УДК 531.36

ПРИЗНАК УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ВРЕМЕНИ

Н. И. Крупнова, С. Н. Шиманов

(Свердловск)

Один известный признак устойчивости для линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами [1] распространяется на системы с запаздыванием. Используется разработанный Н. Н. Красовским [2] явный вид квадратичных функционалов для систем дифференциальных уравнений с запаздыванием, роль которых аналогична роли квадратичных форм Ляпунова для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Аналогично [1] приводится признак устойчивости нелинейной системы дифференциальных уравнений с запаздыванием.

Пусть система

$$dx/dt = Ax(t) + Bx(t-\tau), \; \tau = \text{const}, \; \tau > 0 \tag{1}$$

где A и B — некоторые $n \times n$-мерные постоянные матрицы, $x(t)$ — n-мерный вектор, асимптотически устойчива, т. е. корни характеристического уравнения

$$|A - \lambda E + B\exp(-\lambda\tau)| = 0 \tag{2}$$

имеют отрицательные действительные части.

Тогда по теореме 5.1 работы [2] существуют определенно-положительные квадратичные функционалы $V[x(\vartheta)]$ и $W[x(\vartheta)]$, причем $V[x(\vartheta)]$ имеет вид

$$V[\mathrm{x}(\vartheta)] = (\alpha\mathrm{x}(0)\cdot\mathrm{x}(0)) + \int_{-\tau}^{0} (\beta(\vartheta)\,\mathrm{x}(\vartheta)\cdot\mathrm{x}(0))\,d\vartheta + \\ + \int_{-\tau}^{0}\int_{-\tau}^{0} (\gamma(\vartheta,\xi)\,\mathrm{x}(\vartheta)\cdot\mathrm{x}(\xi))\,d\vartheta d\xi \tag{3}$$

Здесь $\alpha = \{\alpha_{ij}\}$, $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, $\beta(\vartheta) = \{\beta_{ij}(\vartheta)\}$, $\gamma(\vartheta,\xi) = \{\gamma_{ij}(\vartheta,\xi)\}$, $\gamma_{ij}(\vartheta,\xi) = \gamma_{ji}(\xi,\vartheta)$ $i, j = 1, 2, \ldots n)$, α_{ij} — постоянные, $\beta_{ij}(\vartheta)$, $\gamma_{ij}(\vartheta,\xi)$ — непрерывно-дифференцируемые функции, $(\mathrm{x}\cdot\mathrm{y})$ — скалярное произведение векторов x и y.

Полная производная от функционала $V[\mathrm{x}(\vartheta)]$ по времени в силу системы (1) удовлетворяет условию

$$\left.\frac{dV[\mathrm{x}_t(\vartheta)]}{dt}\right|_{(1)} = -W[\mathrm{x}(\vartheta)], \qquad \mathrm{x}_t(\vartheta) = \mathrm{x}(t+\vartheta), \qquad -\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0 \tag{4}$$

где $\mathrm{x}_t(\vartheta)$ — элемент траектории системы (1).

Введем в функциональном пространстве непрерывных функций

$$x(\vartheta) = \{x_i(\vartheta)\} \; (i = 1, 2, \ldots n, \; -\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0)$$

норму

$$\|\mathrm{x}(\vartheta)\|_\tau = \sup\,(\mathrm{x}(\vartheta)\cdot\mathrm{x}(\vartheta))^{1/2} \; (-\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0)$$

Рассмотрим функционалы $V[\mathrm{x}(\vartheta)]$ и $W[\mathrm{x}(\vartheta)]$ на гиперсфере

$$\|\mathrm{x}(\vartheta)\|_\tau^2 = 1 \tag{5}$$

Если ограничиться функциями $\mathrm{x}(\vartheta)$, удовлетворяющими условиям Липшица, т. е. такими функциями, заданными на отрезке $[-\tau, 0]$, что для любых $\vartheta', \vartheta'' \in [-\tau, 0]$

существует постоянная K, что

$$|x_i(\vartheta'') - x_i(\vartheta')| < K|\vartheta'' - \vartheta'| \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

тогда множество функций $\mathrm{x}(\vartheta)$, удовлетворяющих условию (5), будет компактно. Следовательно, функционалы $V[\mathrm{x}(\vartheta)]$ и $W[\mathrm{x}(\vartheta)]$ на этом множестве ограничены и достигают точной верхней и нижней граней. Функционалы $V[\mathrm{x}(\vartheta)]$, $W[\mathrm{x}(\vartheta)]$ — определенно-положительные, поэтому существуют положительные числа l, l_1, L, L_1 такие, что на гиперсфере (5) рассматриваемых функций будут справедливы равенства

$$\inf V[\mathrm{x}(\vartheta)] = l, \qquad \sup V[\mathrm{x}(\vartheta)] = L \tag{6}$$
$$\inf W[\mathrm{x}(\vartheta)] = l_1, \qquad \sup W[\mathrm{x}(\vartheta)] = L_1$$

В силу того, что $V[\mathrm{x}(\vartheta)]$ и $W[\mathrm{x}(\vartheta)]$ — квадратичные функционалы, для них справедливы неравенства

$$l\|\mathrm{x}(\vartheta)\|_\tau^2 \leqslant V[\mathrm{x}(\vartheta)] \leqslant L\|\mathrm{x}(\vartheta)\|_\tau^2 \tag{7}$$
$$l_1\|\mathrm{x}(\vartheta)\|_\tau^2 \leqslant W[\mathrm{x}(\vartheta)] \leqslant L_1\|\mathrm{x}(\vartheta)\|_\tau^2$$

Рассмотрение множества функций $\mathrm{x}(\vartheta)$ в качестве множества начальных функций для решений систем дифференциальных уравнений с запаздыванием не ограничивает общности в силу замечания из работы ([3], стр. 158]. Это означает, что, если при данном t_0 система асимптотически устойчива на множестве удовлетворяющих условиям Липшица начальных функций, для которых начальный момент времени $t_0 + \tau$, тогда система асимптотически устойчива и на множестве любых кусочно-непрерывных кривых $\mathrm{x}_{t_0}(\vartheta)$ $(-\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0)$ с начальным моментом t_0.

Рассмотрим систему

$$d\mathrm{x}/dt = (A + C(t))\,\mathrm{x}(t) + (B + D(t))\,\mathrm{x}(t-\tau) \tag{8}$$

где $C(t)$, $D(t)$ — $n \times n$-мерные матрицы, непрерывные по t.

Возьмем функционал (3) и вычислим его производную по времени в силу системы (8)

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(8)} = -W[\mathrm{x}(\vartheta)] + ((\alpha C(t) + C^*(t)\alpha)\,\mathrm{x}(0)\cdot\mathrm{x}(0)) + (2\alpha D(t)\,\mathrm{x}(-\tau)\cdot\mathrm{x}(0)) +$$
$$+ \int_{-\tau}^{0} (C^*(t)\,\beta(\vartheta)\,\mathrm{x}(\vartheta)\cdot\mathrm{x}(0))\,d\vartheta + \int_{-\tau}^{0} (D^*(t)\,\beta(\vartheta)\,\mathrm{x}(\vartheta)\cdot\mathrm{x}(-\tau))\,d\vartheta \tag{9}$$

Используя неравенства (7), получаем оценку

$$W[\mathrm{x}(\vartheta)] \geqslant l_1\|\mathrm{x}(\vartheta)\|_\tau^2 \geqslant \frac{l_1}{L} V[\mathrm{x}(\vartheta)]$$

Рассмотрим билинейный функционал

$$P(\mathrm{x}(\vartheta), \mathrm{x}(0)) = \int_{-\tau}^{0} (\beta(\vartheta)\,\mathrm{x}(\vartheta)\cdot\mathrm{x}(0))\,d\vartheta = (U(\mathrm{x}(\vartheta))\cdot\mathrm{x}(0))$$

$$U(\mathrm{x}(\vartheta)) = \int_{-\tau}^{0} \beta(\vartheta)\,\mathrm{x}(\vartheta)\,d\vartheta$$

Здесь $\beta(\vartheta)$ — непрерывно-дифференцируемая матрица, т. е. $U(\mathrm{x}(\vartheta))$ — линейный оператор.

Для нормы билинейного функционала [4] данного вида имеет место равенство

$$\|P\| = \sup\|P(\mathrm{x}(\vartheta), \quad \mathrm{x}(0))\| = \|U\| \text{ при } \|\mathrm{x}(\vartheta)\|_\tau, \quad \|\mathrm{x}(0)\| \leqslant 1 \tag{10}$$

Как частный случай этого равенства имеем

$$\sup(\alpha\mathrm{x}(0)\cdot\mathrm{x}(0)) = \|\alpha\| \quad \text{при} \quad \|\mathrm{x}(0)\| \leqslant 1 \tag{11}$$

Из (10), (11) получаем неравенство

$$\|\alpha\| + \|U\| \leqslant L \tag{12}$$

Учитывая (12) и (7), получаем оценку

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(8)} \leqslant -\frac{l_1}{L} V[\mathrm{x}(\vartheta)] + (\|C(t)\| + \|D(t)\|)\frac{2L}{l} V[\mathrm{x}(\vartheta)]$$

Интегрируя это неравенство, получаем, что вдоль отрезков траекторий системы (8)

$$V[\mathrm{x}_t(\vartheta)] \leqslant V[\mathrm{x}_{t_0}(\vartheta)] \exp\left[-\frac{l_1}{L} + \frac{2L}{l(t-t_0)}\int\limits_{t_0}^{t}(\|C(s)\| + \|D(s)\|)\,ds\right](t-t_0)$$

Очевидно, если

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t-t_0}\int\limits_{t_0}^{t}(\|C(s)\| + \|D(s)\|)\,ds < \frac{l_1 l}{2L^2} \tag{13}$$

то

$$\lim_{t\to\infty} V[\mathrm{x}_t(\vartheta)] = 0$$

а значит и

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{x}(t) = 0$$

Стремление решений при $t \to \infty$ к нулю для линейной системы с запаздыванием — достаточное условие для асимптотической устойчивости [5], поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Если система (1) асимптотически устойчива, то система (8) также асимптотически устойчива, если матрицы $C(t)$ и $D(t)$ удовлетворяют условию (13), где $l = \inf V[\mathrm{x}(\vartheta)]$, $L = \sup V[\mathrm{x}(\vartheta)]$, $l_1 = \inf W[\mathrm{x}(\vartheta)]$ на гиперсфере $\|\mathrm{x}(\vartheta)\|_\tau^2 = 1$ функций $\mathrm{x}(\vartheta) = \{x_i(\vartheta)\}$ $(i = 1, 2, \ldots n)$, удовлетворяющих условиям Липшица, а $V[\mathrm{x}(\vartheta)]$ и $W[\mathrm{x}(\vartheta)]$—квадратичные функционалы, разрешающие задачу об асимптотической устойчивости системы (1) и удовлетворяющие условию (4).

Очевидно, при отсутствии запаздывания теорема переходит в соответствующую теорему работы [1] и аналогично выводятся соответствующие следствия.

Следствия. Если система (1) асимптотически устойчива, то система (8) также асимптотически устойчива при условии справедливости любого из следующих соотношений:

$$\begin{aligned}
&1.\ \int\limits_{t_0}^{\infty}(\|C(s)\| + \|D(s)\|)\,ds < c < \infty \\
&2.\ \|C(t)\| + \|D(t)\| < \tfrac{1}{2} l_1 L^{-1} \\
&3.\ \lim_{t\to\infty}(\|C(t)\| + \|D(t)\|) < \tfrac{1}{2} l_1 l L^{-2} \\
&4.\ \lim_{t\to\infty}(\|C(t)\| + \|D(t)\|) = 0
\end{aligned} \tag{14}$$

Рассмотрим далее случай нелинейной системы

$$d\mathrm{x}/dt = (A + C(t))\,\mathrm{x}(t) + (B + D(t))\,\mathrm{x}(t-\tau) + R(\mathrm{x}(t), \mathrm{x}(t-\tau), t) \tag{15}$$

Здесь $R(\mathrm{x}(t), \mathrm{x}(t-\tau), t)$—некоторый n-мерный непрерывный по всем аргументам вектор.

Теорема 2. Если система (1) асимптотически устойчива и матрицы $C(t)$ и $D(t)$ удовлетворяют условию (14), то можно указать постоянную $\beta > 0$ такую, что тривиальное решение системы (15) будет асимптотически устойчивым, каков бы ни был непрерывный вектор $\mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$, удовлетворяющий неравенству

$$\|\mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)\| \leqslant \beta(\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|) \tag{16}$$

Здесь l_1 и L определены равенствами (6), а $V[\mathbf{x}(\vartheta)]$ и $W[\mathbf{x}(\vartheta)]$ — квадратичные функционалы, разрешающие задачу об асимптотической устойчивости системы (1) и такие, что

$$\left.\frac{dV[\mathbf{x}_t(\vartheta)]}{dt}\right|_{(1)} = -2W[\mathbf{x}(\vartheta)] \tag{17}$$

Доказательство. Возьмем функционал $V[\mathbf{x}(\vartheta)]$, удовлетворяющий условию (17) и имеющий вид (3), и вычислим производную по времени от него в силу системы (15)

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(15)} = -2W[\mathbf{x}(\vartheta)] + ((\alpha C(t) + C^*(t)\alpha)\mathbf{x}(0)\cdot\mathbf{x}(0)) + (2\alpha D(t)\mathbf{x}(-\tau)\cdot\mathbf{x}(0)) +$$
$$+\int_{-\tau}^{0}(C^*(t)\beta(\vartheta)\mathbf{x}(\vartheta)\cdot\mathbf{x}(0))\,d\vartheta + \int_{-\tau}^{0}(D^*(t)\beta(\vartheta)\mathbf{x}(\vartheta)\cdot\mathbf{x}(-\tau))\,d\vartheta +$$
$$+(\alpha\mathbf{R}(\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(-\tau), t) + \mathbf{R}^*(\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(-\tau), t)\,\alpha\cdot\mathbf{x}(0)) +$$
$$+\left(\int_{-\tau}^{0}\beta(\vartheta)\mathbf{x}(\vartheta)\,d\vartheta\cdot\mathbf{R}(\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(-\tau), t)\right)$$

Используя оценки

$$(\alpha\mathbf{R}(\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(-\tau), t) + \mathbf{R}^*(\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(-\tau), t)\,\alpha\cdot\mathbf{x}(0)) \leqslant$$
$$\leqslant 2\|\alpha\|\cdot\|\mathbf{R}(\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(-\tau), t)\|\cdot\|\mathbf{x}(0)\| \leqslant 4\|\alpha\|\cdot\beta\cdot\|\mathbf{x}(\vartheta)\|_\tau^2$$
$$\left(\int_{-\tau}^{0}\beta(\vartheta)\mathbf{x}(\vartheta)\,d\vartheta\cdot\mathbf{R}(\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(-\tau)\,t)\right) \leqslant$$
$$\leqslant \left\|\int_{-\tau}^{0}\beta(\vartheta)\mathbf{x}(\vartheta)\,d\vartheta\right\|\cdot\|\mathbf{R}(\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(-\tau), t)\| \leqslant 2\beta\|U\|\cdot\|\mathbf{x}(\vartheta)\|_\tau^2$$

получаем для производной от функционала

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(15)} \leqslant -2W[\mathbf{x}(\vartheta)] + (\|C(t)\| + \|D(t)\|)\,2L\|\mathbf{x}(\vartheta)\|_\tau^2 + 4L\beta\|\mathbf{x}(\vartheta)\|_\tau^2$$

Если сумма $\|C(t)\| + \|D(t)\|$ удовлетворяет неравенству (14) и число $\beta > 0$ удовлетворяет условию $\beta < {}^1/_4 l_1 L^{-1}$, то эта производная будет определенно-отрицательным функционалом, т. е. функционал $V[\mathbf{x}(\vartheta)]$ будет удовлетворять всем условиям теоремы об асимптотической устойчивости [3] вдоль траекторий системы (15). Следовательно, тривиальное решение системы (15) асимптотически устойчиво. Теорема доказана.

Поступила 12 IV 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Трубицын Н. Ф. Признак устойчивости линейных систем с переменными коэффициентами. Дифференциальные уравнения, 1968, т. 4, № 11.
2. Красовский Н. Н. Об аналитическом конструировании оптимального регулятора в системе с запаздыванием времени. ПММ, 1962, т. 26, вып. 1.
3. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., Физматгиз, 1959.
4. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., Физматгиз, 1959.
5. Зверкин А. М. О связи между ограниченностью и устойчивостью решений линейных систем с бесконечным числом степеней свободы. Дифференциальные уравнения. 1968, т. 4, № 2.