

Применяя теорему 1, получим следующее утверждение.

Следствие 1. Пусть в системе (4.1) P — матрица Гурвица, а в матрице шумов η либо строки (W_i'), либо столбцы (U_i') независимы между собой. Пусть матрица R определена формулами (2.2), (2.3), (4.4), если независимы строки, или формулами (2.2), (2.3), (4.5), если независимы столбцы. Система (4.1) устойчива тогда и только тогда, когда собственные числа R по модулю меньше единицы.

Поступила 5 II 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Кац И. Я., Красовский Н. Н. Об устойчивости систем со случайными параметрами. ПММ, 1960, т. 24, вып. 5.
2. Bertram J. E., Sarachik P. E. Stability of circuits with randomly time-varying parameters. Proc. Internat. Sympos. on Circuits and inform theory. Los-Angeles, Calif. IRE. transactions. CT-6, 1959.
3. Гихман И. И. Об устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений. В сб.: Предельные теоремы и статистические выводы. Ташкент, «Фан», 1966.
4. Хасьминский Р. З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М., «Наука», 1969.
5. Кушнер Г. Дж. Стохастическая устойчивость и управление. М., «Мир», 1969.
6. Невельсон М. Б., Хасьминский Р. З. Об устойчивости стохастических систем. Проблемы передачи информации, 1968, т. 2, вып. 3.
7. Невельсон М. Б., Хасьминский Р. З. Об устойчивости линейной системы при случайных возмущениях ее параметров. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2.
8. Невельсон М. Б. Некоторые замечания относительно устойчивости линейной стохастической системы. ПММ, 1966, т. 30, вып. 6.
9. Левит М. В., Якубович В. А. Алгебраический критерий стохастической устойчивости линейных систем с параметрическим воздействием типа «белый шум». ПММ, 1971, т. 36, вып. 1.
10. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц, изд. 3-е, М., «Наука», 1967.

УДК 531.01

ОБ УРАВНЕНИИ ФАЗОВОЙ АУТОПОДСТРОЙКИ ЧАСТОТЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ ФАЗОВОГО ДЕТЕКТОРА

Б. Н. Скрябин

(Горький)

Исследуется на цилиндрическом фазовом пространстве кусочно-линейная динамическая система второго порядка со скачками изображающей точки по линиям сшивания. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + h[1 - bF'(\varphi)] \frac{d\varphi}{dt} + F(\varphi) = \gamma \quad \left(\begin{array}{l} b > 0, h > 0 \\ 0 \leq \gamma < 1 \end{array} \right)$$

$$F(\varphi + 2k\pi) \equiv F(\varphi) \quad (k = 0, \pm 1, \dots), \quad F(\varphi) = \begin{cases} -1 & \text{при } -\pi < \varphi < 0 \\ 1 & \text{при } 0 < \varphi < \pi \end{cases}$$

Это уравнение описывает динамику системы фазовой автоподстройки частоты с интегрирующим фильтром [1⁰²] и прямоугольной характеристикой фазового детек-

тора [3] при приближенном учете запаздывания [1]. Оно теряет смысл при значениях φ , в которых $F(\varphi)$ терпит разрыв.

Введя новые переменные и обозначения

$$t^{\circ} = ht, \quad y = \frac{1}{h} \frac{d\varphi}{dt}, \quad \alpha = \frac{h^2\pi}{(1+\gamma)}, \quad \beta = \frac{h^2\pi}{(1-\gamma)} \geq \alpha$$

заменяем уравнение в полосах $-\pi < \varphi < 0$ и $0 < \varphi < \pi$ системами

$$\dot{\varphi} = y, \quad y' = \alpha^{-1}\pi - y \quad (-\pi < \varphi < 0) \quad (1)$$

$$\dot{\varphi} = y, \quad y' = -\beta^{-1}\pi - y \quad (0 < \varphi < \pi) \quad (2)$$

Здесь точкой обозначено дифференцирование по t° , фазовым пространством системы служит цилиндр.

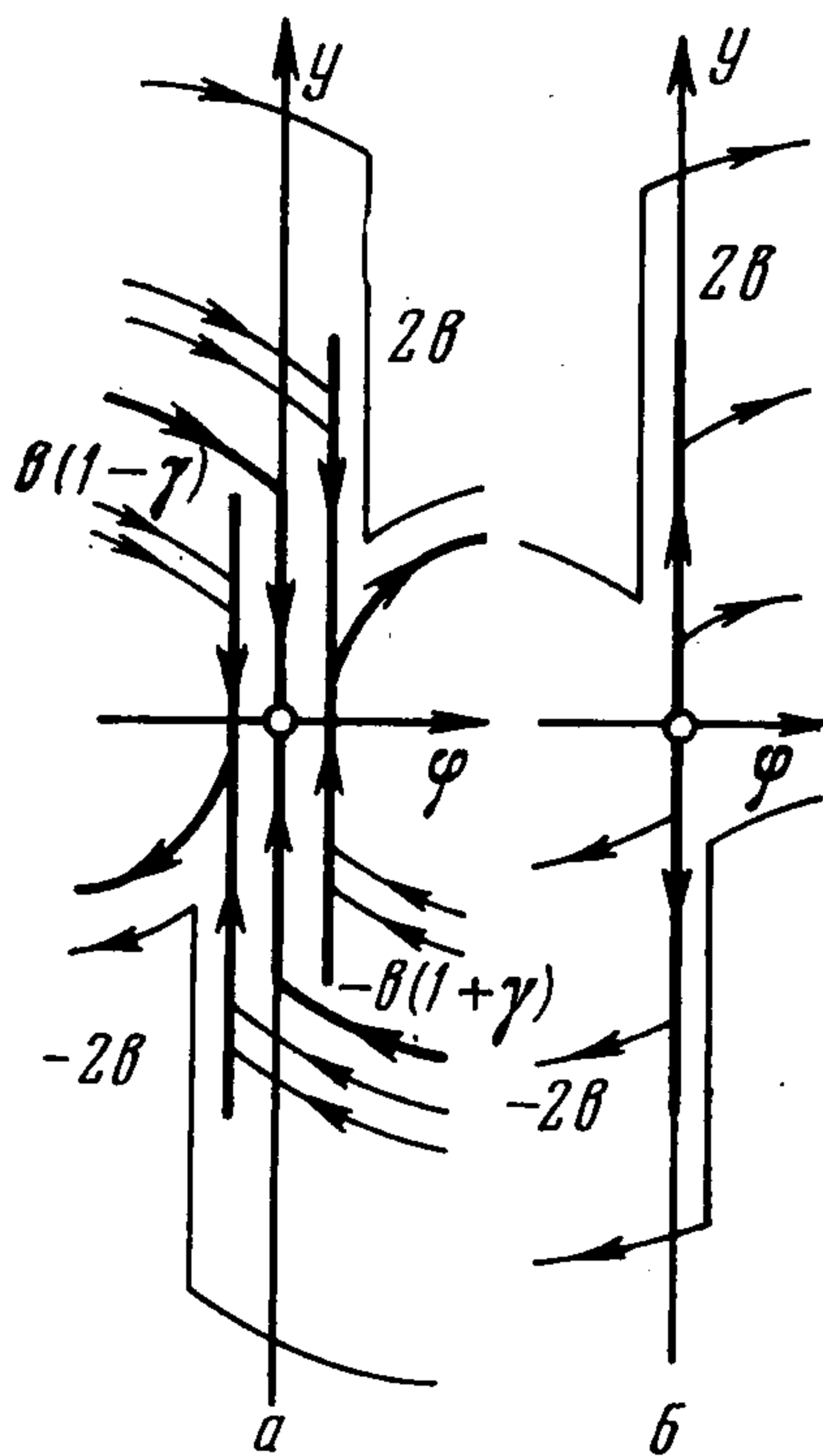
Системы (1) и (2) позволяют проследить движение изображающей точки до момента, когда она попадает на одну из прямых $\varphi = 0$ или $\varphi = \pi$. Дальнейшее движение изображающей точки нуждается в доопределении. Следует указать, сколько времени она находится на прямой, как движется по ней, в какой точке ее покидает и какой из систем (1) или (2) описывается ее дальнейшее движение.

Воспользуемся доопределением, построенным в работе [4]. (При применении формул ¹ работы [4] необходимо учитывать изменение масштабов по t и y).

Схема доопределенных движений по прямой $\varphi = \pi$ приведена на фиг. 1, а. Здесь для наглядности налегающие одна на другую траектории раздвинуты по оси φ .

Изображающая точка, попавшая в точку (π, y) , где $y \geq 2b$, совершает скачок величиной $2b$ вниз по прямой $\varphi = \pi$, после чего продолжает движение при $\varphi = \pi$, в соответствии с системой (1). Если $b(1-\gamma) < y < 2b$, то изображающая точка перескакивает в точку $(\pi, 0)$ и находится в ней в течение времени

$$bh^2 \ln\{b(1+\gamma) / [y - b(1-\gamma)]\}$$



Фиг. 1

после чего продолжает движение при $\varphi > \pi$ в соответствии с системой (1). Если $y = b(1-\gamma)$, изображающая точка перескакивает в точку $(\pi, 0)$ и остается там неограниченно долго. Если $0 \leq y < b(1-\gamma)$, то изображающая точка перескакивает в точку $(\pi, 0)$ и находится в ней в течение времени

$$bh^2 \ln b(1-\gamma) / b(1-\gamma) - y$$

после чего продолжает движение при $\varphi < \pi$ в соответствии с системой (2).

Поведение изображающей точки, двигавшейся в нижнем полуцилиндре и попавшей на прямую $\varphi = \pi$, аналогично (нужно лишь поменять y на $-y$ и γ на $-\gamma$).

Точка $(\pi, 0)$ будет состоянием равновесия, аналогичным седлу, а траектории, проходящие через точки $[\pi, b(1-\gamma)]$ и $[\pi, -b(1+\gamma)]$ — его сепаратрисами. Роль двух других сепаратрис выполняют траектории, выходящие из точки $(\pi, 0)$.

Схема доопределенных движений по прямой $\varphi = 0$ приведена на фиг. 1, б. Изображающая точка, попавшая в точку $(0, y)$, где $y > 0$, совершает скачок величиной $2b$ вверх по прямой $\varphi = 0$, после чего продолжает движение при $\varphi > 0$ в соответствии с системой (2). Если $y < 0$, то изображающая точка совершает скачок величиной $2b$ вниз по прямой $\varphi = 0$, после чего продолжает движение при $\varphi < 0$ в соответствии

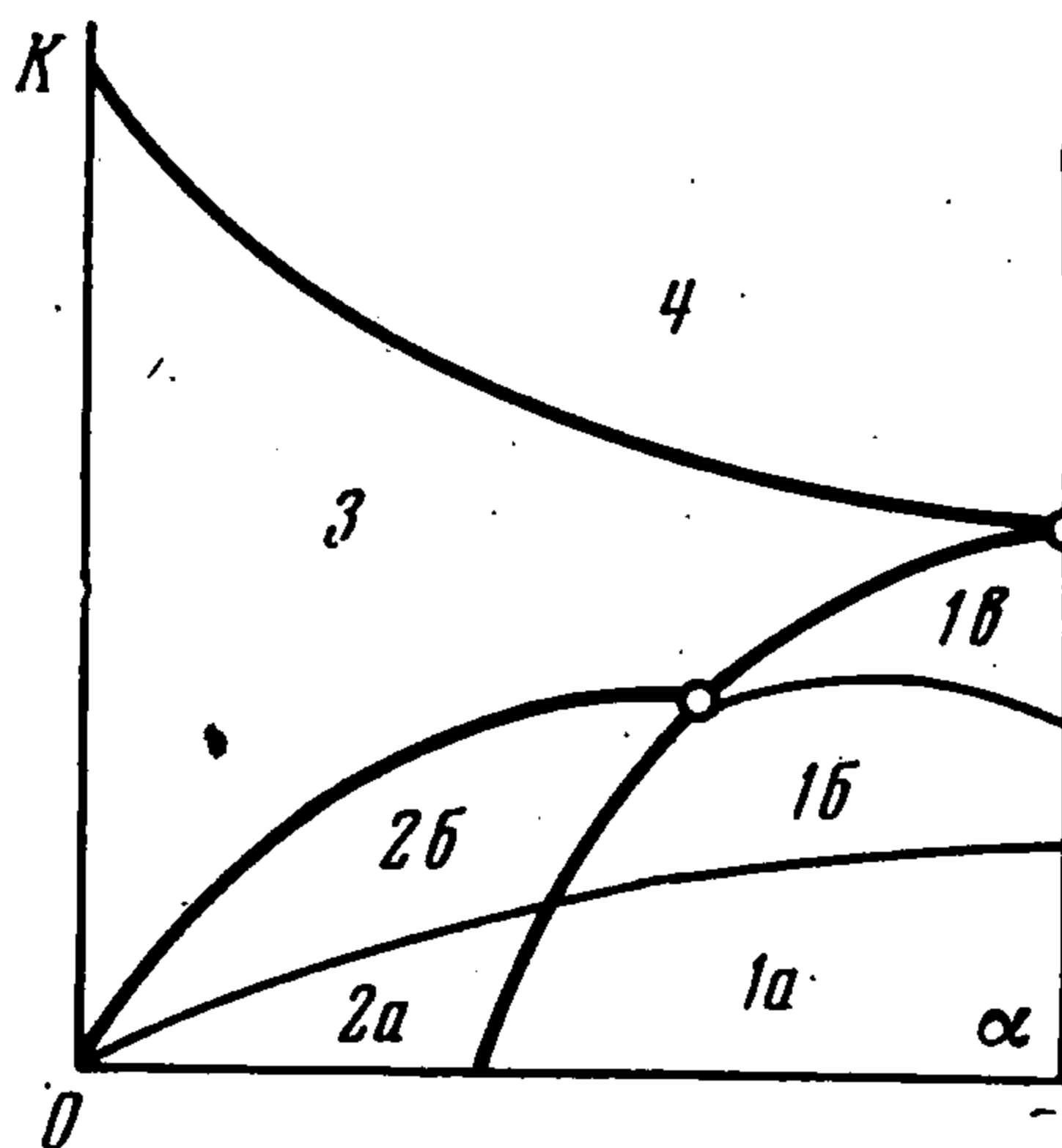
¹ В работе [4] на стр. 729, строка 18 сверху напечатано: $r = 2b, h > 0$. Следует читать: $r = 2bh > 0$.

с системой (1). Точка $(0, 0)$ будет состоянием равновесия, аналогичным неустойчивому узлу. Из него выходят траектории, проходящие через точки $(0, y)$, где $0 < y \leq 2b$ или $-2b \leq y < 0$. (Вертикальный участок такой траектории от точки $(0, 0)$ до точки $(0, y)$ изображающая точка проходит скачком.)

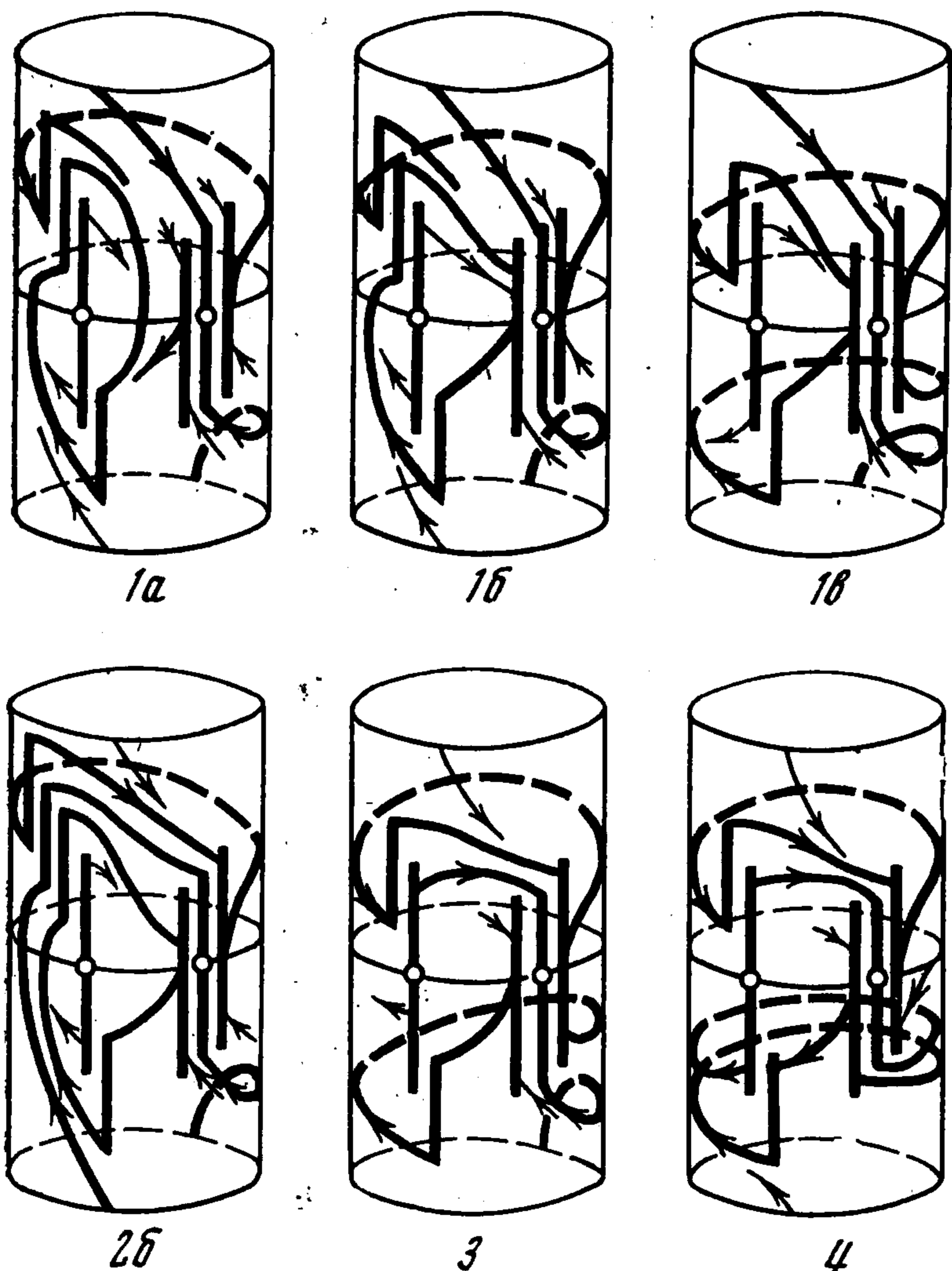
Когда система доопределена на прямых $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$, можно проследить любое ее частное решение на любом отрезке времени и провести ее качественное исследование. Не приводя его здесь (оно сходно с исследованием работы [5]), ограничимся изложением результатов.

На фиг. 2 приведено схематическое разбиение пространства параметров $\alpha, \beta, k = bh^2$ исследуемой системы на области различной качественной структуры фазовых траекторий (в сечении плоскостью $\beta = \text{const}$). Это разбиение осуществляют жирные линии на фиг. 2. Соответствующие структуры приведены на фиг. 3. Для упрощения на фиг. 3 принят неравномерный масштаб по оси φ , и оба состояния равновесия изображены на передней половине цилиндра; при равномерном масштабе одно из них было бы на заданной половине.

В области 1 система имеет устойчивый предельный цикл, охватывающий состояние равновесия $(0, 0)$ (стягивающийся в это состояние равновесия при $k \rightarrow 0$). Тонкие



Фиг. 2



Фиг. 3

линии разбивают область 1 на подобласти, различающиеся характером предельного цикла. В подобласти 1, а цикл имеет два вертикальных участка на прямой $\varphi = 0$, которые изображающая точка проходит скачком. В подобласти 1, б цикл имеет еще вертикальный участок на верхней части прямой $\varphi = \pi$. Изображающая точка проходит его также скачком, но, прежде чем продолжить движение по нижней части цикла, стоит некоторое время в точке $(\pi, 0)$. В подобласти 1, в такого же рода вертикальный участок цикл имеет и на нижней части прямой $\varphi = -\pi$.

При переходе из области 1 в область 2 рождается из сепаратрисы состояния равновесия $(\pi, 0)$, образующей петлю, устойчивый предельный цикл, охватывающий верхний полуцилиндр. На фиг. 4, а изображен (на развертке цилиндра) момент рождения цикла, на фиг. 4, б — цикл. Он имеет на прямых $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ вертикальные участки, которые изображающая

точка проходит скачком. После скачка вдоль прямой $\varphi = \pi$ изображающая точка, прежде чем продолжить движение по циклу, делает остановку в точке $(\pi, 0)$.

Таким образом, в области 2 имеем устойчивый предельный цикл, охватывающий верхний полуцилиндр, и устойчивый цикл, охватывающий состояние равновесия $(0, 0)$.

Последний цикл может быть двух типов. В подобласти 2, *a* он такой же, как в 1, *a*, в подобласти 2, *b* — такой же, как в 1, *b*.

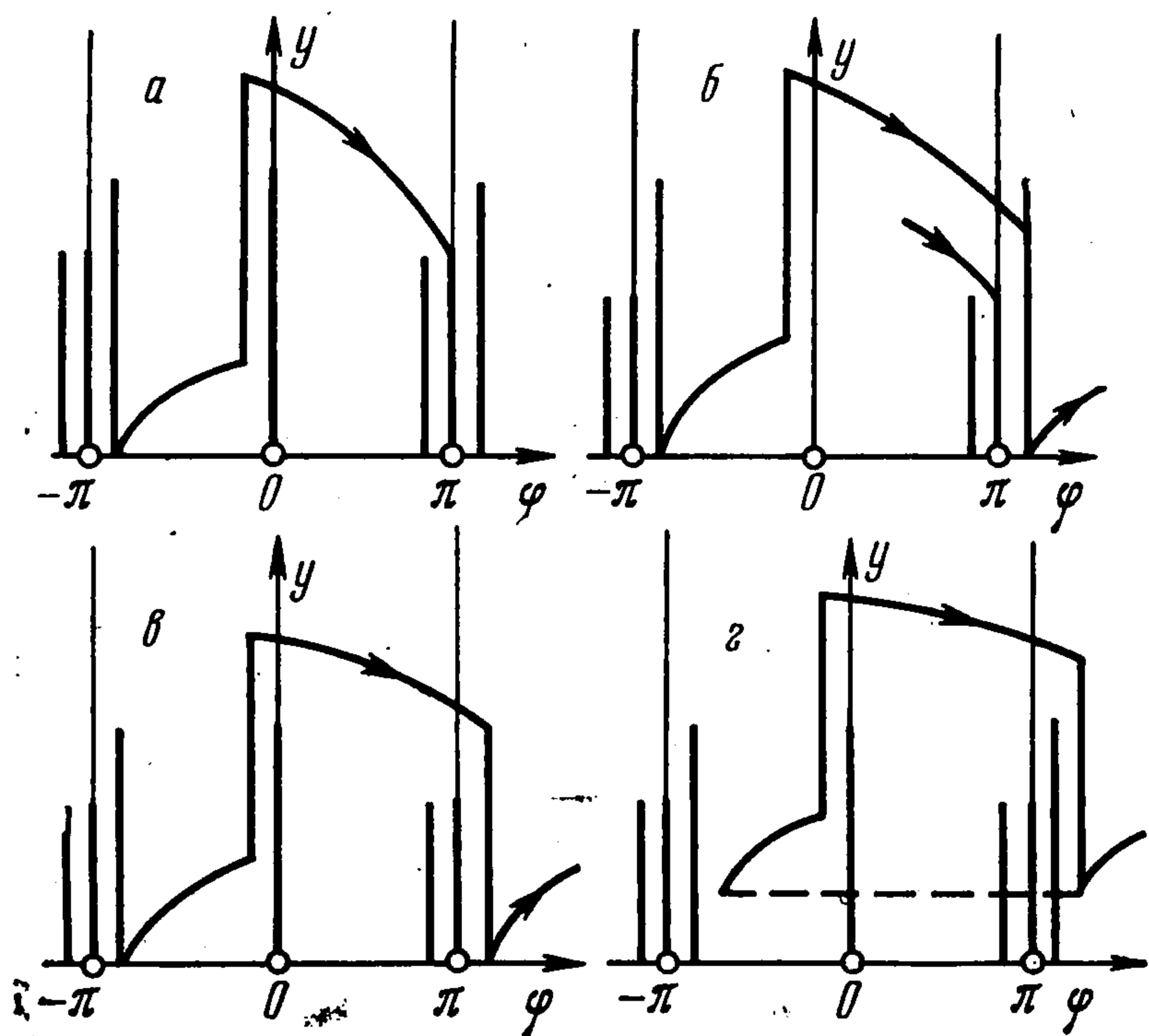
При переходе из области 2 в область 3 этот цикл влипают в сепаратрису состояния равновесия $(\pi, 0)$, образующую петлю. В области 3 система имеет только цикл, охватывающий верхний полуцилиндр.

При переходе из области 1 в область 3 через границу 1, *e* — 3 цикл, охватывающий состояние равновесия $(0, 0)$, влипают в сепаратрису состояния равновесия $(\pi, 0)$, образующую петлю. Одновременно из части этой петли, лежащей в верхнем полуцилиндре, рождается устойчивый предельный цикл, охватывающий верхний полуцилиндр.

При переходе из области 3 в область 4 рождается из сепаратрисы состояния равновесия $(\pi, 0)$, образующей петлю, устойчивый предельный цикл, охватывающий ниж-

ний полуцилиндр. Таким образом в области 4 система имеет два устойчивых предельных цикла: один в верхнем, другой в нижнем полуцилиндрах.

Область существования предельного цикла, охватывающего верхний полуцилиндр (совокупность областей 2, 3, 4) может быть разбита на две части, различающиеся характером цикла. В части, примыкающей к границе 1—2, 1—3, он имеет описанный выше характер и изображен на фиг. 4, *b*. При переходе в другую часть (момент перехода изображен на фиг. 4, *e*) цикл «отрывается» от оси φ (см. фиг. 4, *z*). Изображающая точка при движении по этому циклу не имеет остановок. Подобным же образом разбивается на



Фиг. 4

две части область существования цикла, охватывающего нижний полуцилиндр.

В заключение приведем имеющие интерес для приложений уравнения поверхности 1—2, 1—3, соответствующей рождению предельного цикла в верхнем полуцилиндре

$$\alpha = e^{-\tau} + \tau - 1, \beta = (k + 1)(e^{\theta} - 1) - \theta, \beta\tau - \alpha\theta = 2\alpha\beta - k\beta$$

Здесь τ и θ подлежат исключению.

Замечание. Эта работа примыкает к статьям автора [4, 5] и к статьям других авторов [6—8], в которых данное уравнение рассматривается при ряде предположений относительно знака коэффициента b вида разрывной функции $F(\varphi)$. Сравнивая результаты работ [4, 5] и данной, с одной стороны, и работ [6—8] — с другой, можно увидеть следующее: 1) примененные в работах [6—8] приемы не позволяют установить полностью характер всех решений уравнения, в частности, в некоторых случаях не дают возможности вычисления переходных процессов, заканчивающихся в состоянии равновесия; 2) приемы, примененные в работах [7, 8], могут в некоторых случаях приводить к неправильным выводам; так, если применить их к исследованному здесь случаю, то цикл, изображенный на фиг. 4, *b*, будет утерян, а за условия рождения цикла будут приняты условия превращения цикла типа 4, *b* в цикл типа 4, *z*.

Автор благодарен Н. Н. Баутину за советы и обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Капранов М. В. Полоса захвата при фазовой автоподстройке частоты. Радиотехника, 1956, т. 2, № 12.
2. Шахгильдян В. В., Ляховкин А. А. Фазовая автоподстройка частоты. М., «Связь», 1966.
3. Капранов М. В. Полоса захвата автоподстройки частоты с прямоугольной характеристикой фазового детектора. Изв. вузов. Радиотехника, 1958, № 4.
4. Скрябин Б. Н. Об одной динамической системе с разрывной характеристикой. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
5. Скрябин Б. Н. Качественное исследование одного уравнения теории фазовой автоподстройки частоты. ПММ, 1969, т. 33, вып. 2.
6. Шахтарин Б. И. Исследование кусочно-линейной системы ФАП. Радиотехника и электроника, 1969, т. 14, вып. 8.
7. Сафонов В. М. О влиянии формы пилообразной характеристики фазового детектора на полосу захвата ФАП. Радиотехника, 1969, № 6.
8. Сизов В. П. Анализ стационарных режимов ФАП при кусочно-линейной характеристике фазового детектора. Радиотехника и электроника, 1970, т. 15, вып. 3.

УДК 538.4

**ЗАДАЧА ОБ ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ЗОНДЕ,
НЕ ВОЗМУЩАЮЩЕМ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПЛОТНОСТЕЙ ТОКА
И ОБЪЕМНОГО ЗАРЯДА**

В. А. Бучин

(Москва)

Рассматривается задача об электрогидродинамическом зонде, находящемся под плавающим потенциалом, в предположении малости характерного размера зонда по сравнению с характерным размером области течения. Форма зонда находится в процессе решения такой, что внесение зонда в поток не возмущает распределений плотностей тока и объемного заряда. Вычисляются возмущения электрического потенциала, определяется значение плавающего потенциала зонда.

Элементарная теория электрогидродинамического зонда, основанная на одномерных решениях, дана в работе [1]. Ниже в отличие от [1] решается трехмерная задача обтекания зонда и из полученного решения находится связь между плавающим потенциалом зонда и потенциалом в исследуемой точке.

Рассмотрим установившееся потенциальное течение однородной несжимаемой вязкой жидкости в бесконечном пространстве со скоростью на бесконечности $V^* = (u_\infty, 0, 0)$. На эмиттере (плоскость $x = 0$) в незаряженную жидкость вносится объемный заряд, а на коллекторе (плоскость $x = L$) жидкость разряжается. Течение униполярно заряженной жидкости при $0 < x < L$ подчиняется уравнениям электрогидродинамики [2]. Задача решается в предположении отсутствия взаимодействия эмиттера и коллектора с гидродинамическим потоком. Это оправдано имеющимися экспериментами, в которых указанное взаимодействие весьма незначительно (например в работе [1] прозрачность сеток-электродов равна 0.95). Используем закон Ома $j^* = q^* (V^* + bE^*)$ ($b = \text{const}$ — подвижность), потенциальность электрического поля $E^* = -\text{grad}\phi^*$ и потенциальность поля скоростей $V^* = -\text{grad}\Phi^*$. Вводим безразмерные независимые переменные и искомые величины по формулам

$$\begin{aligned} x &= L\xi, & y &= L\eta, & z &= L\zeta, & \phi^* &= u_\infty L\phi / b, \\ \Phi^* &= u_\infty L\Phi, & q^* &= \epsilon_0 u_\infty q / (4\pi bL) \end{aligned}$$