4. Собственные частоты мембран произвольной формы вычисляются непосредственно решением системы (2.2) с помощью ЭЦВМ. В [8] таким способом определены частоты круговой мембраны, составленной из конечных элементов в виде треугольника.

Здесь в качестве примера рассмотрена мембрана в виде ромба, для которой в [9] получено решение методом Релея—Ритца. При расчете мембрана разбивалась на ромбические элементы, подобные ей по форме. Вычисления производились по программе; время определения на ЭВЦМ М-20 десяти собственных тонов у модели с 25 степенями свободы не превышало десяти минут. Первые три частоты моделей приведены в таблице для $\varphi = 75°$ и $\varphi = 45°$. Здесь же указаны значения, полученные в [9]. Частоты модели с точечными массами (в таблице они отмечены звездочкой) лежат ниже действительных значений, а модели с распределенной массой — выше.

Подобные результаты получены также для мембран других форм.

Поступила 18 V 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Melosh R. J. Basis for derivation of matrices for the direct stiffness method. AIAA Journal, 1963, vol. 1, No. 7 (Русск. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1963, т. 1, № 7).
2. Zienkiewicz O. C. The finite element method in structural and continuum mechanics. McGraw-Hill, 1967.
3. de Arantes e Oliveira E. R. Theoretical foundations of the finite element method. Int. J. Solids and Structures, 1968, vol. 4, No. 10.
4. Ženišek A., Zlamal M. Convergence of a finite element procedure for solving boundary value problems of the fourth order. Int. J. for Numerical Methods in Enging., 1970, vol. 2, No. 3.
5. Leckie F. A., Lindberg G. M. The effect of lumped parameters on beam frequencie. Aeronaut. Quarterly, 1963, vol. 14, No. 3.
6. Кандидов В. П., Ким Л. П. Дискретная модель для исследования колебаний балок. Вестн. МГУ. Физ., астрон., 1968, № 5.
7. Olson M. D., Lindberg G. M. Convergence studies of eigenvalue solutions using two finite plate bending elements. Int. J. Mech. Sci. 1970, vol. 12. No.1.
8. Mei Chuh. Free vibration of circular membranes under arbitrary tension by the Finite-Element Method. J. Acoust. Soc. Amer., 1969, vol. 46, No. 3.
9. Durwasula S. Natural frequencies and modes of scew membranes. J. Acoust. Soc. Amer., 1968, vol. 44, No. 6.

УДК 539.3 : 534.1

КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВЯЗКОУПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

В. П. Тен

(Москва)

Жесткий штамп, круглый в плане, сцеплен с поверхностью вязкоупругого полупространства. Штамп совершает вынужденные гармонические колебания вокруг оси симметрии. Всюду вне области контакта поверхность свободна от усилий.

Найдены приближенные выражения перемещения, напряжения под штампом, момента сил реакции, действующих на штамп, в предположении стационарности колебаний и исчезновения их на бесконечности.

Решение аналогичной задачи для упругого полупространства получено Сагочи [1].

1. Введем цилиндрическую систему координат $r\ \varphi\ z$ с началом в центре области контакта. По аналогии с упругой задачей нетривиальны лишь следующие величины: u_φ, $\tau_{z\varphi}$, $\tau_{r\varphi}$ угловое перемещение и касательные напряжения. Движение среды описывается уравнением для углового перемещения с двумя граничными условиями

$$\left[\mu - \int_{-\infty}^{t} K(t-\tau)\,d\tau\right]\left(\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r^2} + \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2}\right) = \rho\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2}$$

$$u_\varphi = r\,\Phi\exp(i\omega t) \quad \text{при } z = 0,\ r < R$$

$$\tau_{z\varphi} = \left[\mu - \int_{-\infty}^{t} K(t-\tau)\,d\tau\right]\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = 0,\ r > R$$

где ρ—плотность среды, R — радиус штампа, μ—мгновенный модуль сдвига, K — ядро наследственности, ω—частота, Φ — амплитуда колебаний.

В случае установившихся колебаний все искомые величины могут быть представлены в виде произведения комплексной амплитуды на экспоненту. Действие оператора Вольтерра на такие функции эквивалентно умножению на некоторое комплексное числ

$$\mu\psi(r, z)\,e^{i\omega t} - \int_{-\infty}^{t} K(t-\tau)\,\psi(r, z)\,e^{i\omega\tau}\,d\tau = \mu_*\psi(r, z)\,e^{i\omega t}$$

$$\mu_* = \mu_1 + i\mu_2 = \left[\mu - \int_0^\infty K(x)\cos(\omega x)\,dx\right] + i\int_0^\infty K(x)\sin(\omega x)\,dx$$

Здесь μ_* означает комплексный модуль сдвига.

Таким образом, амплитуда перемещения должна удовлетворять уравнению с граничными условиями

$$\mu_*\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = -\rho\omega^2 u \tag{1.1}$$

$$u = r\,\Phi \quad \text{при } z = 0,\ r < R;\ \partial u / \partial z = 0, \text{ при } z = 0,\ r > R$$

Подстановка $w = u\exp(i\varphi)$ переводит (1.1) в уравнение Гельмгольца для w с комплексным параметром $k^2 = \rho\omega^2 / \mu_*$. Граничные условия принимают вид

$$w = r\Phi\exp(i\varphi) \text{ при } z = 0,\ r < R;\ \partial w / \partial z = 0 \text{ при } z = 0,\ r > R$$

2. Введем сфероидальные координаты $\xi\ \eta\ \varphi$, связанные с цилиндрическими следующими соотношениями:

$$r = R\,[(1 + \xi^2)(1 - \eta^2)]^{1/2},\ z = R\xi\eta,\ \varphi = \varphi\ (0 \leqslant \xi < \infty,\ |\eta| \leqslant 1)$$

Область $\xi = 0$ соответствует внутренности круга $z = 0, r < R$, а область $\eta = 0$ — его внешности. Граничные условия переходят в $w(0, \eta) = R\Phi\,(1 - \eta^2)^{1/2}e^{i\varphi}$, $w_\eta'(\xi, 0) = 0$. Полагая $w = U(\xi)\,V(\eta)\exp(im\varphi)$, получаем для V уравнение

$$[(1 - \eta^2)\,V'(\eta)]' + [\lambda + \theta\,(1 - \eta^2) - m^2/(1 - \eta^2)]\,V(\eta) = 0 \tag{2.1}$$

$$(\theta = -\rho\omega^2 R^2 / \mu_*)$$

Здесь λ—собственное значение, θ —заданный безразмерный параметр.

Аналогичное уравнение для U подстановкой $\xi = i\eta$ сводится к (2.1), поэтому достаточно изучить (2.1) для любых комплексных η. Из граничных условий вытекает, что $m = 1$, а $V'(0) = 0$. Таким образом, для (2.1) возникает задача Штурма — Лиувилля.

Уравнение (2.1) подробно изучено в [3] методами теории возмущений. Собственные функции отыскиваются в виде рядов по функциям Бесселя для $|\eta| > 1$. Внутри круга $|\eta| < 1$ разложения строятся по функциям Лежандра.

В случае упругой среды (задача Сагочи) θ вещественно. Для вязкоупругой среды θ принимает комплексные значения. Предположим, что $\operatorname{Im}\sqrt{\theta} > 0$. Тогда при $\mu_2 \to 0$ решение для вязкоупругой среды перейдет в решение Сагочи.

Будем придерживаться обозначений, отличающихся от принятых в [2] лишь тем, что θ соответствует 4θ в [2].

Условие исчезновения решения на бесконечности вместе с условиями $\operatorname{Im}\sqrt{\theta} > 0$ и $V'(0) = 0$ выделяет нужный набор сфероидальных волновых функций (см. [2]): $\mathrm{Ps}^1_{1+2n}(\eta, \theta)$ и $S^{1(4)}_{1+2n}(-i\xi, \theta)$. Ряд

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} A_n S^{1(4)}_{1+2n}(-i\xi, \theta)\, \mathrm{Ps}^1_{1+2n}(\eta, \theta)\, e^{i\varphi}$$

удовлетворяет уравнению Гельмгольца и граничному условию вне области контакта. Для определения коэффициентов A_n воспользуемся условием на перемещение под штампом

$$u(0, \eta) = R\Phi(1-\eta^2)^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n S^{1(4)}_{1+2n}(-i0, \theta)\, \mathrm{Ps}^1_{1+2n}(\eta, \theta)$$

Так как Ps^1_{1+2n} ортогональны, то

$$A_n = R\Phi \left[\int_{-1}^{1} (1-\eta^2)^{1/2}\, \overline{\mathrm{Ps}^1_{1+2n}}\, d\eta\right] \Big/ \left[S^{1(4)}_{1+2n}(-i0, \theta) \int_{-1}^{1} |\mathrm{Ps}^1_{1+2n}|^2\, d\eta\right]$$

Если теперь воспользоваться разложением (см. [2])

$$\mathrm{Ps}^1_{1+2n}(\eta, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{n+k} a^1_{1+2n,\, k-n}(\theta)\, \mathrm{P}^1_{1+2k}(\eta)$$

и том, что $(1-\eta^2)^{1/2} = \mathrm{P}_1^{\,1}(\eta)$, то можно выразить оба интеграла через коэффициенты $a^1_{m,n}$. Таким образом

$$A_n = {}^4/_3\, R\Phi(-1)^n\, \bar{a}^1_{1+2n,\,-n}(\theta) \,/\, [S^{1(4)}_{1+2n}(-i0, \theta)\, \|\mathrm{Ps}^1_{1+2n}\|^2]$$

Приводим выражения некоторых величин

$$\tau_{z\varphi}(0, \eta) = \frac{4}{3\eta}\, \mu_* \Phi e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \bar{a}^1_{1+2n,\,-n} S'^{1(4)}_{1+2n}(-i0, \theta)}{S^{1(4)}_{1+2n}(-i0, \theta)\, \|\mathrm{Ps}^1_{1+2n}\|^2}\, \mathrm{Ps}^1_{1+2n}(\eta, \theta)$$

$$M = 2\pi\mu_* R^3 \Phi e^{i\omega t} \int_0^1 \tau_{z\varphi}(0, \eta)(1-\eta^2)^{1/2}\, \eta\, d\eta =$$

$$= \frac{16}{9}\, \pi\mu_* R^3 \Phi e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a^1_{1+2n,\,-n}|^2 S'^{1(4)}_{1+2n}(-i0, \theta)}{S^{1(4)}_{1+2n}(-i0, \theta)\, \|\mathrm{Ps}^1_{1+2n}\|^2}$$

Очевидно, что амплитуда напряжения неограниченно возрастает при подходе к краю штампа.

3. Существующие таблицы коэффициентов разложений сфероидальных волновых функций построены лишь для вещественных θ. Для получения приближенных результатов в комплексной области предположим, что параметр θ мал по модулю. При помощи разложений собственных значений λ_n, приведенных в [3], можно определить коэффициенты разложений сфероидальных функций в виде степенных рядов по θ с точностью до постоянного комплексного множителя. Очевидно, что для вещественных θ эти коэффициенты также вещественны. Если потребовать дополнительно, чтобы $\operatorname{Re} a^1_{m,0}(\theta) > 0$ и $a^1_{m,0}(0) = 1$, то они строятся однозначно. Опуская подробные вык-

ладки, приводим главные члены следующих величин:

$$u_\varphi = \frac{2(1-1.26\theta)(1-0.4\bar\theta)}{\pi[1-0.4(\theta+\bar\theta)]\Theta(\theta)} R\Phi e^{i\omega t} Q_1{}^1(-i\xi)\,P_1{}^1(\eta)+\ldots \tag{3.1}$$

$$u_\varphi = -\frac{4\sqrt{\bar\theta}(1-1.28\theta)(1-0.4\bar\theta)r}{3\pi[1-0.4(\theta+\bar\theta)]\Theta(\theta)(1+\xi^2)}\left(1+\frac{1}{\sqrt{\bar\theta}\,\xi}\right)e^{-\sqrt{\bar\theta}\,\xi}\Phi e^{i\omega t}+\ldots \tag{3.2}$$

$$(\xi \gg 1)$$

$$\tau_{z\varphi}(0,\eta) = \frac{4(1-0.64\theta)}{\pi\Theta(\theta)\eta}\mu_*\Phi e^{i\omega t}P_1{}^1(\eta)+\ldots \tag{3.3}$$

$$M = \frac{16(1-0.64\theta)}{3\Theta(\theta)}\mu_* R^3\Phi e^{i\omega t}+\ldots \tag{3.4}$$

$$[\Theta(\theta) = 1-0.84\theta - 0.142\theta^{3/2}(1-0.48\theta)]$$

Для вещественных θ можно сравнить (3.1) — (3.4) с результатами Сагочи. Полагая, например, $\theta = -0.16$, из (3.4) получаем (в обозначениях Сагочи) $-\mathrm{tg}\Delta = 0.00858$, $-\pi g_1 = 0.606$, $\pi g_2 = 0.0052$, что совпадает с соответствующими точками графиков, приведенных в [1].

Из (3.1) и (3.3) следует, что при $\omega = 0$ перемещения упругой и вязкоупругой сред совпадают, а напряжения пропорциональны. Это происходит потому, что рассматриваются лишь установившиеся состояния, наступающие по истечении длительного промежутка времени после приложения нагрузки.

Из (3.2) и (3.4) можно получить решение для сосредоточенного момента. Устремим R к нулю, ξ к бесконечности так, чтобы $R\xi$ стремилось к величине расстояния от точки наблюдения до точки приложения момента. При этом неограниченно увеличим напряжения под штампом так, чтобы момент сохранялся постоянным по амплитуде. Исключая из (3.2) и (3.4) величину $R^3\Phi$, получаем

$$u_\varphi = -\frac{Mr}{4\pi\mu_* R^2}\left(\frac{1}{R}+ik\right)e^{i(\omega t-kR)}$$

$$\left(R=\sqrt{r^2+z^2},\quad k = k_1 - ik_2\right)$$

Здесь под k понимается ветвь $\sqrt{k^2}$ с положительной вещественной частью. Так как $\mu_2 > 0$, то и $k_2 > 0$, поэтому перемещение быстро затухает при удалении от точки приложения сосредоточенного момента.

Поступила 18 X 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Sagoci H. F. Forced torsional oscilations of an elastic Half-Space. II. J. Appl. Phys., 1944, vol. 15.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. М., «Наука», 1967.
3. Meixner J., Schäfke F. W. Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen. Berlin, Springer, 1954.

Технический редактор *Э. Ф. Бунова*

Сдано в набор 24/III-1972 г. Т—08850 Подписано к печати 31/V—1972 г. Тираж 2795 экз.
Зак. 354 Формат бумаги 70×108¹/₁₆ Усл. печ. л.16,1+1 вкл. Бум. л. 5³/₄ Уч.-изд. л. 16,1

2-я типография издательства «Наука». Москва, Шубинский пер., 10