

Обозначим через z^- и z^+ значение функции z слева и справа от кривой C при движении по ней в сторону возрастания s. Пусть z вместе с производной z_N непрерывна при переходе через C. Тогда непрерывными будут производные z_s, z_{sN}, z_{ss}. Для z_{NN} имеем

$$A_1[z_{NN}] = [f], \ [z_{NN}] = z^-_{NN} - z^+_{NN}, \ [f] = f^- - f^+ \tag{П.4}$$

Следовательно, $[z_{NN}] \neq 0$, если $[f] \neq 0$ и линия C не является решением уравнения

$$A_1 = a_{11}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 - a_{12}\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds} + a_{22}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = 0 \qquad (\text{П.5})$$

т. е. не является характеристикой уравнения (П.1). Конечный или бесконечный разрыв производной z_{NN} при непрерывной правой части уравнения (П.1) может иметь место лишь на характеристической линии.

Продифференцировав уравнение (П.2) по N при условии, что C — характеристика, получим уравнение

$$2A_2\,[z_{NN}]_s + B\,[z_{NN}] = [f_N] \qquad (\text{П.6})$$

показывающее, что разрыв непрерывности функции z_{NN} может возникнуть за счет граничных условий и за счет разрыва функции f_N.

Если z непрерывна, а z_N разрывна при переходе через линию C, то эта линия должна быть характеристикой, и величина разрыва $[z_N]$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$2A_2\,[z_N]_s + B\,[z_N] = [f] \qquad (\text{П.7})$$

Таким образом, источником разрывности функции z_N могут быть и граничные условия и разрывность правой части. Если функция z разрывна, то для величины разрыва $[z]$ получим уравнение

$$2A_2\,[z]_s + (B - A_{1N})\,[z] = 0 \qquad (\text{П.8})$$

показывающее, что разрыв функции z может возникнуть лишь за счет граничных условий.

Формула, аналогичная (П.8) (без члена, содержащего A_{1N}), имеется в [7].

Коэффициент A_2 при производной в уравнениях (П.6) — (П.8) для уравнения (П.1) гиперболического типа, для которого $a^2_{12} - 4a_{11}a_{22} > 0$, на характеристиках отличен от нуля. Равенство $A_2 = 0$ определяет два семейства кривых, которые могут быть взяты в качестве координатных линий. В этом случае вместо уравнения (П.1) будем иметь уравнение (1.1), которое будет изучаться в дальнейшем. Уравнения характеристик для него имеют вид]

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{-\frac{a_{22}}{a_{11}}}, \qquad \frac{a_{22}}{a_{11}} < 0 \qquad (\text{П.9})$$

и определяют семейство кривых C_1 с положительным наклоном $dy\,/\,dx > 0$ и семейство кривых C_2 с отрицательным наклоном $dy\,/\,dx < 0$. Можно показать, что через каждую точку, кроме угловых, прямоугольной области Ω $(a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d)$ проходит две характеристики C_1 и C_2, а через угловые только одна C_1 или C_2.

Вычислим производные $dx\,/\,ds$, $dy\,/\,ds$ и коэффициенты A_i на характеристиках. Направив s в сторону возрастания y, будем иметь

$$\frac{dx}{ds} = \pm\left(1 - \frac{a_{22}}{a_{11}}\right)^{-1/2}, \qquad \frac{dy}{ds} = \left(1 - \frac{a_{11}}{a_{22}}\right)^{-1/2} \qquad (\text{П.10})$$

$$A_{2C_\alpha} = \pm\sqrt{-a_{11}a_{22}}, \qquad A_{3C_\alpha} = a_{11} + a_{22}$$

Здесь верхний знак берется для семейства C_1 $(\alpha = 1)$, нижний — для семейства C_2 $(\alpha = 2)$.

Произведя аналогичные вычисления для граничных линий, найдем:

на линии $y = c$ (отсчет s в сторону возрастания x)

$$dx/ds = 1,\ dy\,/\,ds = 0,\ A_{1c} = a_{22}\,(x,\,c),\ A_{3c} = a_{11}\,(x,\,c) \qquad (\text{П.11})$$

на линии $y = d$ (отсчет s в сторону убывания x)

$$dx\,/\,ds = -1,\ dy\,/\,ds = 0,\ A_{1d} = a_{22}\,(x,\,d),\ A_{3d} = a_{11}\,(x,\,d) \qquad (\text{П.12})$$

на линии $x = a$ (отсчет s в сторону убывания y)

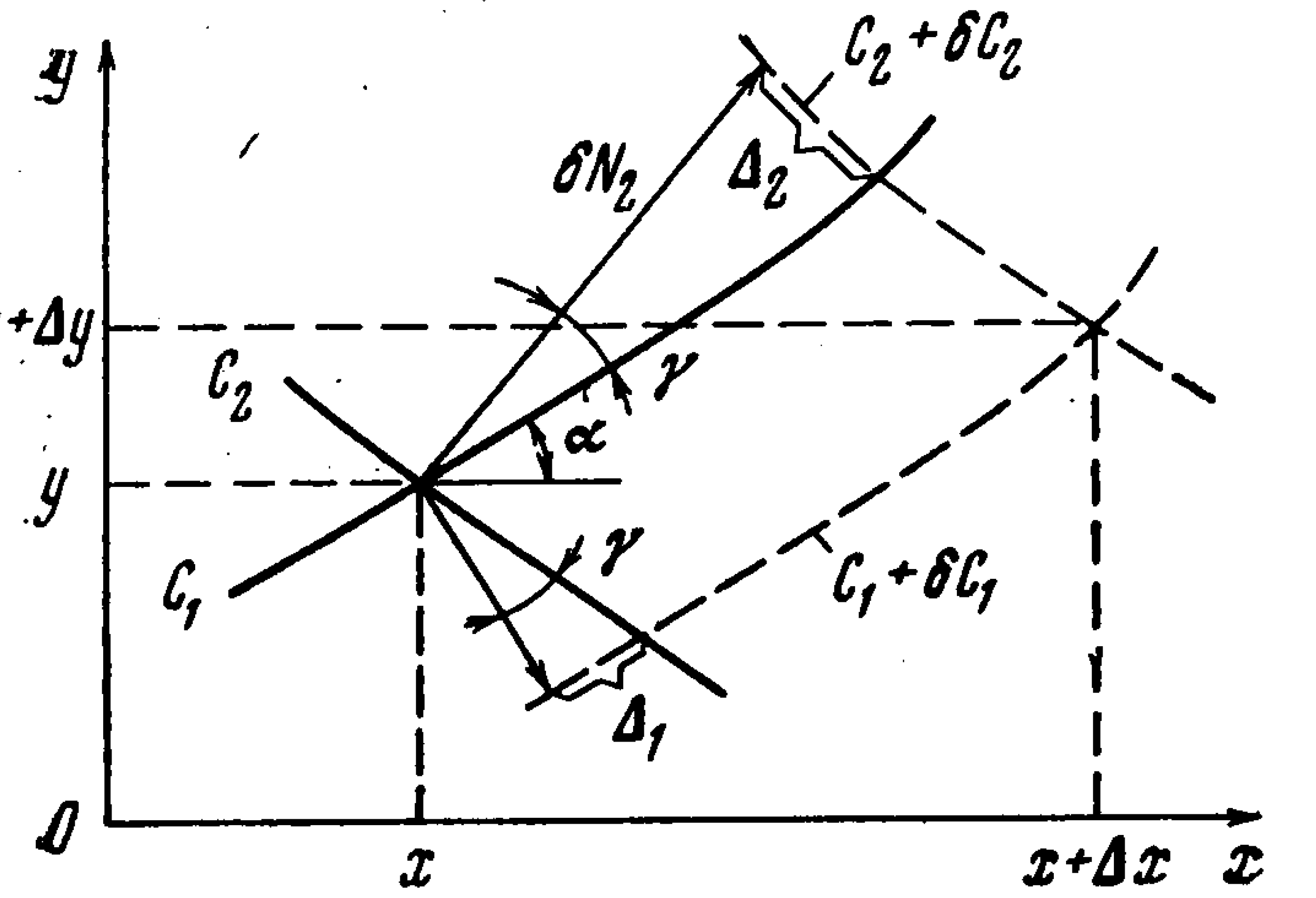
$$dx / ds = 0,\ dy / ds = -1,\ A_{1a} = a_{11}(a, y),\ A_{3a} = a_{22}(a, y) \qquad (\text{П}.13)$$

на линии $x = b$ (отсчет s в сторону увеличения y)

$$dx / ds = 0,\ dy / ds = 1,\ A_{1b} = a_{11}(b, y),\ A_{3b} = a_{22}(b, y) \qquad (\text{П}.14)$$

Рассмотрим вариацию семейств характеристик C_1 и C_2. Пусть уравнения семейств C_1 и C_2 найдены

$$F_\alpha(x, y) = D_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2) \qquad (\text{П}.15)$$



Фиг. 5

Тогда вариация этих семейств будет зависеть от вариации постоянных D_1 и D_2. Оставляя лишь члены первого порядка малости, получим

$$(F_{\alpha x} n_{1C_\alpha} + F_{\alpha y} n_{2C_\alpha})\, \delta N_\alpha = \delta D_\alpha \qquad (\text{П}.16)$$

Отсюда получим δN_1 и δN_2. Если продифференцировать δN_α по s_α, а A_1 по N_α, то для C_1 и C_2 можно установить связь

$$2A_2 \delta N_s = A_{1N}\, \delta N \qquad (\text{П}.17)$$

Рассмотрим вариацию точки пересечения характеристик C_1 и C_2 (фиг. 5). С точностью до слагаемых первого порядка малости будем иметь

$$\begin{aligned} \Delta x\,|_{M_{ij}} &= n_{1C_1}\delta N_1 - n_{2C_1}\Delta_1 + n_{1C_2}\delta N_2 + n_{2C_2}\Delta_2 \\ \Delta y\,|_{M_{ij}} &= n_{2C_1}\delta N_1 + n_{1C_1}\Delta_1 + n_{2C_2}\delta N_2 - n_{1C_2}\Delta_2 \end{aligned} \qquad (\text{П}.18)$$

Из фиг. 5 найдем

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\gamma &= \frac{n_{1C_1}^2 - n_{2C_1}^2}{2n_{1C_1}n_{2C_1}} = -\frac{n_{1C_2}^2 - n_{2C_2}^2}{2n_{1C_2}n_{2C_2}} \\ \Delta_\alpha &= \operatorname{tg}\gamma\,\delta N_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2) \end{aligned} \qquad (\text{П}.19)$$

Подставив выражения (П.19) в (П.18), получим

$$\begin{aligned} \Delta x\,|_{M_{ij}} &= \frac{1}{2n_{1C_1}}\delta N_1 + \frac{1}{2n_{1C_2}}\delta N_2 \\ \Delta y\,|_{M_{ij}} &= \frac{1}{2n_{2C_1}}\delta N_1 + \frac{1}{2n_{2C_2}}\delta N_2 \end{aligned} \qquad (\text{П}.20)$$

Поступила 12 VII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Егоров А. И. Об оптимальном управлении процессами в распределенных объектах. ПММ, 1963, т. 28, вып. 4.
2. Егоров А. И. Необходимые условия оптимальности для систем с распределенными параметрами. Матем. сб., 1966, т. 68, вып. 3.
3. Троицкий В. А. Задача Майера — Больца вариационного исчисления в теории оптимальных систем. ПММ, 1961, т. 25, вып. 4.
4. Троицкий В. А. О вариационных задачах оптимизации процессов управления. ПММ, 1962, т. 26, вып. 1.
5. Лурье К. А. Оптимальные задачи для распределенных систем. Тр. III Всес. совещания по автоматическому управлению (технической кибернетике). М., «Наука», 1967.
6. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М. —Л., 1945, т. 2.
7. Положий Г. И. Уравнения математической физики. М., «Высшая школа», 1964.