УДК 538.4

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О БЕСКОНЕЧНО ПРОВОДЯЩЕЙ СФЕРЕ С ПРОИЗВОЛЬНО МЕНЯЮЩИМСЯ РАДИУСОМ ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В. К. Бодулинский, Ю. А. Медведев, Б. М. Степанов

(Москва)

Изменение электрического $E = \{0, 0, E_\varphi\}$ и магнитного $H = \{H_r, H_\vartheta, 0\}$ полей, вызываемое движением бесконечно проводящей сферы в однородном магнитном поле $H_0 = \{H_0 \cos\vartheta, -H_0 \sin\vartheta, 0\}$, при определенных зависимостях радиуса сферы a от времени рассмотрено в [1, 2]. Ниже рассматривается та же задача для произвольной зависимости $a = a(t)$.

Задача сводится к решению уравнений Максвелла, удовлетворяющих начальным и граничным условиям

$$H_r(r, \vartheta, 0) = H_0 \cos\vartheta, \quad H_\vartheta(r, \vartheta, 0) = -H_0 \sin\vartheta, \quad E_\varphi(r, \vartheta, 0) = 0$$
$$H_r(a(t), \vartheta, t) = 0, \quad E_\varphi(a(t), \vartheta, t) - a^{\cdot} c^{-1} H_\vartheta(a(t), \vartheta, t) = 0 \tag{1}$$

Последнее соотношение — обычное электродинамическое условие [3] на поверхности бесконечно проводящей сферы.

В дальнейшем удобно вместо функций H_r, H_ϑ и E_φ перейти к одной функции $u(r, t)$, удовлетворяющей в области $\{a(t) \leqslant r < \infty,\ t \geqslant 0\}$ волновому уравнению и условиям

$$u(r, 0) = {}^3/_2, \qquad (\partial u / \partial t)_{t=0} = 0$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=a} + \frac{a^{\cdot}}{c^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{r=a} + \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\left[a^{\cdot} u(a, t)\right] + 2\frac{a^{\cdot 2}}{c^2}\frac{u(a, t)}{a} = 0$$

Для искомых функций получим

$$H_r(r, \vartheta, t) = \frac{2H_0 \cos\vartheta}{r^3}\int\limits_{a(t)}^{r} u(x, t)\, x^2\, dx$$
$$H_\vartheta(r, \vartheta, t) = -H_0 u(r, t)\sin\vartheta + \frac{H_0 \sin\vartheta}{r^3}\int\limits_{a(t)}^{r} u(x, t)\, x^2\, dx \tag{2}$$
$$E_\varphi(r, \vartheta, t) = -\frac{H_0 \sin\vartheta}{r^2}\int\limits_{a(t)}^{r}\frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial t}\, x^2 dx + \frac{a^{\cdot}}{c} H_0 \sin\vartheta\, \frac{a^2}{r^2}\, u(a, t)$$

Нижний предел интегрирования в (2) выбирается с учетом граничных условий (1).

Задача решается методом интегральных преобразований. Опуская промежуточные вычисления, приведем результат

$$u(r, t) = \frac{3}{2} - \frac{1 - 2\beta(t - r/c)}{2r} A\left(t - \frac{r}{c}\right) +$$
$$+ \frac{c}{2r}\,\frac{1 + \beta(t - r/c)}{A^2(t - r/c)}\int\limits_{0}^{t-r/c} A^2(z)\left\{\exp - c\int\limits_{z}^{t-r/c}\frac{dy}{A(y)}\right\} dz$$

здесь $z = t - a(t)/c$, $A(z) = a(t(z))$.

Поступила 17 VII 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Красильников В. Н. Излучение электромагнитных волн идеально проводящей сферой, пульсирующей в однородном поле. В сб.: Проблемы дифракции и распространения волн, вып. 4., Изд-во ЛГУ, 1965.
2. Бодулинский В. К., Медведев Ю. А. Электромагнитное возмущение, создаваемое расширяющейся идеально проводящей сферой в магнитном поле. ПМТФ, 1969, № 6.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика, т. 2. Теория поля, изд. 4, М., Физматгиз, 1962.

УДК 539.3

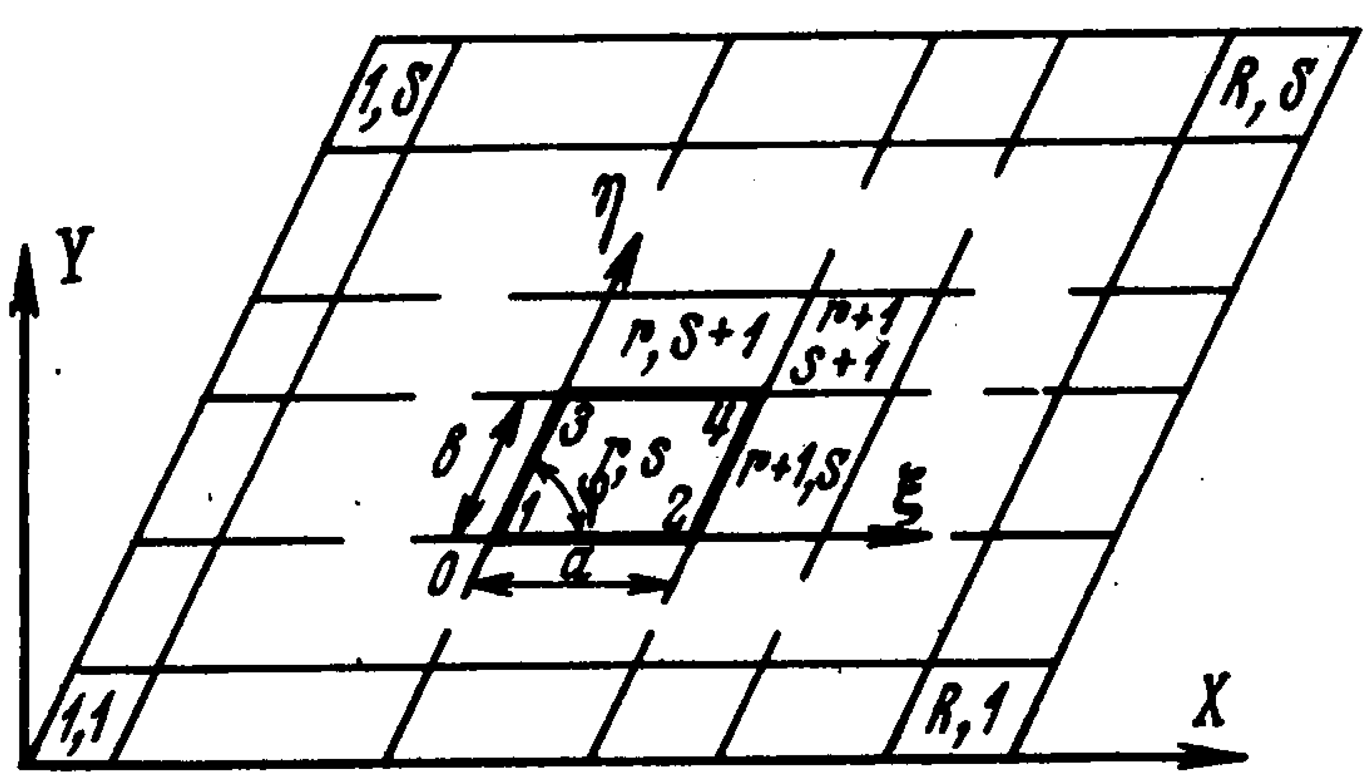
О СХОДИМОСТИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ РАСЧЕТЕ ДИНАМИКИ МЕМБРАН

В. П. Кандидов, Е. П. Хлыбов

(Москва, Йошкар-Ола)

Исследуется скорость сходимости метода конечных элементов при расчете собственных колебаний мембран. Анализ проводится на основе элементов двух типов, построенных в работе.

Критерии сходимости метода конечных элементов сформулированы в работах [1, 2]. Фундаментальное обоснование их дано в [3], где показано, что они являются достаточным условием, обеспечивающим сходимость по энергии при увеличении числа элементов. Аналогичное доказательство приведено в [4] для конкретного элемента тонкой пластины.



Фиг. 1

Скорость сходимости метода анализируется в работах [5, 6] на примере одномерных систем. В [7] этот вопрос исследуется для прямоугольной пластины, у которой две противоположные стороны оперты.

1. Для получения конечного элемента мембраны воспользуемся общей схемой метода, изложенной в [2]. Пусть мембрана разбита отрезками прямых на элементы, имеющие форму параллелограмма (фиг. 1). Точки пересечения отрезков называются узлами. Рассмотрим отдельный элемент со сторонами a, b. Косоугольную систему координат, связанную с элементом, обозначим $\xi 0 \eta$.

Форму прогиба элемента представим в виде

$$w(\xi, \eta, t) = \boldsymbol{\psi}(\xi, \eta)' C \mathbf{q}(t) \qquad (1.1)$$

где $\mathbf{q}(t)$—вектор-столбец обобщенных координат элемента, $\boldsymbol{\psi}(\xi, \eta)'$ — строка базисных функций, C — матрица преобразования, определяемая из условия совместности формы прогиба и обобщенных координат.

Вектор обобщенных сил $\mathbf{Q}(t)$, соответствующих координатам $\mathbf{q}(t)$, находится из принципа виртуальных перемещений, который в случае свободного движения запишется

$$-\delta U(t) + \delta A(t) + \delta \mathbf{q}(t)' \mathbf{Q}(t) = 0 \qquad (1.2)$$

где $U(t)$ — потенциальная энергия упругой деформации, $\delta A(t)$ — работа сил инерции на виртуальном перемещении.