

ЛИТЕРАТУРА

1. Красильников В. Н. Излучение электромагнитных волн идеально проводящей сферой, пульсирующей в однородном поле. В сб.: Проблемы дифракции и распространения волн, вып. 4., Изд-во ЛГУ, 1965.
2. Бодулинский В. К., Медведев Ю. А. Электромагнитное возмущение, создаваемое расширяющейся идеально проводящей сферой в магнитном поле. ПМТФ, 1969, № 6.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика, т. 2. Теория поля, изд. 4, М., Физматгиз, 1962.

УДК 539.3

О СХОДИМОСТИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ РАСЧЕТЕ ДИНАМИКИ МЕМБРАН

В. П. Кандидов, Е. П. Хлыбов

(Москва, Йошкар-Ола)

Исследуется скорость сходимости метода конечных элементов при расчете собственных колебаний мембран. Анализ проводится на основе элементов двух типов, построенных в работе.

Критерии сходимости метода конечных элементов сформулированы в работах [1, 2]. Фундаментальное обоснование их дано в [3], где показано, что они являются достаточным условием, обеспечивающим сходимость по энергии при увеличении числа элементов. Аналогичное доказательство приведено в [4] для конкретного элемента тонкой пластины.

Скорость сходимости метода анализируется в работах [5, 6] на примере одномерных систем. В [7] этот вопрос исследуется для прямоугольной пластины, у которой две противоположные стороны оперты.

1. Для получения конечного элемента мембраны воспользуемся общей схемой метода, изложенной в [2]. Пусть мембрана разбита отрезками прямых на элементы, имеющие форму параллелограмма (фиг. 1). Точки пересечения отрезков называются узлами. Рассмотрим отдельный элемент со сторонами a , b . Косоугольную систему координат, связанную с элементом, обозначим $\xi 0 \eta$.

Форму прогиба элемента представим в виде

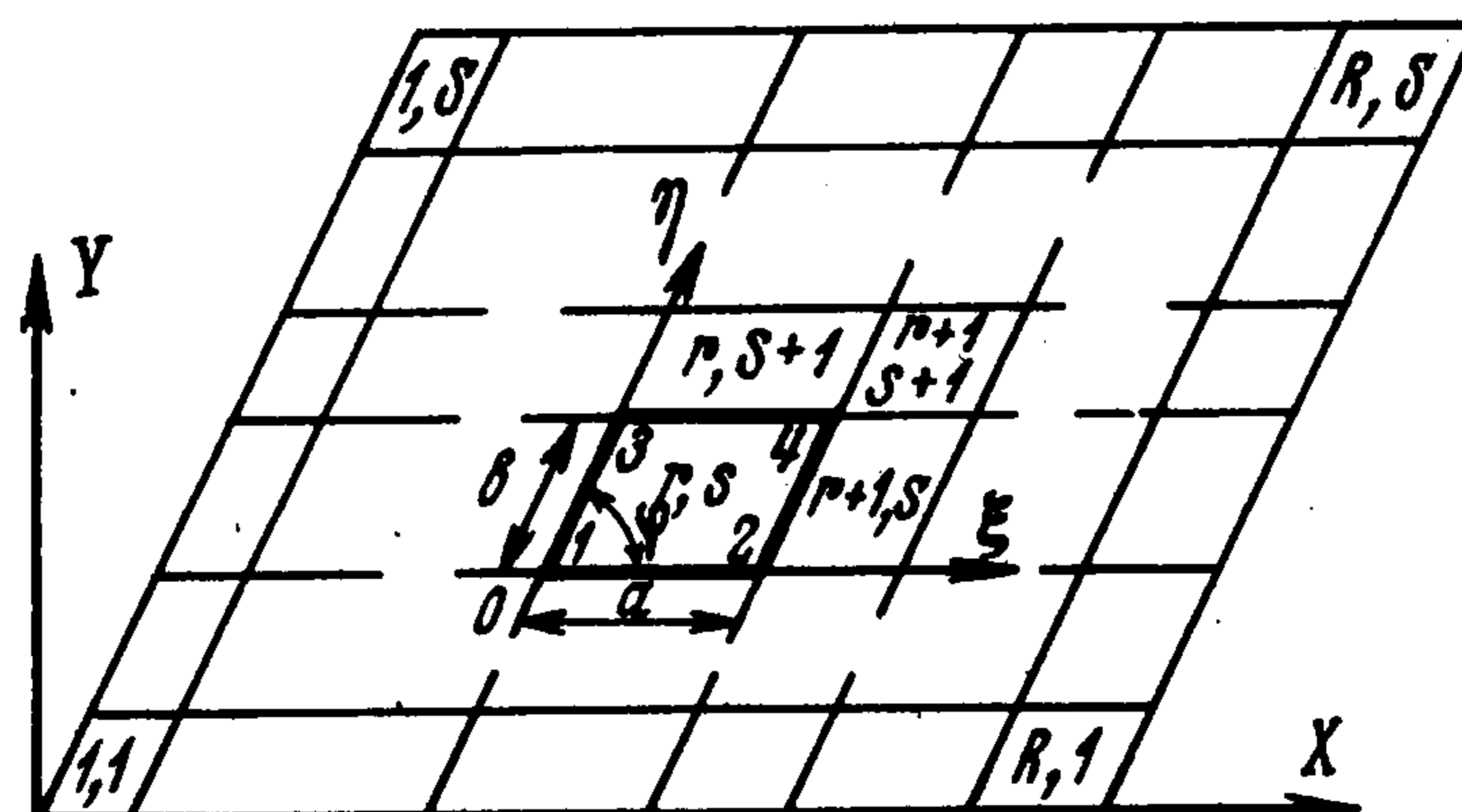
$$w(\xi, \eta, t) = \psi(\xi, \eta)' C \mathbf{q}(t) \quad (1.1)$$

где $\mathbf{q}(t)$ — вектор-столбец обобщенных координат элемента, $\psi(\xi, \eta)'$ — строка базисных функций, C — матрица преобразования, определяемая из условия совместности формы прогиба и обобщенных координат.

Вектор обобщенных сил $\mathbf{Q}(t)$, соответствующих координатам $\mathbf{q}(t)$, находится из принципа виртуальных перемещений, который в случае свободного движения запишется

$$-\delta U(t) + \delta A(t) + \delta \mathbf{q}(t)' \mathbf{Q}(t) = 0 \quad (1.2)$$

где $U(t)$ — потенциальная энергия упругой деформации, $\delta A(t)$ — работа сил инерции на виртуальном перемещении.



Фиг. 1

Потенциальная энергия элемента с учетом (1.1) выражается следующим образом:

$$2U(t) = \mathbf{q}(t)' K \mathbf{q}(t)$$

$$K = \frac{T}{\sin \varphi} C' \left[\int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \psi'}{\partial \xi} - \cos \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \psi'}{\partial \eta} - \cos \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \psi'}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \psi'}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta \right] C \quad (1.3)$$

Здесь K — матрица жесткости конечного элемента, T — натяжение. Виртуальная работа сил инерции с учетом (1.1) имеет вид

$$\delta A = -\delta \mathbf{q}(t)' m \frac{d^2 \mathbf{q}(t)}{dt^2}, \quad m = \sin \varphi C' \int_0^a \int_0^b \rho(\xi, \eta) \psi(\xi, \eta) \psi(\xi, \eta)' d\xi d\eta C \quad (1.4)$$

где m — матрица инерции элемента, $\rho(\xi, \eta)$ — поверхностная плотность.

Из (1.2) — (1.4) следует уравнение движения отдельного элемента под действием сил $Q(t)$, с которыми элементы взаимодействуют друг с другом

$$K \mathbf{q}(t) + m \frac{d^2 \mathbf{q}}{dt^2} = Q(t) \quad (1.5)$$

За обобщенные координаты элемента примем перемещения в узлах $\mathbf{q}(t)' = \{w^{(j)}(t)\}$ ($j = 1, 2, 3, 4$). В этом случае компоненты вектора $Q(t)$ — сосредоточенные силы, действующие в узлах.

Систему базисных функций возьмем в виде

$$\psi(\xi, \eta)' = \left(1, \frac{\xi}{a}, \frac{\eta}{b}, \frac{\xi\eta}{ab} \right) \quad (1.6)$$

Тогда

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}. \quad (1.7)$$

Подставляя (1.6), (1.7) в (1.3), найдем

$$K = \frac{T}{6 \sin \varphi} \|k_{lj}\| \quad (l, j = 1, 2, 3, 4)$$

$$k_{11} = k_{44} = 2 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) - 3 \cos \varphi, \quad k_{22} = k_{33} = 2 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + 3 \cos \varphi \quad (1.8)$$

$$k_{12} = k_{21} = k_{34} = k_{43} = \frac{a}{b} - 2 \frac{b}{a}, \quad k_{13} = k_{31} = k_{24} = k_{42} = -2 \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$$

$$k_{14} = k_{41} = - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + 3 \cos \varphi, \quad k_{23} = k_{32} = - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) - 3 \cos \varphi$$

Аналогично из (1.6), (1.7), (1.4) при $\rho = \text{const}$

$$m = \frac{\rho ab \sin \varphi}{36} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} \quad (1.9)$$

Матрицу инерции можно построить также из предположения, что масса элемента сосредоточена в его узлах. В этом случае матрица m диагональная.

Используя выражения (1.3), (1.4), можно получить матрицы жесткости и инерции конечных элементов другой формы. В частности, можно построить элементы, соответствующие обычной конечно-разностной сетке разбиения.

2. Для соседних элементов в их общих узлах имеют место следующие условия сопряжения (фиг. 1):

$$\begin{aligned} w_{r,s}^{(4)}(t) &= w_{r,s+1}^{(2)}(t) = w_{r+1,s}^{(3)}(t) = w_{r+1,s+1}^{(1)}(t) = w^{(r,s)}(t) \\ Q_{r,s}^{(4)}(t) + Q_{r,s+1}^{(2)}(t) + Q_{r+1,s}^{(3)}(t) + Q_{r+1,s+1}^{(1)}(t) &= 0 \\ (r &= 1, 2, \dots R; s = 1, 2, \dots S) \end{aligned} \quad (2.1)$$

где r, s — номера элементов, узлов модели.

В узлах, лежащих на контуре, который ограничивает мембрану, формулируются соответствующие краевые условия.

Совокупность уравнений (1.5), записанных для каждого элемента, условий сопряжения и условий на границе образует систему, описывающую свободное движение модели из конечных элементов. Можно ввести вектор обобщенных координат всей модели $Q_{\Sigma}(t)$, компоненты которого есть перемещения ее узлов. Тогда на основании условий (2.1) из матриц K, m отдельного элемента нетрудно построить матрицы жесткости K_{Σ} и инерции m_{Σ} для всей модели. Эти матрицы квадратные. Их порядок совпадает с числом свободных узлов i , следовательно, с числом степеней свободы модели. Если используются элементы с массами, сосредоточенными в узлах, то матрица инерции модели m_{Σ} , как у отдельного элемента, диагональная. Такую систему элементов будем называть моделью с точечными массами в отличие от модели с распределенной массой, у которой матрица инерции элемента выражается формулой (1.9).

Уравнение свободных колебаний модели из конечных элементов имеет вид

$$K_{\Sigma} Q_{\Sigma}(t) + m_{\Sigma} \frac{d^2 Q_{\Sigma}(t)}{dt^2} = 0 \quad (2.2)$$

3. В некоторых случаях удается преобразовать уравнение (2.2) к форме, удобной для аналитического исследования. Так, для модели из одинаковых элементов с $\varphi = \pi/2$, у которых K и m выражаются формулами (1.8), (1.9), можно записать

$$\begin{aligned} \rho \frac{ab}{6} \frac{d^2}{dt^2} [4\Box_{2x}^{(r,s)} w + \Box_{xy}^{(r,s)} w + 4\Box_{2y}^{(r,s)} w] &= \\ = T \left[\frac{b}{a} (\Delta_{2x}^{(r,s+1)} w + 4\Delta_{2x}^{(r,s)} w + \Delta_{2x}^{(r,s-1)} w) + \frac{a}{b} (\Delta_{2y}^{(r+1,s)} w + 4\Delta_{2y}^{(r,s)} w + \Delta_{2y}^{(r-1,s)} w) \right] \\ \Box_{2x}^{(r,s)} w &= w^{(r+1,s)} + 2w^{(r,s)} + w^{(r-1,s)} \\ \Box_{xy}^{(r,s)} w &= w^{(r+1,s+1)} + w^{(r+1,s-1)} + w^{(r-1,s+1)} + w^{(r-1,s-1)} \\ \Delta_{2y}^{(r,s)} w &= w^{(r,s+1)} - 2w^{(r,s)} + w^{(r,s-1)} \end{aligned} \quad (3.1)$$

В случае прямоугольной мембраны $r = 1, 2, \dots R - 1, s = 1, 2, \dots S - 1$. Решение системы (3.1) имеет вид

$$w^{(r,s)}(t) = D \exp [i\omega t - i2\alpha r - i2\beta s] \quad (3.2)$$

Для закрепленной по контуру прямоугольной мембраны из краевых условий следует

$$\alpha = \frac{\pi p}{2R}, \quad \beta = \frac{\pi n}{2S} \quad (p = 1, 2, \dots R - 1; n = 1, 2, \dots S - 1) \quad (3.3)$$

где p, n — номера собственных тонов.

Подставляя (3.2) в (3.1) и учитывая (3.3), получим собственные частоты модели из $R \times S$ элементов с распределенной массой

$$[\omega_{p,n}^{(R \times S)}]^2 = \frac{T}{\rho} 48 \frac{a^{-2} \sin^2 \alpha (3 - 2 \sin^2 \beta) + b^{-2} \sin^2 \beta (3 - 2 \sin^2 \alpha)}{(3 - 2 \sin^2 \alpha) (3 - 2 \sin^2 \beta)}$$

Если используются прямоугольные элементы, у которых масса сосредоточена в узлах, то уравнение (3.1) несколько упрощается, и частоты модели принимают вид

$$[\omega_{p,n}^{(R \times S)}]^2 = \frac{T}{\rho} \frac{16}{3} [a^{-2} \sin^2 \alpha (3 - 2 \sin^2 \beta) + b^{-2} \sin^2 \beta (3 - 2 \sin^2 \alpha)]$$

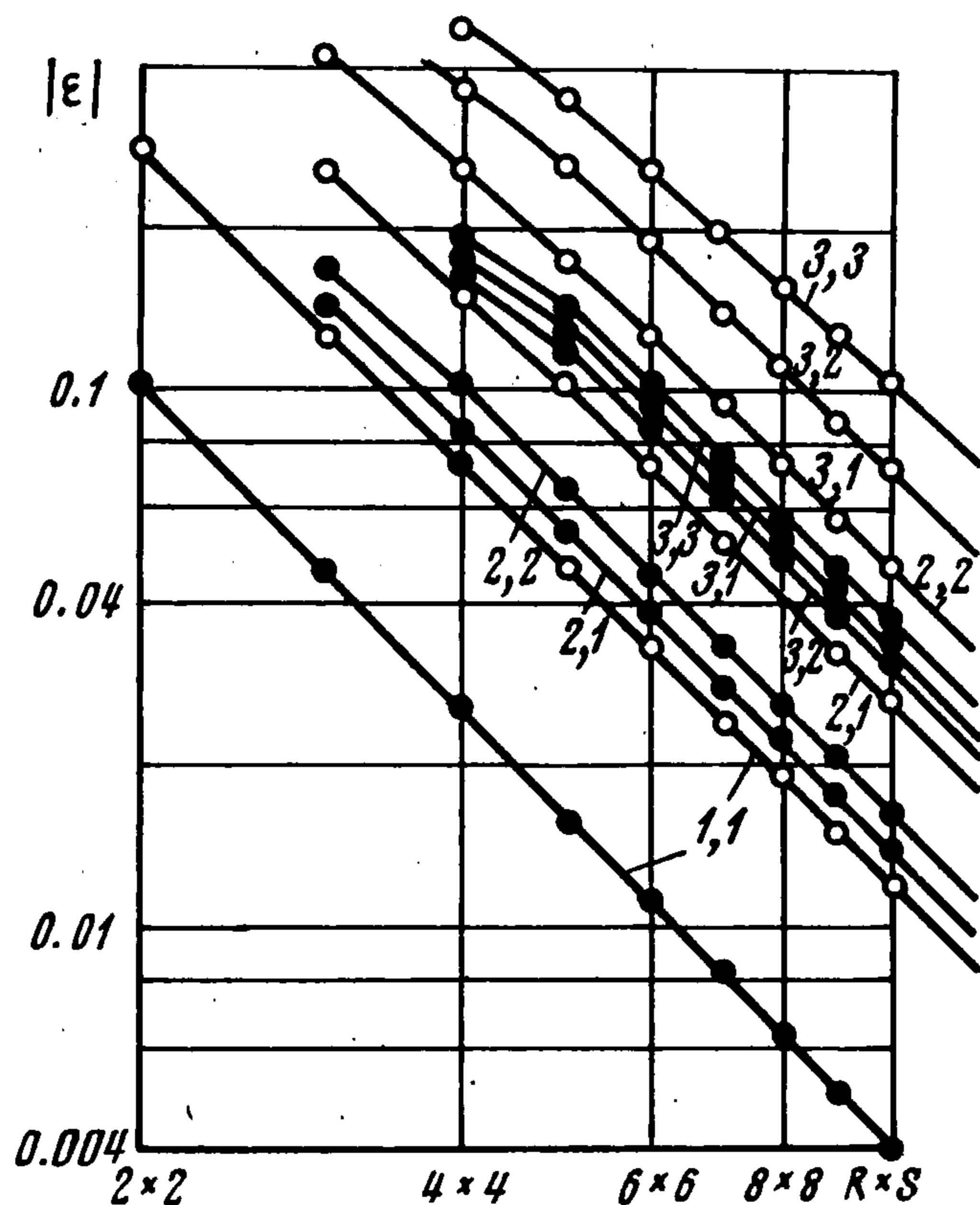
При увеличении числа элементов разбиения частоты обеих моделей монотонно стремятся к соответствующим частотам $\omega_{p,n}^{(0)}$ непрерывной системы

$$\lim \omega_{p,n}^{(R \times S)} = \omega_{p,n}^{(0)} = \pi \sqrt{\frac{T}{\rho} \left(\frac{p^2}{A^2} + \frac{n^2}{B^2} \right)} \quad \text{при } R, S \rightarrow \infty$$

($A = aR, B = bS$ — стороны мембраны).

Относительная ошибка метода конечных элементов при расчете собственных колебаний мембраны определяется формулой

$$\varepsilon_{p,n}^{(R \times S)} = \frac{\omega_{p,n}^{(R \times S)} - \omega_{p,n}^{(0)}}{\omega_{p,n}^{(0)}}$$



Фиг. 2

На фиг. 2 [приведены значения ε на первых шести частотах квадратной мембраны. Ошибки вычислены для моделей с разными разбиениями при условии $R=S$. Число элементов $R \times S$ и относительная ошибка ε отложены в логарифмическом масштабе. У модели с распределенной массой ε отмечено точками, у модели с точечными массами — кружками. Для наглядности значения ε , относящиеся к одному тону модели, соединены отрезками, возле которых указаны номера тонов.

Из сравнения графиков следует, что модель с точечными массами имеет значительно большую погрешность. Ее частоты стремятся снизу к точным значениям, тогда как у модели с распределенной массой — сверху.

Для всех тонов рассмотренных моделей относительная ошибка убывает с ростом числа элементов как $(R \times S)^{-1}$. Исключение составляют лишь высшие тона при малом числе элементов.

φ	Тон	Разбиение				по [°]
		2×2	3×3	4×4	6×6	
75°	1	1.61	1.53	1.50	1.48	1.45
		1.07*	1.27*	1.35*	1.41*	
	2	—	2.60	2.44	2.33	2.21
		—	1.68*	1.89*	2.06*	
	3	—	—	2.72	2.59	2.38
		—	—	1.83*	2.00*	
45°	1	2.20	2.04	1.99	1.94	1.88
		1.56*	1.67*	1.78*	1.84*	
	2	—	3.38	3.09	2.87	2.59
		—	2.10*	2.36*	2.40*	
	3	—	—	3.99	3.50	3.20
		—	—	2.55*	2.81*	

4. Собственные частоты мембран произвольной формы вычисляются непосредственно решением системы (2.2) с помощью ЭЦВМ. В [8] таким способом определены частоты круговой мембраны, составленной из конечных элементов в виде треугольника.

Здесь в качестве примера рассмотрена мембрана в виде ромба, для которой в [9] получено решение методом Релея—Ритца. При расчете мембрана разбивалась на ромбические элементы, подобные ей по форме. Вычисления производились по программе; время определения на ЭВЦМ М-20 десяти собственных тонов у модели с 25 степенями свободы не превышало десяти минут. Первые три частоты моделей приведены в таблице для $\varphi = 75^\circ$ и $\varphi = 45^\circ$. Здесь же указаны значения, полученные в [9]. Частоты модели с точечными массами (в таблице они отмечены звездочкой) лежат ниже действительных значений, а модели с распределенной массой — выше.

Подобные результаты получены также для мембран других форм.

Поступила 18 V 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Melosh R. J. Basis for derivation of matrices for the direct stiffness method. AIAA Journal, 1963, vol. 1, No. 7 (Русск. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1963, т. 1, № 7).
2. Zienkiewicz O. C. The finite element method in structural and continuum mechanics. McGraw-Hill, 1967.
3. de Arantes e Oliveira E. R. Theoretical foundations of the finite element method. Int. J. Solids and Structures, 1968, vol. 4, No. 10.
4. Zenisek A., Zlamal M. Convergence of a finite element procedure for solving boundary value problems of the fourth order. Int. J. for Numerical Methods in Enging., 1970, vol. 2, No. 3.
5. Leskie F. A., Lindberg G. M. The effect of lumped parameters on beam frequency. Aeronaut. Quarterly, 1963, vol. 14, No. 3.
6. Кандидов В. П., Ким Л. П. Дискретная модель для исследования колебаний балок. Вестн. МГУ. Физ., астроф., 1968, № 5.
7. Olson M. D., Lindberg G. M. Convergence studies of eigenvalue solutions using two finite plate bending elements. Int. J. Mech. Sci. 1970, vol. 12, No. 1.
8. Mei Chuh. Free vibration of circular membranes under arbitrary tension by the Finite-Element Method. J. Acoust. Soc. Amer., 1969, vol. 46, No. 3.
9. Durvasula S. Natural frequencies and modes of scw membranes. J. Acoust. Soc. Amer., 1968, vol. 44, No. 6.

УДК 539.3 : 534.1

КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВЯЗКОУПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

В. П. Тен

(Москва)

Жесткий штамп, круглый в плане, сцеплен с поверхностью вязкоупругого полупространства. Штамп совершает вынужденные гармонические колебания вокруг оси симметрии. Всюду вне области контакта поверхность свободна от усилий.

Найдены приближенные выражения перемещения, напряжения под штампом, момента сил реакции, действующих на штамп, в предположении стационарности колебаний и исчезновения их на бесконечности.

Решение аналогичной задачи для упругого полупространства получено Сагочи [1].