Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 517.946

ОЦЕНКА ВРЕМЕНИ ВОЗНИКНОВЕНИЯ РАЗРЫВОВ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Ю. К. Энгельбрехт

(Таллин)

Получена оценка времени возникновения разрыва решений гиперболической системы квазилинейных дифференциальных уравнений при нулевых начальных и непрерывных граничных условиях. Приводятся примеры для одномерных задач газовой динамики и геометрически нелинейной теории упругости.

Задачи анализа нелинейных переходных волновых процессов в газовой динамике и в теории упругости приводят к интегрированию квазилинейных гиперболических систем дифференциальных уравнений. Проблемы возникновения разрывов в решениях таких систем при непрерывных начальных условиях (задача Коши), а также при непрерывных граничных условиях (краевая задача) рассмотрены в работах [1–6]. Наиболее общий результат получен [4] для задачи Коши, для которой при помощи теоремы сравнения установлены верхняя и нижняя оценки времени возникновения разрыва решения системы второго порядка.

В данной статье по методу Джеффри [4] аналогичный результат получен для краевой задачи.

1. Рассматривается следующая система с двумя независимыми переменными t и x:

$$\frac{\partial}{\partial t}U + A\frac{\partial}{\partial x}U = 0, \qquad U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

$$u_j = u_j(x, t), \qquad a_{ij} = a_{ij}(u_1, u_2, x, t)$$

Исследуется при $t \geqslant 0$ $(0 \leqslant x \leqslant \infty)$ поведение решения системы (1.1) при начальных условиях

$$u_j(x, 0) = b_j, \qquad b_j = \mathrm{const} \qquad (j = 1, 2) \tag{1.2}$$

и при краевом условии

$$u_1(0, t) = \varphi_1(t) \text{ или } u_2(0, t) = \varphi_2(t) \tag{1.3}$$

где $\varphi_j(t)$ — непрерывные функции, удовлетворяющие условию согласования начальных условий (1.2) и условия (1.3): $\varphi_j(0) = b_j$.

Уравнения характеристик для системы (1.1) имеют вид

$$dx \,/\, dt = \lambda^{(i)} \qquad (i = 1, 2)$$

где $\lambda^{(i)}$ — корни уравнения $|A - \lambda I| = 0$.

Введем в рассмотрение инварианты Римана r и s

$$\begin{aligned} r &= \int q_1 l_1^{(1)} du_1 + \int q_1 l_2^{(1)} du_2 \\ s &= \int q_2 l_1^{(2)} du_1 + \int q_2 l_2^{(2)} du_2 \end{aligned} \tag{1.4}$$

где $l_j^{(i)}$ — левые собственные векторы матрицы A, q_i — интегрирующие множители.

На характеристиках инварианты Римана r и s удовлетворяют условиям:
на характеристиках направления $\lambda^{(1)}$

$$\frac{dr}{d\alpha}=\frac{\partial r}{\partial t}+\lambda^{(1)}\frac{\partial r}{\partial x}=0 \tag{1.5}$$

на характеристиках направления $\lambda^{(2)}$

$$\frac{ds}{d\beta}=\frac{\partial s}{\partial t}+\lambda^{(2)}\frac{\partial s}{\partial x}=0 \tag{1.6}$$

где α и β — параметры вдоль характеристик.

Определим время возникновения разрыва величины $\partial r\,/\,\partial t$.

Продифференцируя уравнение (1.5) по α, получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\lambda^{(1)}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 r=\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}+\frac{\partial\lambda^{(1)}}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial\lambda^{(1)}}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial^2 r}{\partial x\partial t}\lambda^{(1)}=0 \tag{1.7}$$

Поскольку

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}+\lambda^{(1)}\frac{\partial^2 r}{\partial x\partial t}=\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right),\qquad \frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{\lambda^{(1)}}\frac{\partial r}{\partial t}$$

$$\frac{\partial s}{\partial t}=\frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(2)}-\lambda^{(1)}}\frac{ds}{d\alpha}$$

то (1.7) может быть представлено в виде

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)-\frac{\partial\lambda^{(1)}}{\partial r}\frac{1}{\lambda^{(1)}}\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2-\frac{\partial\lambda^{(1)}}{\partial s}\frac{ds}{d\alpha}\frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(2)}-\lambda^{(1)}}\frac{1}{\lambda^{(1)}}\frac{\partial r}{\partial t}=0 \tag{1.8}$$

Путем введения новой переменной v_1 по формулам

$$v_1=\frac{\partial r}{\partial t}\exp g_1,\qquad g_1=\int\frac{1}{\lambda^{(1)}}\frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(2)}-\lambda^{(1)}}\frac{\partial\lambda^{(1)}}{\partial s}ds \tag{1.9}$$

получим

$$\frac{dv_1}{d\alpha}=\exp(-g_1)\frac{1}{\lambda^{(1)}}\frac{\partial\lambda^{(1)}}{\partial r}v_1^2 \tag{1.10}$$

при краевом условии

$$v_1[\alpha(0,\ t)]=F[\varphi_j(t)] \tag{1.11}$$

где $F(t)$ — функция, которую следует построить на основании (1.9) с применением функции φ_1 или φ_2, заданной в виде краевого условия (1.3).

Соответствующее уравнение сравнения с постоянным коэффициентом подберем в виде

$$dV_1/dt=NV_1^2\qquad (N=\mathrm{const}) \tag{1.12}$$

Прямое интегрирование уравнения (1.12) дает решение

$$V_1=\frac{V_{01}(\tau)}{1-tNV_{01}(\tau)} \tag{1.13}$$

Здесь функция $V_{01}(\tau) = V_1(0, \tau)$ определена краевым условием типа (1.11). Из (1.13) следует, что в случае $N > 0$ решение уравнения сравнения (1.12) имеет бесконечный разрыв при

$$t = T_*, \quad T_*\zeta = \tau + 1 / NV_{01}(\tau) \qquad (1.14)$$

Выясним теперь время возникновения разрыва $t = t_*$ для уравнения (1.10). Предположим, что коэффициенты уравнения (1.1) a_{ij} и инварианты Римана r и s таковы, что величина $\partial r / \partial t$ однозначно определима через краевое условие (1.3). Используя параметризацию $\alpha(t) \equiv t$ и теорему сравнения [4], можно определить верхний t_+ и нижний t_- пределы времени возникновения разрыва решения уравнения (1.10) на характеристике направления $\lambda^{(1)}$, принимающей начало при $t = \tau$, $x = 0$.

Выполняется неравенство

$$t_- \leqslant t_* \leqslant t_+ \qquad (1.15)$$

где

$$t_+ = \tau + \lambda^{(1)} \left[\min \Phi(\tau, r, s) \frac{\partial r(t)}{\partial t} \Big|_{t=\tau} \right]^{-1} \qquad (1.16)$$

$$t_- = \tau + \lambda^{(1)} \left[\max \Phi(\tau, r, s) \frac{\partial r(t)}{\partial t} \Big|_{t=\tau} \right]^{-1} \qquad (1.17)$$

$$\Phi(\tau, r, s) = \frac{\partial \lambda^{(1)}(\tau)}{\partial r} \exp\left[g_1(r_0, s_0) - g_1(r_0, s(\tau))\right]$$

Здесь r_0 и s_0 — значения инвариантов Римана r и s при $t = \tau$, $x = 0$.

В случае $a_{ij} = a_{ij}(u_1, u_2)$ в силу начальных условий (1.2) характеристики направления $\lambda^{(1)}$ остаются прямыми, и вдоль них выполняется условие $s = s_0$, следовательно, $t_+ = t_-$. В этом случае для волны, распространяющейся в направлении возрастания x, критическое время возникновения разрыва определяется формулой

$$t_* = \tau + \lambda^{(1)} \left[\frac{d\lambda^{(1)}(\tau)}{\partial r} \frac{\partial r(t)}{\partial t} \Big|_{t=\tau} \right]^{-1} \qquad (1.18)$$

Отметим, что исследуя задачу распространения волн в направлении убывания x при $t \geqslant 0$ $(0 \geqslant x \geqslant -\infty)$, аналогично имеем

$$t_* = \tau + \lambda^{(2)} \left[\frac{\partial \lambda^{(2)}(\tau)}{\partial s} \frac{\partial s(t)}{\partial t} \Big|_{t=\tau} \right]^{-1} \qquad (1.19)$$

Формулы определения времени возникновения разрывов в решении краевой задачи для системы квазилинейных дифференциальных уравнений (1.1) позволяют определить два этапа в развитии решения при непрерывных краевых условиях (1.3) и установить качественную оценку о возможности появления разрывного решения. Если $t_* < \tau$, то в области $t \geqslant 0$, $0 \leqslant x \leqslant \infty$ решение остается непрерывным. Если $t_* > \tau$, то в этой области при $t < t_*$ решение непрерывное, при $t > t_*$ — имеет разрыв.

2. Рассмотрим пример из газовой динамики. Одномерная изэнтропическая задача движения газа сводится к уравнению (1.1), в котором

$$u_1 = \rho, \ u_2 = u, \ a_{11} = a_{22} = u, \ a_{12} = \rho, \ a_{21} = c^2\rho^{-1} \qquad (2.1)$$

Здесь u — скорость потока, ρ — плотность газа, c — скорость звука, причем $c^2 = A_0\gamma\rho^{\gamma-1}$, γ — показатель адиабаты газа, $A_0 = \mathrm{const}$. В начальных

$$b_1 = \rho_0, \qquad b_2 = 0 \tag{2.2}$$

и краевых условиях

$$u_2(0, t) = u(0, t) = \varphi_2(t) \tag{2.3}$$

В данном случае

$$\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)} = u \pm c, \qquad r, \; s = \pm \frac{u}{2} + \frac{c}{\gamma - 1} \tag{2.4}$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$\frac{\partial\lambda^{(1)}}{\partial r} = \frac{\gamma+1}{2}, \qquad \frac{\partial r}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} \tag{2.5}$$

Подставляя соотношения (2.3) — (2.5) в (1.18), получим для критического времени формулу

$$t_* = \frac{2c_0}{\gamma+1}\left[\frac{\partial\varphi_2(0)}{\partial t}\right]^{-1} \tag{2.6}$$

где учтены условия (2.2) на характеристике $dx \,/\, dt = c_0$. Формула (2.6) ранее получена разными авторами [1].

3. Рассмотрим уравнение движения упругого полупространства с учетом геометрической нелинейности тензора деформации. Эту задачу можно также свести к уравнению (1.1). Пусть x — лагранжева пространственная координата, t — время. В этом случае

$$u_1 = \partial u \,/\, \partial x, \;\; u_2 = \partial u \,/\, \partial t, \;\; a_{11} = a_{22} = 0, \;\; a_{12} = -1, \;\; a_{21} = -\psi(u_1) \tag{3.1}$$
$$\psi(u_1) = c_0^2\,(1 + 3u_1 + {}^3/_2 u_1^2)$$

Здесь u — перемещение, $c_0 = \mathrm{const}$ — скорость распространения волн в линейной задаче. Начальные условия (1.2) имеют вид

$$b_1 = 0, \qquad b_2 = 0 \tag{3.2}$$

Краевое условие соответствует силовому воздействию на свободной плоскости полупространства

$$u_1(0, t) = f_1(t), \qquad f_1(0) = 0 \tag{3.3}$$

В данном случае

$$\lambda^{(1)}, \; \lambda^{(2)} = \pm\,[\psi(u_1)]^{1/2} \tag{3.4}$$

Инварианты Римана вычисляются после разложения подынтегральных функций в ряд Маклорена с учетом первых двух членов

$$r, \; s = c_0\,(u_1 + {}^3/_4 u_1^2 + {}^1/_4 u_1^3) \mp u_2 \tag{3.5}$$

Легко убедиться в том, что

$$\frac{\partial\lambda^{(1)}}{\partial r} = \frac{3}{2}\,c_0\,(1 + u_1)\left(1 + 3u_1 + \frac{3}{2}\,u_1^2\right)^{-1/2}\frac{\partial u_1}{\partial r} \tag{3.6}$$

Из соотношений (3.5) получим $r + s = 2c_0\,(u_1 + {}^3/_4 u_1^2 + {}^1/_4 u_1^3)$, откуда следует

$$\frac{\partial u_1}{\partial r} = \frac{1}{2}\left[c_0\left(1 + \frac{3}{2}\,u_1 + \frac{3}{4}\,u_1^2\right)\right]^{-1} \tag{3.7}$$

Используя начальные условия (3.2), получим из (3.5)

$$\frac{\partial r}{\partial t} = 2c_0\left(1 + \frac{3}{2}\,u_1 + \frac{3}{4}\,u_1^2\right)\frac{\partial u_1}{dt} \tag{3.8}$$

Подстановкой соотношений (3.6) — (3.8) в формулу (1.18) получим для оценки времени возникновения разрыва оценочную формулу

$$t_* \cong \tau + \frac{2}{3}\left[1 + 2u_1(\tau) - \frac{1}{2}\ u_1^2(\tau)\right]\left[\frac{\partial u_1(t)}{\partial t}\right]_{t=\tau}^{-1} \tag{3.9}$$

Если разрыв возникает на первой характеристике $dx \,/\, dt = c_0$, то инварианты Римана (3.5) вычисляются точно, и с учетом (3.3) формула (3.9) упрощается к виду

$$t_* = \frac{2}{3}\left[\frac{\partial f_1(0)}{\partial t}\right]^{-1} \tag{3.10}$$

Отметим, что в данном случае время разрыва t_* не зависит от скорости распространения волн c_0.

Рассмотрим частные случаи формулировки краевых условий (3.3). Введем в рассмотрение функцию $g(t)$, имеющую свойства

$$g(0) = 0, \quad g(t) > 0, \ \frac{\partial g(t)}{\partial t} > 0, \qquad \frac{\partial^2 g(t)}{\partial t^2} < 0 \quad \text{при} \quad t > 0$$

1°. Пусть краевое условие (3.3) имеет вид

$$f_1(t) = g(t)H(t) \tag{3.11}$$

где $H(t)$ — функция Хевисайда. Тогда время возникновения разрыва решения по (3.10) равно

$$t_* = \frac{2}{3}\left[\frac{\partial g(0)}{\partial t}\right]^{-1}$$

Отметим, что при краевом условии (3.11) возникает волна растяжения, на фронте которой появляется ударная волна при $t = t_*$.

2°. Пусть краевое условие (3.3) имеет вид

$$f_1(t) = -g(t)H(t) \tag{3.12}$$

В этом случае по формуле (3.10) имеем $t_* < 0$. Краевое условие (3.12) определяет волну сжатия, на фронте которой решение остается непрерывным.

Автор благодарит У. К. Нигула за постоянное внимание к работе.

Поступила 13 V 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Курант Р., Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны. М., Изд-во иностр. лит., 1950.
2. Zabusky N. I. Exact solutions for the vibrations of a nonlinear continuous model string. J. Math. Phys., 1962, vol. 3, No. 5.
3. Jeffrey A., Taniuti T. Nonlinear wave propagation. N. Y., Academic Press, 1964.
4. Jeffrey A. The evolution of discontinuities in solutions of homogeneous nonlinear hyperbolic equations having smooth initial data. J. Math. Mech. 1967, vol. 17, No 4.
5. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения. М., «Наука», 1968.
6. Murray J. D., Tayler A. B. An asymptotic solution of a class of nonlinear wave equations: a model for the human torso under impulsive stress. SIAM J. Appl. Math., 1970, vol. 18, No. 4.