ЛИТЕРАТУРА

1. Капранов М. В. Полоса захвата при фазовой автоподстройке частоты. Радиотехника, 1956, т. 2, № 12.
2. Шахгильдян В. В., Ляховкин А. А. Фазовая автоподстройка частоты. М., «Связь», 1966.
3. Капранов М. В. Полоса захвата автоподстройки частоты с прямоугольной характеристикой фазового детектора. Изв. вузов. Радиотехника, 1958, № 4.
4. Скрябин Б. Н. Об одной динамической системе с разрывной характеристикзой. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
5. Скрябин Б. Н. Качественное исследование одного уравнения теории фазовой автоподстройки частоты. ПММ, 1969, т. 33, вып. 2.
6. Шахтарин Б. И. Исследование кусочно-линейной системы ФАП. Радиотехника и электроника, 1969, т. 14, вып. 8.
7. Сафонов В. М. О влиянии формы пилообразной характеристики фазового детектора на полосу захвата ФАП. Радиотехника, 1969, № 6.
8. Сизов В. П. Анализ стационарных режимов ФАП при кусочно-линейной характеристики фазового детектора. Радиотехника и электроника, 1970, т. 15, вып. 3.

УДК 538.4

ЗАДАЧА ОБ ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ЗОНДЕ, НЕ ВОЗМУЩАЮЩЕМ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПЛОТНОСТЕЙ ТОКА И ОБЪЕМНОГО ЗАРЯДА

В. А. Бучин

(Москва)

Рассматривается задача об электрогидродинамическом зонде, находящемся под плавающим потенциалом, в предположении малости характерного размера зонда по сравнению с характерным размером области течения. Форма зонда находится в процессе решения такой, что внесение зонда в поток не возмущает распределений плотностей тока и объемного заряда. Вычисляются возмущения электрического потенциала, определяется значение плавающего потенциала зонда.

Элементарная теория электрогидродинамического зонда, основанная на одномерных решениях, дана в работе [1]. Ниже в отличие от [1] решается трехмерная задача обтекания зонда и из полученного решения находится связь между плавающим потенциалом зонда и потенциалом в исследуемой точке.

Рассмотрим установившееся потенциальное течение однородной несжимаемой невязкой жидкости в бесконечном пространстве со скоростью на бесконечности $\mathbf{V}^* = (u_\infty, 0, 0)$. На эмиттере (плоскость $x = 0$) в незаряженную жидкость вносится объемный заряд, а на коллекторе (плоскость $x = L$) жидкость разряжается. Течение униполярно заряженной жидкости при $0 < x < L$ подчиняется уравнениям электрогидродинамики [2]. Задача решается в предположении отсутствия взаимодействия эмиттера и коллектора с гидродинамическим потоком. Это оправдано имеющимися экспериментами, в которых указанное взаимодействие весьма незначительно (например в работе [1] прозрачность сеток-электродов равна 0.95). Используем закон Ома $\mathbf{j}^* = q^* (\mathbf{V}^* + b\mathbf{E}^*)$ ($b = \mathrm{const}$ — подвижность), потенциальность электрического поля $\mathbf{E}^* = -\mathrm{grad}\,\varphi^*$ и потенциальность поля скоростей $\mathbf{V}^* = -\mathrm{grad}\,\Phi^*$. Вводим безразмерные независимые переменные и искомые величины по формулам

$$x = L\xi, \quad y = L\eta, \quad z = L\zeta, \quad \varphi^* = u_\infty L\varphi / b,$$
$$\Phi^* = u_\infty L\Phi, \quad q^* = \varepsilon_0 u_\infty q / (4\pi bL)$$

Предполагаем параметр электрогидродинамического взаимодействия бесконечно малым. При этом из системы уравнений электрогидродинамики получаем систему уравнений для определения объемного заряда, электрического и гидродинамического потенциалов

$$\Delta\Phi = 0, \quad \operatorname{div}[q \operatorname{grad}(\varphi + \Phi)] = 0, \quad \Delta\varphi = -q \tag{1}$$

Уравнение для определения гидродинамического потенциала можно решать независимо от последних двух уравнений, а при их решении считать Φ известной функцией.

Граничные условия для φ и q на эмиттере и коллекторе имеют вид

$$\varphi(0, \eta, \zeta) = 0, \quad \varphi(1, \eta, \zeta) = 0, \quad q(0, \eta, \zeta) = \infty \tag{2}$$

Последнее граничное условие соответствует [1] максимальному току, стекающему с единицы площади эмиттера (ток насыщения). Ввиду конечности этой величины условие $q(0, \eta, \zeta) = \infty$, как это видно из закона Ома, эквивалентно условию

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\varphi(0, \eta, \zeta) + \frac{\partial}{\partial\xi}\Phi(0, \eta, \zeta) = 0 \tag{3}$$

Введем в рассмотрение суммарный потенциал $\chi = \varphi + \Phi$ и, заметив, что $q = -\Delta\chi$, перейдем к эквивалентной (1) системе уравнений для Φ и χ

$$\Delta\Phi = 0, \quad \operatorname{div}[\Delta\chi \operatorname{grad}\chi] = 0 \tag{4}$$

Граничные условия для χ на эмиттере и коллекторе получаются из граничных условий (2), (3) и имеют вид

$$\chi(0, \eta, \zeta) = \Phi(0, \eta, \zeta), \quad \chi(1, \eta, \zeta) = \Phi(1, \eta, \zeta), \quad \frac{\partial}{\partial\xi}\chi(0, \eta, \zeta) = 0 \tag{5}$$

Как было указано выше, при нахождении φ, а следовательно и χ, функцию Φ можно считать найденной.

Область $0 < \xi < 1$, $-\infty < \eta < \infty$, $-\infty < \zeta < \infty$ обозначим через G. Течение будем называть невозмущенным, если в области G все искомые величины зависят только от ξ. Для него все искомые величины будем писать с индексом нуль.

Гидродинамический поток имеет безразмерную скорость на бесконечности (1, 0, 0), поэтому решение первого уравнения (4), зависящее только от ξ, имеет вид

$$\Phi_0 = -\xi \tag{6}$$

Произвольная аддитивная константа положена равной нулю.

Решая второе уравнение (4) с граничными условиями (5), учитывая (6), получаем $\chi_0 = -\xi^{3/2}$.

Зная Φ_0 и χ_0, находим φ_0 и q_0

$$\varphi_0 = -\xi^{3/2} + \xi, \qquad q_0 = {}^3/_4\xi^{-1/2}$$

Пусть между эмиттером и коллектором находится выпуклое тело-проводник, симметричное относительно оси ξ. Область, занятую этим телом, обозначим через Z, его поверхность — через Σ, область между $\xi = 0$ и $\xi = 1$, но вне тела — через $G \diagdown Z$. Область $G \diagdown Z$ является в этом случае областью течения униполярно заряженной жидкости. В безразмерных переменных расстояние между левым и правым концами тела равно ε, а его левый конец имеет координаты $(\xi_0, 0, 0)$. Форма тела пока не фиксирована.

Так как уравнение для Φ можно решать независимо от уравнения для χ и гидродинамический поток по предположению не взаимодействует с электродами, то для нахождения Φ можно решать задачу гидродинамического обтекания тела Z во всем пространстве, а не только в области $G \diagdown Z$. В этом случае граничные условия для Φ имеют вид

$$\operatorname{grad}\Phi \to (1, 0, 0) \quad \text{при } \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \to \infty$$
$$\partial\Phi / \partial n |_\Sigma = 0$$

Эта задача может быть решена для тела с произвольной формой поверхности Σ, а следовательно, могут быть найдены значения Φ при $\xi = 0$, $\xi = 1$ и на поверхности Σ

$$\Phi(0, \eta, \zeta) = \delta_1, \quad \Phi(1, \eta, \zeta) = -1 + \delta_2, \quad \Phi|_\Sigma = \Phi_\Sigma$$

где δ_1, δ_2 — возмущения значений Φ_0 при $\xi = 0$ и $\xi = 1$ в случае обтекания тела Z в области G. Они зависят как от линейного размера тела, так и от его формы.

Граничные условия для χ имеют вид

$$\chi(0, \eta, \zeta) = \delta_1, \quad \chi(1, \eta, \zeta) = -1 + \delta_2, \quad \frac{\partial}{\partial \xi}\chi(0, \eta, \zeta) = 0$$

$$\chi|_\Sigma = \Phi_\Sigma + \varphi_\Sigma, \quad \varphi_\Sigma = \text{const}$$

Значение φ_Σ пока не фиксировано.

Функция Φ_Σ также зависит от линейного размера тела и его формы.

Потребуем, чтобы выполнялись три условия

$$\varepsilon \ll 1, \ \varepsilon / \xi_0 = O(\varepsilon), \ \varepsilon / (1 - \xi_0) = O(\varepsilon) \tag{7}$$

Будем искать линейное приближение по ε для искомых величин, которые будем писать с индексом единица.

Оценим порядки величин δ_1 и δ_2 по ε. В силу условий (7) δ_1 и δ_2 в трехмерном пространстве имеют порядок ε^3. Это вытекает из того, что для сферы такие оценки справедливы, а для тела произвольной формы, имеющего характерный размер $\sim\varepsilon$, порядок возмущений гидродинамического потенциала на расстояниях, значительно превышающих ε, не зависит от формы тела [3]. Следовательно, в пределах принятого приближения $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 0$. Теперь граничные условия для χ_1 могут быть выписаны, они имеют вид

$$\chi_1(0, \eta, \zeta) = 0, \ \chi_1(1, \eta, \zeta) = -1$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\chi_1(0, \eta, \zeta) = 0, \quad \chi_1|_\Sigma = \Phi_{1\Sigma} + \varphi_{1\Sigma}$$

Для нахождения χ_1 можно пользоваться вторым уравнением (4), так как оно отличается от точного уравнения для χ_1 членами порядка, большего ε, и в пределах принятого приближения эквивалентно ему.

Поставим задачу — выбрать такую форму поверхности Σ, чтобы $\chi_{1\Sigma} = \Phi_{1\Sigma} + \varphi_{1\Sigma}$ совпадало с $\chi_0 = \Phi_0 + \varphi_0$ на мысленно выделенной поверхности Σ в невозмущенном потоке. Если удастся найти такую форму поверхности, то в области $G \setminus Z$ $\chi_1 \equiv \chi_0$, так как χ_1 и χ_0 удовлетворяют одним и тем же уравнениям и граничным условиям, и если Φ_1 найдено, то значения возмущенного электрического потенциала находятся по формуле

$$\varphi_1 = \chi_0 - \Phi_1 = -\xi^{3/2} - \Phi_1$$

Значения q_1, $\mathbf{j}_1$ в пределах рассматриваемой точности остаются невозмущенными

$$q_1 = -\Delta\chi_1 = -\Delta\chi_0 = q_0$$

$$\mathbf{j}_1 = q_1 \operatorname{grad}\chi_1 = q_0 \operatorname{grad}\chi_0 = \mathbf{j}_0$$

Перейдем к определению Φ_1, формы поверхности Σ и значения константы $\varphi_{1\Sigma}$. Предположим, что такая поверхность найдена. В этом случае значение Φ на поверхности обтекаемого тела имеет вид

$$\Phi|_\Sigma = \Phi_\Sigma = \chi_0 - \varphi_\Sigma = -\xi^{3/2} - \varphi_\Sigma, \quad \varphi_\Sigma = \text{const} \tag{8}$$

В пределах принятого приближения оставим в выражении для Φ_Σ из (8) лишь члены линейные по ε, разложив его по ε в окрестности точки $(\xi_0 + \varepsilon / 2, 0, 0)$. Выражение преобразуется к виду

$$\Phi_1|_\Sigma = \Phi_{1\Sigma} = -\xi_0^{3/2} - {}^3/_4\xi_0^{1/2}\varepsilon - \varphi_{1\Sigma} - {}^3/_2\xi_0^{1/2}(\xi - \xi_0 - \varepsilon/2) \tag{9}$$

$$\xi - \xi_0 - \varepsilon/2 \sim \varepsilon$$

Пришли к задаче определения гармонического потенциала Φ_1 течения, имеющего заданную скорость на бесконечности (1, 0, 0), который на обтекаемой поверхности Σ является линейной функцией от ξ. Известно [4], что линейный закон изменения потенциала на обтекаемой поверхности имеет место при обтекании эллипсоида. Будем искать Σ в виде эллипсоида

$$\frac{(\xi-\xi_0-\varepsilon/2)^2}{(\varepsilon/2)^2}+\frac{\eta^2}{(\varepsilon\lambda/2)^2}+\frac{\zeta^2}{(\varepsilon\mu/2)^2}=1$$

Решение задачи об обтекании эллипсоида [4] дает для Φ_1 следующее выражение:

$$\Phi_1=-\left(\xi-\xi_0-\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1+\frac{a}{2-a_*}\right)-\xi_0-\frac{\varepsilon}{2} \tag{10}$$

$$a(\omega)=\lambda\mu\int\limits_{\omega}^{\infty}[(1+u)(\lambda^2+u)(\mu^2+u)]^{-1/2}\frac{du}{1+u}, \qquad a_*=a(0) \tag{11}$$

где a_*—значение a на поверхности эллипсоида, ω для точек вне эллипсоида есть положительный корень уравнения

$$\frac{(\xi-\xi_0-\varepsilon/2)^2}{1+\omega}+\frac{\eta^2}{\lambda^2+\omega}+\frac{\zeta^2}{\mu^2+\omega}=\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \tag{12}$$

Выбор аддитивной константы сделан так, что $\Phi(0,\eta,\zeta)=0$ с точностью до членов порядка, большего чем ε.

Из формулы (10) получаем, что на обтекаемой поверхности Σ $\Phi_{1\Sigma}$ имеет вид

$$\Phi_{1\Sigma}=-2(\xi-\xi_0-\varepsilon/2)/(2-a_*)-\xi_0-\varepsilon/2 \tag{13}$$

Итак, для одного и того же гидродинамического потока на обтекаемой поверхности Σ имеются два выражения (9) и (13) для потенциала Φ_1, которые должны совпадать. Приравнивая в (9) и (13) коэффициенты при нулевой и первой степенях $\xi-\xi_0-\varepsilon/2$ в разложении Тэйлора, получаем значения $\varphi_{1\Sigma}$ и a_*

$$\varphi_{1\Sigma}=\xi_0-\xi_0^{3/2}+\varepsilon/2-{}^3/_4\xi_0^{1/2}\varepsilon, \qquad a_*=2-{}^4/_3\xi_0^{-1/2} \tag{14}$$

Сравнивая a_* из (11) и (14), получаем связь между λ, μ и ξ_0

$$a(0)=2-{}^4/_3\xi_0^{-1/2} \tag{15}$$

Таким образом, множество пар λ, μ, пригодных для построения решения, составляет однопараметрическое семейство.

Из положительности левой части (15) вытекает, что такое решение можно построить лишь в той части области G, где $4/9<\xi_0<1$. В этой части области G электрический потенциал убывает одновременно с убыванием гидродинамического потенциала, что и служит необходимым условием для возможности построения такого решения.

Для простоты вычислений рассмотрим случай осесимметричной поверхности Σ, т. е. $\lambda=\mu$. Из (15) получаем связь между λ и ξ_0

$$\frac{\lambda^2}{1-\lambda^2}\left[\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}\ln\frac{1+\sqrt{1-\lambda^2}}{1-\sqrt{1-\lambda^2}}-2\right]=2-\frac{4}{3}\xi_0^{-1/2}$$

Можно показать, что λ монотонно возрастает от нуля до единицы при возрастании ξ_0 от $4/9$ до единицы. Получим также

$$a=\frac{\lambda^2}{1-\lambda^2}\left[\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}\ln\frac{\sqrt{1+\omega}+\sqrt{1-\lambda^2}}{\sqrt{1+\omega}-\sqrt{1-\lambda^2}}-\frac{2}{\sqrt{1+\omega}}\right]$$

где ω удовлетворяет уравнению (12), в котором $\lambda=\mu$.

Вычислим относительное возмущение электрического потенциала

$$\frac{\varphi-\varphi_0}{\varphi_0}=\frac{(\xi-\xi_0-\varepsilon/2)\,a}{(\xi-\xi_0^{3/2})(2-a_*)}\sim\frac{(\xi-\xi_0-\varepsilon/2)\,\xi_0^{1/2}\lambda^2}{2\,(\xi-\xi_0^{3/2})(1+\omega)^{3/2}}$$

Приведенная оценка имеет место при больших ω, что соответствует большим значениям $[(\xi-\xi_0-\varepsilon/2)^2+\eta^2+\zeta^2]^{1/2}$.

Аналогично можно получить соответствующие формулы для двумерного случая

$$a=\frac{2\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+\omega}{1-\lambda^2}-1}\right),\qquad a_*=\frac{2\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda}$$

$$\frac{(\xi-\xi_0-\varepsilon/2)^2}{1+\omega}+\frac{\eta^2}{\lambda^2+\omega}=\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2$$

$$\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda}=1-\frac{2}{3}\xi_0^{-1/2},\qquad 0<\lambda<0.245$$

Если в невозмущенный поток в точку $(\xi_0+\varepsilon/2,\ 0,\ 0)$ поместить металлический зонд, поверхность которого совпадает с поверхностью Σ, то через некоторое время, как это показано в работе [1], установится стационарный режим, причем зонд зарядится до некоторого значения $\varphi_\sim^*$ (плавающий потенциал), которое может быть измерено вольтметром. В этом случае суммарный ток, текущий на зонд, равен нулю. Это условие есть условие работы такого зонда. В предположении единственности решения уравнений электрогидродинамики построенное выше решение отражает картину взаимодействия зонда с потоком. В частности, полученное значение φ_Σ^* является значением плавающего потенциала. Несложный расчет показывает, что $\varphi_\sim^*$ совпадает с φ_0^* в невозмущенном потоке в точке $(\xi_0+\varepsilon/2,\ 0,\ 0)$, а это значит, что, зная плавающий потенциал такого зонда, получаем значение потенциала в невозмущенном потоке в точке, совпадающей с центром зонда. В построенном решении равенство нулю суммарного тока, текущего на зонд, выполняется автоматически, так как распределения плотностей тока и объемного заряда остаются в пределах принятой точности невозмущенными.

Аналогичные решения можно получить, если отказаться от равенства потенциалов эмиттера и коллектора. В этом случае изменится область, где возможно построение такого решения.

Задачу о нахождении зонда, не возмущающего распределений плотностей тока и объемного заряда, подобную рассмотренной выше, можно ставить, не ограничиваясь условием малости ε и данным видом области течения, но, как показывает разобранная задача, такое решение не всегда существует.

Автор благодарит А. Б. Ватажина и Г. А. Любимова за внимание к работе.

Поступила 31 I 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Ватажин А. Б., Лихтер В. А., Шульгин В. И. Исследование электрогазодинамической струи за источником заряженных частиц. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 5.
2. Гогосов В. В., Полянский В. А., Семенова И. П., Якубенко А. Е. Уравнения электрогидродинамики и коэффициенты переноса в сильном электрическом поле. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 2.
3. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа, М., «Наука», 1970.
4. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. 1, М., Физматгиз, 1963.