Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 539.3

О СХОДИМОСТИ МЕТОДА ОДНОРОДНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЛ

Г. Л. Бровко, В. С. Ленский

(Москва)

Для деформируемого твердого тела, упругие и пластические характеристики которого — функции координат, дается постановка математической задачи о равновесии. Выделение нелинейных членов и членов, учитывающих отклонение модулей упругости от некоторых постоянных значений, приводит к методу линейных последовательных приближений, аналогичному методу упругих решений. В каждом приближении решается задача линейной теории упругости для однородного тела под действием фиктивных массовых и поверхностных сил, определяемых предыдущим приближением. С использованием аппарата функционального анализа доказана сходимость метода применительно к первой и второй краевым задачам.

Во многих случаях тела и среды неоднородны по отношению к механическим свойствам. Неоднородность возникает или в процессе формирования материала (затвердевание из расплава, закалка, старение и т. п.), или представляет собой результат наличия неоднородных полей температуры, радиоактивных облучений и других физических и химических полей. При этом упругие и пластические характеристики материала являются функциями координат, которые представляются или в явном виде (например для естественно неоднородных сред), или вводятся при помощи полевых функций (доза облучения [1], степень превращения аустенита при закалке стали [2] и т. п.).

1. Ограничиваясь классом изотропных материалов, будем считать, что упругие и пластические характеристики материала — функции ряда параметров $T, R, \ldots$, зависящих от координат x_m $(m = 1, 2, 3)$ точки. Будем предполагать, что функции $T(x_m)$, $R(x_m)$, ... можно определить независимо от определения напряженного и деформированного состояния тела (раздельная задача) и что процесс изменения внешних нагрузок, включая $T, R, \ldots$, таков, что в каждой точке тела имеет место простое нагружение. Тогда при малых упруго-пластических деформациях типичная задача о равновесии тела формулируется в виде следующей краевой задачи: необходимо определить 15 функций u_i, ε_{ij}, σ_{ij}, удовлетворяющих внутри области Ω, занятой телом, соотношениям

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0, \qquad s_{ij} = \frac{2\sigma_u}{3\text{Э}_u}\text{Э}_{ij}$$

$$\sigma_u = \Phi(\text{Э}_u, T, R), \quad \sigma = f(\varepsilon, T, R), \quad \varepsilon_{ij} = {}^1/_2(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{1.1}$$

а на границе S области Ω — соотношениям

$$\begin{aligned} u_i &= \psi_i \quad \text{на} \quad S_u \\ \sigma_{ij}l_j &= T_{\nu i} \quad \text{на} \quad S_\sigma \end{aligned} \qquad (S_u + S_\sigma = S) \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{u} = u_i \mathbf{x}_i$ — вектор перемещения, $\mathbf{F} = F_i \mathbf{x}_i$ — вектор объемных сил, $\mathbf{T}_\nu = T_{i\nu} \mathbf{x}_i$ — вектор заданных поверхностных сил, $\sigma_u = (^3/_2 s_{ij} s_{ij})^{1/2}$ — интенсивность напряжений, $\sigma = {}^1/_3 \sigma_{ii}$ — среднее напряжение, $Э_u = (^2/_3 Э_{ij} Э_{ij})^{1/2}$ — интенсивность малых деформаций, $\varepsilon = {}^1/_3 \varepsilon_{ii}$ — среднее удлинение, $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}$ — девиатор напряжений, $Э_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon\delta_{ij}$ — девиатор деформаций, T — температура, R — доза облучения; всюду имеется в виду суммирование по дважды повторяющимся латинским индексам. Без потери общности сохранены лишь два внешних параметра T и R.

Представим функции Φ и f в виде [1]

$$\sigma_u = 3G_0 Э_u [1 - g(Э_u, T, R)], \quad \sigma = 3K_0(\varepsilon - \alpha T - qR)[1 + \varphi(T, R)]$$

$$g(Э_u, T, R) = \frac{3G_0 Э_u - \Phi(Э_u, T, R)}{3G_0 Э_u}, \quad \varphi(T, R) = \frac{K(T, R) - K_0}{K_0} \tag{1.3}$$

где $G = G(T, R)$, $K = K(T, R)$ — модуль сдвига и объемный модуль упругости материала, G_0, K_0 — те же величины для необлученного материала при температуре естественного состояния T_0; α, q — коэффициенты линейного теплового и радиационного расширения.

Для упругого состояния, когда $\sigma_u \leqslant \sigma_s(T, R)$, надо полагать

$$g(T, R) = \frac{G_0 - G(T, R)}{G_0}$$

причем в этом случае g и φ — известные функции координат, заданные неявно через $T(x_m)$, $R(x_m)$.

Раздельная задача терморадиационной пластичности при простом нагружении сводится к определению трех функций $u_i(x_m)$, которые в Ω удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия

$$\begin{gathered}(K_0 + {}^1/_3 G_0)\theta_{,i} + G_0 \nabla^2 u_i + F_i - 3K_0(\alpha T + qR)_{,i} = \\ = 2G_0[g(Э_u, T, R)(\varepsilon_{ij} - \varepsilon\delta_{ij})]_{,j} - 3K_0[\varphi(T, R)(\varepsilon - \alpha T - qR)]_{,i}\end{gathered} \tag{1.4}$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned} u_i &= \psi_i \quad &&\text{на } S_u \\ (\sigma_{ij}^{(e)} + \sigma_{ij}^{(T)}) l_j &= T_{\nu i} \quad &&\text{на } S_\sigma \end{aligned} \tag{1.5}$$

Здесь $\theta = \varepsilon_{ii}$ — объемное расширение и использованы обозначения

$$\begin{gathered}\sigma_{ij}^{(e)} = 3K_0 \varepsilon\delta_{ij} + 2G_0(\varepsilon_{ij} - \varepsilon\delta_{ij}) - 3K_0(\alpha T + qR)\delta_{ij} \\ \sigma_{ij}^{(T)} = 3K_0\varphi(T, R)(\varepsilon - \alpha T - qR)\delta_{ij} + 2G_0 g(Э_u, T, R)(\varepsilon_{ij} - \varepsilon\delta_{ij})\end{gathered} \tag{1.6}$$

Следуя методу однородных линейных приближений [1], для $(n+1)$-го приближения имеем следующую постановку задачи линейной термоупругости

$$\begin{gathered}(K_0 + {}^1/_3 G_0)\theta_{,i}^{(n+1)} + G_0 \nabla^2 u_i^{(n+1)} + F_i - 3K_0(\alpha T + qR)_{,i} = \\ = 2G_0[g(Э_u^{(n)}, T, R)(\varepsilon_{ij}^{(n)} - \varepsilon^{(n)}\delta_{ij})]_{,j} - 3K_0[\varphi(T, R)(\varepsilon^{(n)} - \alpha T - qR)]_{,i} \quad \text{в } \Omega\end{gathered} \tag{1.7}$$

при граничных условиях

$$u_i^{(n+1)} = \psi_i \quad \text{на } S_u$$
$$\sigma_{ij}^{(e)\,(n+1)} l_j = T_{\nu i} - \sigma_{ij}^{(T)\,(n)} l_j \quad \text{на } S_\sigma \tag{1.8}$$

где все величины с индексом n вычислены по значениям $u_i^{(n)}$ из n-го приближения.

Метод однородных линейных приближений [1] состоит в следующем. В нулевом приближении полагается $g = \varphi = 0$, и уравнения (1.4), (1.5) приводятся к обычной линейной задаче терморадиационной упругости для однородного тела. Пусть ее решение есть $u_i^{(0)}(x_m)$. Вычисляем $\varepsilon_{ij}^{(0)}$, а затем $Э_u^{(0)}$. Если всюду в Ω оказывается $Э_u^{(0)} \leqslant \varepsilon_s$, где $\varepsilon_s = \varepsilon_s(T, R) = f_s(x_m)$ — предел упругих деформаций в рассматриваемой точке тела, то в соотношениях (1.3) надо полагать $g = g(T, R)$, и в дальнейшем имеем дело с задачей терморадиационной упругости для неоднородного тела. При этом $g(T, R)$ и $\varphi(T, R)$ являются заданными функциями координат. В этом случае, подставляя в правую часть (1.4) значения $\varepsilon_{ij}^{(0)}$ вместо ε_{ij} и вычисляя, согласно (1.6), $\sigma_{ij}^{(T)\,(0)}$ по значениям $\varepsilon_{ij}^{(0)}$, приходим в первом приближении вновь к линейной задаче терморадиационной упругости для однородного тела. Если же $Э_u^{(0)} > \varepsilon_s$ в некоторой подобласти $\Omega_s^{(0)}$, то $g^{(0)} = g(Э_u^{(0)}, T, R)$ в $\Omega_s^{(0)}$ и $g^{(0)} = g(T, R)$ вне $\Omega_s^{(0)}$. Используя значения $\varepsilon_{ij}^{(0)}$ и $g^{(0)}$ для вычисления правой части уравнения (1.4) и значений $\sigma_{ij}^{(T)}$ по (1.6), приходим к задаче линейной терморадиационной упругости для однородного тела с видоизмененными массовыми силами (или температурой) и поверхностными нагрузками.

2. Докажем сходимость метода последовательных приближений для первой и второй основных краевых задач аналогично тому, как это сделано в работе [3] для задач изотермической пластичности.

Рассмотрим пространство C_1 вектор-функций $\mathbf{v}(x)$, определенных в объеме $\bar{\Omega} = \Omega + S$, дважды непрерывно дифференцируемых и удовлетворяющих на поверхности S условию $\mathbf{v} = 0$. Зададим в этом пространстве скалярное произведение и норму формулами

$$(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})_{1\Omega} = \int_\Omega [(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) + (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})_0]\, d\Omega \tag{2.1}$$

$$\|\mathbf{v}\|_{1\Omega} = \sqrt{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})_{1\Omega}} \tag{2.2}$$

Здесь функции

$$(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) \equiv \frac{3}{4}(u_{i,j} + u_{j,i})(v_{i,j} + v_{j,i}) - \theta_u\theta_v$$

$$(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})_0 \equiv \frac{3K_0}{2G_0}\theta_u\theta_v \qquad (\theta_u = u_{i,i},\ \theta_v = v_{i,i})$$

сами удовлетворяют всем аксиомам скалярного произведения двух вектор-функций $\mathbf{u}$ и $\mathbf{u}$ в точке, кроме одной аксиомы: из условий

$$\|\mathbf{u}\|_0 \equiv \sqrt{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})} = 0, \qquad \|\mathbf{u}\|_0 \equiv \sqrt{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})_0} = 0$$

не следует $\mathbf{u} = 0$. Замыкая пространство C_1 в норме (2.2), получаем некоторое гильбертово пространство $H_{1\Omega}$.

Рассмотрим пространство C_2 вектор-функций $\mathbf{v}(x)$ $(x \equiv (x_1, x_2, x_3) \in \overline{\Omega})$, дважды непрерывно дифференцируемых и удовлетворяющих условиям

$$\int_\Omega \mathbf{v} d\Omega = 0, \qquad \int_\Omega [\mathbf{r} \times \mathbf{v}]\, d\Omega = 0 \tag{2.3}$$

Введем в C_2 скалярное произведение $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})_{2\Omega}$ и норму $\| \mathbf{v} \|_{2\Omega}$ формулами (2.1) и (2.2). Замыкая пространство C_2 в норме $\| \mathbf{v} \|_{2\Omega}$, получаем некоторое гильбертово пространство $H_{2\Omega}$.

Рассматривая (1.4) как уравнение для вектор-функции $\mathbf{u} = u_i \mathbf{x}_i$, умножим его скалярно на вектор-функцию $\mathbf{v}$ и проинтегрируем по объему. Тогда с учетом соответствующих граничных условий для первой краевой задачи, когда $S_u = S$, $S_\sigma = 0$ в (1.5), получим

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})_{1\Omega} = \frac{3}{2G_0} \int_\Omega F_i v_i d\Omega + \frac{9K_0}{2G_0} \int_\Omega [1 + \varphi(T, R)] (\alpha T + qR)\, \theta_v d\Omega +$$
$$+ \int_\Omega g(\mathcal{E}_{ij}, T, R)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\, d\Omega - \int_\Omega \varphi(T, R)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})_0\, d\Omega \tag{2.4}$$

Предполагается, что граничное условие первой краевой задачи сведено к однородному $\mathbf{u}|_s = 0$.

Для второй краевой задачи, когда $S_u = 0$, $S_\sigma = S$ в (1.5), получаем

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})_{2\Omega} = \frac{3}{2G_0} \int_\Omega F_i v_i d\Omega + \frac{3}{2G_0} \int_S T_{\nu i} v_i dS +$$
$$+ \frac{9K_0}{2G_0} \int_\Omega [1 + \varphi(T, R)] (\alpha T + qR)\, \theta_v d\Omega + \int_\Omega g(\mathcal{E}_u, T, R)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\, d\Omega -$$
$$- \int_\Omega \varphi(T, R)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})_0\, d\Omega \tag{2.5}$$

Здесь и далее имеется в виду интегрирование в смысле Лебега.

Обобщенным решением первой (второй) основной краевой задачи терморадиационной пластичности назовем вектор-функцию $\mathbf{u} \in H_{1\Omega}$ $(\mathbf{u} \in H_{2\Omega})$, удовлетворяющую интегральному соотношению (2.4) (соотношению (2.5)) для любой вектор-функции $\mathbf{v} \in H_{1\Omega}$ $(\mathbf{v} \in H_{2\Omega})$. Обобщенные решения задач удовлетворяют принципу возможных перемещений Лагранжа; кроме того, обобщенное решение является классическим, если оно дважды дифференцируемо.

Определим операторы A и B на пространствах $H_{1\Omega}$ и $H_{2\Omega}$ соответственно соотношениями

$$(A\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})_{1\Omega} = \Pi_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \qquad (\mathbf{v} \in H_{1\Omega}) \tag{2.6}$$

$$(B\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})_{2\Omega} = \Pi_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \qquad (\mathbf{v} \in H_{2\Omega}) \tag{2.7}$$

Здесь $\Pi_1(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, и $\Pi_2(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ — правые части соотношений (2.4) и (2.5) соответственно.

Если определяющие правые части этих равенств — линейные ограниченные функционалы относительно вектор-функций $\mathbf{v}$, то, согласно теореме Рисса, операторы A и B действуют в пространствах $H_{1\Omega}$ и $H_{2\Omega}$ соответственно.

В этом случае отыскание обобщенного решения первой краевой задачи сводится к операторному уравнению

$$A\mathbf{u} = \mathbf{u} \quad \text{в } H_{1\Omega} \tag{2.8}$$

второй краевой задачи — к уравнению

$$B\mathbf{u} = \mathbf{u} \quad \text{в } H_{2\Omega} \tag{2.9}$$

Естественно считать, что рекуррентные интегральные соотношения, полученные из (1.7) таким же образом, как (2.4), (2.5) из (1.4), с учетом соответствующих граничных условий определяют последовательности приближенных обобщенных решений соответствующих основных краевых задач. С учетом определений (2.6), (2.7) получаем, что эти рекуррентные соотношения для первой и второй краевой задачи соответственно имеют вид

$$\mathbf{u}^{(n+1)} = A\mathbf{u}^{(n)} \quad \text{в } H_{1\Omega} \tag{2.10}$$

$$\mathbf{u}^{(n+1)} = B\mathbf{u}^{(n)} \quad \text{в } H_{2\Omega} \tag{2.11}$$

3. Докажем следующие две теоремы.

Теорема 1. Пусть

1) $F_i(x) \in L_p(\Omega)$, $p \geqslant {}^6/_5$;

2) $T(x)$, $R(x) \in L_2(\Omega)$;

3) $g(Э_u, T, R)$ и $\varphi(T, R)$ как функции переменной $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ измеримы по Лебегу в Ω;

4) для любых T, R, $Э_{u1}$ и $Э_{u2}$ справедливы неравенства

$$\left| \frac{g(Э_{u1}, T, R)\, Э_{u1} \pm g(Э_{u2}, T, R)\, Э_{u2}}{Э_{u1} \pm Э_{u2}} \right| \leqslant \lambda < 1 \tag{3.1}$$

$$|\varphi(T, R)| \leqslant \beta < 1 \tag{3.2}$$

Тогда оператор A действует в пространстве $H_{1\Omega}$, решение уравнения (2.8) существует в $H_{1\Omega}$ и является пределом последовательности (2.10) при любом начальном приближении $u^{(0)} \in H_{1\Omega}$.

Теорема 2. Пусть

1) выполнены все условия теоремы 1;

2) $T_{\nu i}$ суммируемы на границе S со степенью $r > {}^4/_3$; S удовлетворяет условиям разрешимости второй краевой задачи теории упругости [4];

3) главный вектор и главный момент системы внешних сил равны нулю.

Тогда оператор B действует в $H_{2\Omega}$, решение уравнения (2.9) существует в $H_{2\Omega}$ и является пределом последовательности (2.11) при любом начальном приближении $u^{(0)} \in H_{2\Omega}$.

Доказательство теорем начнем проводить одновременно. Отметим, что третье условие теоремы 2 является необходимым, поскольку оно необходимо для существования решения второй краевой задачи в пространстве вектор-функций $\mathbf{v} \in H_{2\Omega}$, удовлетворяющих условиям (2.3), которые исключают перемещение тела как абсолютно твердого.

В работах [3, 5] показано, что первое условие теоремы 1 и второе условие теоремы 2 дают соответственно ограниченность функционалов

$$\int\limits_{\Omega} F_i v_i d\Omega \ \text{ в } H_{1\Omega} \text{ и } H_{2\Omega}, \quad \int\limits_{S} T_{\nu i} v_i dS \ \text{ в } H_{2\Omega}.$$

Ограниченность функционала

$$\Phi_u(\mathbf{v}) \equiv \int\limits_{\Omega} g(\vartheta_u,\ T,\ R)(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\, d\Omega - \int\limits_{\Omega} \varphi(T,\ R)(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})_0 d\Omega$$

в $H_{i\Omega}$ при любом фиксированном $\mathbf{u} \in H_{i\Omega}$ $(i = 1, 2)$ следует из измеримости и ограниченности функций g и φ.

Покажем ограниченность в пространствах $H_{1\Omega}$ и $H_{2\Omega}$ функционала, входящего в правые части соотношений (2.4) и (2.5) соответственно вторым и третьим слагаемым. Имеем

$$\left|\int\limits_{\Omega} [1+\varphi(T,\ R)]\,(\alpha T + qR)\,\theta_v d\Omega\right| \leqslant (1+\beta)\left(\int\limits_{\Omega} (\alpha T + qR)^2 d\Omega \int\limits_{\Omega} \theta_v^2 d\Omega\right)^{1/2} \leqslant C\,\|\mathbf{v}\|_{i\Omega}$$

$$(C = \text{const} > 0,\ i = 1,\ 2)$$

Существование интегралов следует из второго и третьего условий теоремы 1.

Таким образом, правые части соотношений (2.6), (2.7) — ограниченные линейные функционалы относительно вектор-функций $\mathbf{v} \in H_{i\Omega}$ $(i = 1, 2)$. Отсюда следует, что операторы A и B действуют в пространствах $H_{1\Omega}$ и $H_{2\Omega}$ соответственно.

Продолжение доказательства будем для простоты проводить для теоремы 1. Дальнейшее доказательство теоремы 2 проводится аналогично.

Введем в пространстве $H_{1\Omega}$ билинейные функционалы

$$(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})_\Omega = \int\limits_{\Omega} (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\, d\Omega, \qquad (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})_{0\Omega} = \int\limits_{\Omega} (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})_0 d\Omega \tag{3.3}$$

удовлетворяющие всем аксиомам скалярного произведения, кроме одной: из условий

$$\|\mathbf{u}\|_\Omega \equiv \sqrt{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})_\Omega} = 0 \quad \text{или } \|\mathbf{u}\|_{0\Omega} \equiv \sqrt{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})_{0\Omega}} = 0$$

не следует $\mathbf{u} = 0$ в $H_{1\Omega}$.

Очевидно, что

$$(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})_{1\Omega} = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})_\Omega + (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})_{0\Omega}, \qquad \|\mathbf{u}\|_{1\Omega} = \sqrt{\|\mathbf{u}\|_\Omega^2 + \|\mathbf{u}\|_{0\Omega}^2} \tag{3.4}$$

Рассмотрим подмножество $H_{1\Omega}^{\text{int}}$ пространства $H_{1\Omega}$, элементы $\mathbf{u}$ которого удовлетворяют условию $\|\mathbf{u}\|_{0\Omega} = 0$, т. е.

$$H_{1\Omega}^{\text{int}} = \{\mathbf{u} \in H_{1\Omega} : \|\mathbf{u}\|_{0\Omega} = 0\} \tag{3.5}$$

Последнее условие означает, что $\theta_u = 0$ почти всюду в Ω.

Можно показать, что $H_{1\Omega}^{\text{int}}$ является полным подпространством $H_{1\Omega}$, т. е. замкнутым линейным многообразием пространства $H_{1\Omega}$, причем первый билинейный функционал в (3.3) удовлетворяет в $H_{1\Omega}^{\text{int}}$ всем аксиомам скалярного произведения и совпадает со скалярным произведением (2.1), введенным во всем $H_{1\Omega}$.

Аналогично можно показать, что подмножество

$$H_{1\Omega}^{\text{div}} = \{\mathbf{u} \in H_{1\Omega} : \|\mathbf{u}\|_\Omega = 0\} \tag{3.6}$$

пространства $H_{1\Omega}$ также является полным подпространством и второй билинейный функционал в (3.3) является в нем скалярным произведением, совпадающим со скалярным произведением (2.1) пространства $H_{1\Omega}$.

Видно, что подпространства $H_{1\Omega}^{\text{int}}$ и $H_{1\Omega}^{\text{div}}$ ортогональны и являются максимальными подпространствами, в которых функционалы (3.3) соответственно представляют собой скалярные произведения. Отсюда можно показать, что прямая сумма $H_{1\Omega}^{\text{int}}$ и $H_{1\Omega}^{\text{div}}$ дает все пространство $H_{1\Omega}$, т. е. любая вектор-функция $\mathbf{u} \in H_{1\Omega}$ однозначно представима в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{u}'' \qquad (\mathbf{u}' \in H_{1\Omega}^{\text{int}},\ \mathbf{u}'' \in H_{1\Omega}^{\text{div}}) \tag{3.7}$$

Учитывая изложенное, можно представить соотношение (2.4) в виде

$$(\mathbf{u}'\cdot\mathbf{v}')_\Omega + (\mathbf{u}''\cdot\mathbf{v}'')_{0\Omega} = \frac{3}{2G_0}\int_\Omega F_i v_i d\Omega + \int_\Omega g(\mathcal{E}_u,\ T,\ R)(\mathbf{u}'\cdot\mathbf{v}')\,d\Omega - \int_\Omega \varphi(T,R)(\mathbf{u}''\cdot\mathbf{v}'')_0 d\Omega +$$
$$+ \frac{9K_0}{2G_0}\int_\Omega [1+\varphi(T,\ R)](\alpha T + qR)\ \theta_{v''} d\Omega \tag{3.8}$$

При искомом $\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{u}''$ соотношение (3.8) должно иметь место для любого $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}''$, т. е. для любой пары $\mathbf{v}' \in H_{1\Omega}^{\text{int}}$ и $\mathbf{v}'' \in H_{1\Omega}^{\text{div}}$.

Полагая $\mathbf{v}'' = 0$, получаем

$$(\mathbf{u}'\cdot\mathbf{v}')_\Omega = \int_\Omega g(\mathcal{E}_u,\ T,\ R)(\mathbf{u}'\cdot\mathbf{v}')\,d\Omega + \frac{3}{2G_0}\int_\Omega F_i v'_i d\Omega \tag{3.9}$$

для любого v'. Полагая $v' = 0$, получаем для любого v''

$$(\mathbf{u}''\cdot\mathbf{v}'')_{0\Omega} = -\int_\Omega \varphi(T,\ R)(\mathbf{u}''\cdot\mathbf{v}'')_0 d\Omega + \frac{3}{2G_0}\int_\Omega F_i v_i'' d\Omega +$$
$$+ \frac{9K_0}{2G_0}\int_\Omega [1+\varphi(T,\ R)](\alpha T + qR)\ \theta_{v''} d\Omega \tag{3.10}$$

Видно, что от соотношения (2.4) перешли к эквивалентной ему паре соотношений (3.9), (3.10), т. е. обобщенное решение первой краевой задачи терморадиационной пластичности существует тогда и только тогда, когда каждое из уравнений (3.9), (3.10) имеет решение в соответствующем из подпространств $H_{1\Omega}^{\text{int}}$ и $H_{1\Omega}^{\text{div}}$.

Аналогично от соотношения (2.6) можно перейти к паре соотношений для любого $\mathbf{v}'$ и любого $\mathbf{v}''$, определяющих операторы A' и A'' в подпространствах $H_{1\Omega}^{\text{int}}$ и $H_{1\Omega}^{\text{div}}$ соответственно

$$(A'\mathbf{u}'\cdot\mathbf{v}')_\Omega = \Pi_1'(\mathbf{u}',\mathbf{v}') \tag{3.11}$$

$$(A''\mathbf{u}''\cdot\mathbf{v}'')_{0\Omega} = \Pi_1''(\mathbf{u}'',\mathbf{v}'') \tag{3.12}$$

Здесь $\Pi_1'(\mathbf{u}',\ \mathbf{v}')$ и $\Pi_1''(\mathbf{u}'',\ \mathbf{v}'')$ — правые части соотношений (3.9) и (3.10) соответственно. Очевидно, что оператор A действует в пространстве $H_{1\Omega}$ тогда и только тогда, когда операторы A' и A'' действуют в подпространствах $H_{1\Omega}^{\text{int}}$ и $H_{1\Omega}^{\text{div}}$, причем $A'\mathbf{u}' + A''\mathbf{u}'' = A\mathbf{u}$.

В этом случае уравнение (2.8) в $H_{1\Omega}$ эквивалентно паре уравнений

$$A'\mathbf{u}' = \mathbf{u}' \quad \text{в } H_{1\Omega}^{\text{int}} \tag{3.13}$$

$$A''\mathbf{u}'' = \mathbf{u}'' \quad \text{в } H_{1\Omega}^{\text{div}} \tag{3.14}$$

а сходимость последовательности (2.10) в $H_{1\Omega}$ эквивалентна паре сходимостей последовательностей

$$\mathbf{u}'^{(n+1)} = A'\mathbf{u}'^{(n)} \quad \text{в } H_{1\Omega}^{\text{int}} \tag{3.15}$$

$$\mathbf{u}''^{(n+1)} = A''\mathbf{u}''^{(n)} \quad \text{в } H_{1\Omega}^{\text{div}} \tag{3.16}$$

Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать сходимость каждой из последовательностей (3.15), (3.16) в соответствующем подпространстве.

Видно, что уравнение (3.13) выражает задачу терморадиационной пластичности для несжимаемого материала, а (3.15) определяет последовательность приближенных обобщенных решений этой задачи. В работе [5] доказана сходимость метода упругих решений А. А. Ильюшина для несжимаемых материалов в случае использования так называемого приведенного модуля сдвига. В случае задачи терморадиационной пластичности для несжимаемого материала, используя условие (3.1), наложенное на функцию $g(Э_u, T, R)$, можно аналогичным образом доказать сходимость последовательности (3.15) к решению уравнения (3.13) в подпространстве $H_{1\Omega}^{\text{int}}$.

Сходимость последовательности (3.16) к решению уравнения (3.14) следует из сжимающего свойства оператора A'' в подпространстве $H_{1\Omega}^{\text{div}}$, т. е. из соотношения

$$\| A''\mathbf{u}_1'' - A''\mathbf{u}_2'' \|_{0\Omega} \leqslant \beta \| \mathbf{u}_1'' - \mathbf{u}_2'' \|_{0\Omega} \tag{3.17}$$

для любых $\mathbf{u}_1'', \mathbf{u}_2'' \in H_{1\Omega}^{\text{div}}$. Докажем это свойство, воспользовавшись ограничением (3.2), наложенным на функцию $\varphi(T, R)$.

Из (3.12) имеем

$$((A''\mathbf{u}_1'' - A\mathbf{u}_2'')\cdot\mathbf{v}'')_{0\Omega} \leqslant \left| \int_\Omega \varphi(T, R)\,((\mathbf{u}_1'' - \mathbf{u}_2'')\cdot\mathbf{v}'')_0\, d\Omega \right| \leqslant$$
$$\leqslant \beta \int_\Omega \|\mathbf{u}_1'' - \mathbf{u}_2''\|_0 \cdot \|\mathbf{v}''\|_0\, d\Omega \leqslant \beta \|\mathbf{u}_1'' - \mathbf{u}_2''\|_{0\Omega} \cdot \|\mathbf{v}''\|_{0\Omega}$$

Полагая $\mathbf{v}'' = A''\mathbf{u}_1'' - A''\mathbf{u}_2''$, приходим к соотношению (3.17).

Теорема 1, а по аналогии и теореме 2 доказаны.

Итак, в условиях этих теорем доказана сходимость метода однородных линейных приближений (метода однородно-упругих решений) применительно к первой и второй основным краевым задачам терморадиационной упругости и пластичности.

4. Рассмотрим ограничения (3.1) и (3.2), наложенные на изменение упругих или пластических свойств материала в процессе радиоактивного облучения и нагрева (охлаждения). Ограничение на функцию $g(Э_u, T, R)$ имеет место при условиях

$$3G_{\text{sup}} \geqslant \frac{\sigma_u(Э_{u1}, T, R) \pm \sigma_u(Э_{u2}, T, R)}{Э_{u1} \pm Э_{u2}} \geqslant a > 0$$
$$\sigma_u(0, T, R) = 0, \quad a = \text{const}, \quad G_{\text{sup}} = \text{const}, \quad G_{\text{sup}} < 2G_0 \tag{4.1}$$
$$\left(\lambda = \max\left\{\left|1 - \frac{G_{\text{sup}}}{G_0}\right|, \left|1 - \frac{a}{3G_0}\right|\right\}\right)$$

Эти условия означают, что в любой точке тела кривая зависимости $\sigma_u \sim Э_u$ исходит из начала координат и вместе с направляющим вектором всякой своей касательной лежит внутри острого угла, образованного двумя полупрямыми, исходящими из начала координат, с тангенсами $3G_{\text{sup}}$ и a углов наклона к оси абсцисс.

Условия (4.1) выполняются в широком диапазоне изменения T и R для обширного класса пластических и упруго-пластических материалов. Они справедливы, например, для упрочняющихся упруго-пластических тел с выпуклой кривой $\sigma_u \sim Э_u$, если $G_{\text{sup}} \equiv \sup_\Omega G(T, R) < 2G_0$.

В частном случае задачи терморадиационной упругости, когда $g(Э_u, T, R) \equiv g(T, R)$, условие (3.1) равносильно условию $|g(T, R)| \leqslant \leqslant \lambda < 1$, означает, что модуль сдвига в теле при радиоактивном облучении и нагреве (охлаждении) не должен изменяться более, чем на $\lambda \cdot 100\%$.

Ограничение (3.2), наложенное на функцию $\varphi(T, R)$, означает, что относительное изменение модуля всестороннего сжатия в теле при облучении и нагреве не должно превышать по абсолютной величине постоянную $\beta < 1$.

Условия (3.1), (3.2) являются лишь достаточными для сходимости метода однородно-упругих решений. Можно показать, что эти условия могут быть ослаблены в некоторых частных примерах.

Поступила 28 XII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Ленский В. С. Влияние радиоактивного облучения на механические свойства твердых тел. Инж. сб., 1960, т. 28.
2. Ломакин В. А. Превращение аустенита при произвольном режиме охлаждения. Изв. АН СССР. ОТН, 1958, № 2.
3. Ворович И. И., Красовский Ю. П. О методе упругих решений. Докл. АН СССР, 1959, т. 126, № 4.
4. Михлин С. Г. Проблема минимума квадратичного функционала. М.— Л., Гостехиздат, 1952.
5. Быков Д. Л., Шачнев В. А. Об одном обобщении метода упругих решений. ПММ, 1969, т. 33, № 2.