Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 539.374

О ВДАВЛИВАНИИ ТОНКОГО ЖЕСТКОГО ТЕЛА В ПЛАСТИЧЕСКУЮ СРЕДУ С УПРОЧНЕНИЕМ

В. В. Дуров, Д. Д. Ивлев

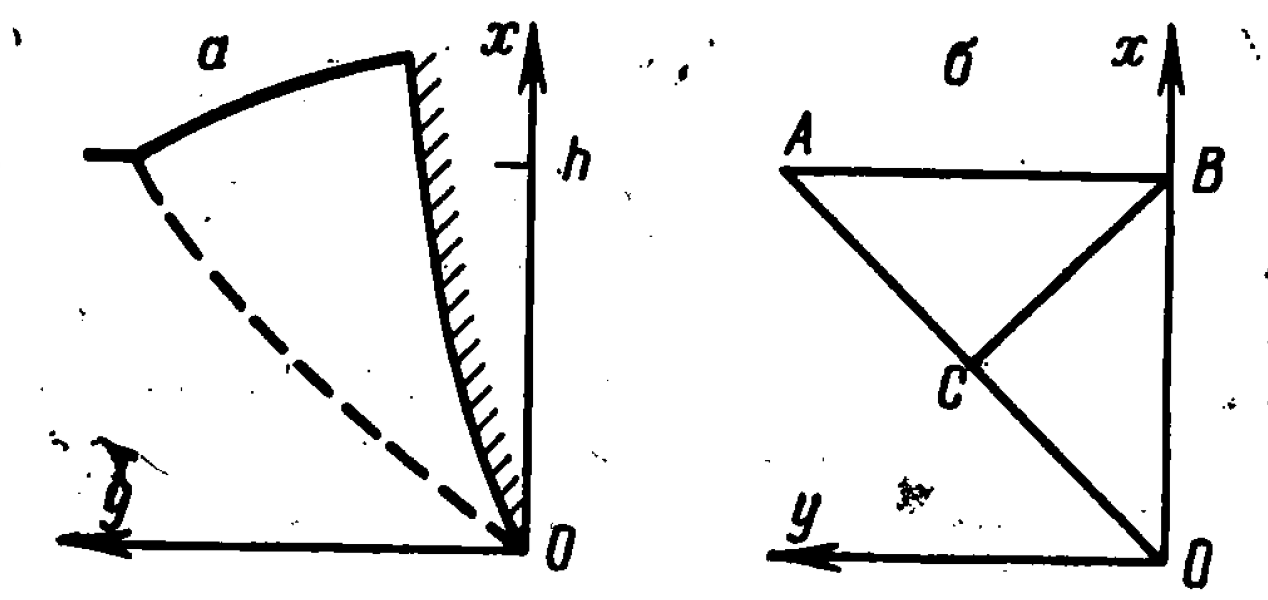
(Москва)

В линеаризованной постановке рассматривается задача о вдавливании твердого тонкого, хорошо смазанного лезвия в полупространство из упрочняющегося жесткопластического материала в условиях плоской деформации. Предполагается, что имеет место трансляционное упрочнение [1]. Задача оказывается кинематически определимой.

Направляя оси координат, как показано на фигуре, a, запишем уравнение поверхности лезвия в виде

$$y = \delta f(x) \tag{1}$$

где δ — малый безразмерный параметр, f — достаточно гладкая функция. В начальный момент материал занимает полупространство $x \leqslant 0$. Обращая движение, будем считать, что лезвие неподвижно, а среда смещается поступательно вверх по оси x с некоторой постоянной скоростью u°.



В результате вдавливания лезвия пластический материал выпучится, образуя некоторую поверхность, уравнение которой

$$x - h = \delta\varphi(y) \tag{2}$$

где h — глубина вдавливания (фиг. a).

Для решения задачи используем уравнения равновесия, условие пластичности и соотношения ассоциированного закона пластического течения

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial\tau}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} = 0 \qquad (\tau = \tau_{xy}) \tag{3}$$

$$[(\sigma_x - ce_x) - (\sigma_y - ce_y)]^2 + 4(\tau - ce_{xy})^2 = 4k^2 \quad (c,\ k = \text{const}) \tag{4}$$

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y = 0, \qquad \frac{2\varepsilon_x}{(\sigma_x - ce_x) - (\sigma_y - ce_y)} = \frac{\varepsilon_{xy}}{\tau - ce_{xy}} \tag{5}$$

Здесь e_x, e_y, e_{xy} — компоненты деформации, ε_x, ε_y, ε_{xy} — компоненты скорости деформаций. Краевые условия будут рассмотрены ниже.

Считая деформации малыми, имеем

$$\varepsilon_x = \frac{\partial e_x}{\partial t}, \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial e_y}{\partial t}, \qquad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial e_{xy}}{\partial t} \tag{6}$$

$$e_x = \frac{\partial s_x}{\partial x}, \qquad e_y = \frac{\partial s_y}{\partial y}, \qquad e_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_x}{\partial y} + \frac{\partial s_y}{\partial x}\right) \tag{7}$$

$$u = \frac{\partial s_x}{\partial t}, \qquad v = \frac{\partial s_y}{\partial t} \tag{8}$$

где s_x, s_y — составляющие вектора перемещения точек среды, u, v — составляющие скорости перемещения.

Рассмотрим линеаризацию по малому параметру δ

$$\sigma_x = \sigma_x^\circ + \delta\sigma_x', \ldots, v = v^\circ + \delta v' \tag{9}$$

Нулевое приближение соответствует невозмущенному состоянию, т. е. вдавливанию лезвия нулевой толщины ($\delta = 0$). При этом поверхность среды не деформируется ($x = h$).

Первое приближение (9) принимает вид

$$\begin{gathered}\sigma_x = \delta\sigma_x', \qquad \sigma_y = -2k + \delta\sigma_y', \qquad \tau = \delta\tau' \\ e_x = \delta e_x', \qquad e_y = \delta e'_y, \qquad e_{xy} = \delta e'_{xy} \\ u = u^\circ + \delta u', \qquad v = \delta v' \qquad (u^\circ = \mathrm{const} \neq 0)\end{gathered} \tag{10}$$

Линеаризуя (4), (5), получим

$$\sigma_x' - \sigma_y' = c\,(e_x' - e_y') \tag{11}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} = 0 \tag{12}$$

Рассмотрим кинематические граничные условия. Первое из них состоит в том, что на поверхности лезвия скорости направлены по касательной к лезвию, следовательно

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \tag{13}$$

$$\mathbf{v} = (u^\circ + \delta u')\,\mathbf{i} + \delta v' \mathbf{j}, \qquad \mathbf{n} = \delta \frac{\partial f(x)}{\partial x}\,\mathbf{i} - \mathbf{j}$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности лезвия. Из (13) с точностью до малых высшего порядка получаем

$$v' = u^\circ \frac{\partial f(x)}{\partial x} \quad \text{при } y = 0 \tag{14}$$

Граница пластического материала в нулевом приближении — прямая $x - y = 0$, а в первом приближении — линия

$$x - y + \delta\gamma = 0 \tag{15}$$

где γ — некоторая достаточно гладкая функция.

Единичный вектор нормали к границе с точностью до малых первого порядка имеет вид

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} - \mathbf{j}) \tag{16}$$

Так как движение обращено и лезвие неподвижно, на границе пластического материала нормальная скорость с точностью до малых второго порядка равна $u^\circ / \sqrt{2}$. Таким образом

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = \frac{u^\circ}{\sqrt{2}} \quad \text{при } x - y + \delta\gamma = 0 \tag{17}$$

Из (17), (16) и второго соотношения (13) получаем

$$u' - v' = 0 \quad \text{при } x - y = 0 \tag{18}$$

Решение уравнений (12) с краевыми условиями (14) и (18) имеет вид

$$u' = v' = u^\circ \frac{\partial f(x-y)}{\partial x} \tag{19}$$

т. е. поле скоростей таково, как если бы среда была идеально пластической [2].

Рассмотрим вектор перемещения точек среды

$$\mathbf{s} = s_x\mathbf{i} + s_y\mathbf{j}$$

Из (8), (10) и (19) следует

$$s_x = \int_0^t u\,dt = h + \delta f(x-y), \qquad s_y = \int_0^t v\,dt = \delta f(x-y) \tag{20}$$

Деформации, согласно (7), (20) и (10), будут

$$e_x' = -e_y' = \frac{\partial f(x-y)}{\partial x}, \qquad e_{xy}' = 0 \tag{21}$$

Соотношение (11) в силу (21) принимает вид

$$\sigma_x' - \sigma_y' = 2c\frac{\partial f(x-y)}{\partial x} \tag{22}$$

При вдавливании лезвия точки на поверхности среды получат смещения $s_x(h, y)$, $s_y(h, y)$, поэтому точка с координатами $s_x(h, y)$, $y + s_y(h, y)$ должна лежать на выпучившейся поверхности среды. Подставляя эти координаты в уравнение (2) и линеаризуя, получим

$$\varphi(y) = f(h-y), \qquad 0 \leqslant y \leqslant h \tag{23}$$

Таким образом, выпученная поверхность пластического материала совпадает по форме с поверхностью вдавливаемого лезвия.

Переходим к определению поля напряжений. Уравнения равновесия (3) в силу (10) и (22) принимают вид

$$\frac{\partial\sigma_x'}{\partial x} + \frac{\partial\tau'}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial\tau'}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_x'}{\partial y} + 2c\frac{\partial^2 f(x-y)}{\partial x^2} = 0 \tag{24}$$

Полагая в (24)

$$\sigma_x' = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad \tau' = -\frac{\partial U}{\partial x} \tag{25}$$

приходим к волновому уравнению, общее решение которого имеет вид

$$U = Q_1(x+y) - Q_2(x-y) + \frac{c}{2}(x+y)\frac{\partial f(x-y)}{\partial x} \tag{26}$$

где Q_1, Q_2 — произвольные функции.

Дифференцируя (26), согласно (25), будем иметь

$$\begin{gathered}
\sigma_x' = q_1(x+y) + q_2(x-y) + \frac{c}{2}\frac{\partial f(x-y)}{\partial x} - \frac{c}{2}(x+y)\frac{\partial^2 f(x-y)}{\partial x^2} \\
\tau' = -q_1(x+y) + q_2(x-y) - \frac{c}{2}\frac{\partial f(x-y)}{\partial x} - \frac{c}{2}(x+y)\frac{\partial^2 f(x-y)}{\partial x^2} \\
q_1(x+y) = \partial Q_1(x+y)/\partial x, \qquad q_2(x-y) = \partial Q_2(x-y)/\partial x
\end{gathered} \tag{27}$$

Функции q_1, q_2 определяются из граничных условий для напряжений, состоящих в том, что на поверхности гладкого лезвия отсутствуют касательные напряжения, а выпучившаяся поверхность материала свободна от напряжений.

Линеаризованные граничные условия, согласно [2], имеют вид

$$\begin{gathered}
\tau' = 2k\frac{\partial f(x)}{\partial x} \quad \text{при } y=0,\ 0 \leqslant x \leqslant h \\
\sigma_x' = 0, \qquad \tau' = -2k\frac{\partial f(h-y)}{\partial y} \quad \text{при } x=h,\ 0 \leqslant y \leqslant h
\end{gathered} \tag{28}$$

Используя граничные условия (28), из выражений (27) будем иметь

$$\begin{gathered}
-q_1(x) + q_2(x) = \frac{c}{2}\frac{\partial f(x)}{\partial x} + \frac{c}{2}x\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + 2k\frac{\partial f(x)}{\partial x}, \quad 0 \leqslant x \leqslant h \\
q_1(h+y) + q_2(h-y) = -\frac{c}{2}\frac{\partial f(h-y)}{\partial x} + \frac{c}{2}(h+y)\frac{\partial^2 f(h-y)}{\partial x^2} \\
-q_1(h+y) + q_2(h-y) = \frac{c}{2}\frac{\partial f(h-y)}{\partial x} + \frac{c}{2}(h+y)\frac{\partial^2 f(h-y)}{\partial x^2} + \\
+ 2k\frac{\partial f(h-y)}{\partial x}, \quad 0 \leqslant y \leqslant h
\end{gathered} \tag{29}$$

Введем обозначения

$$h - y = \xi, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant h \qquad h + y = \eta, \quad h \leqslant \eta \leqslant 2h$$

Тогда из двух последних соотношений (29) получим

$$q_2(\xi) = \frac{c}{2}(2h-\xi)\frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^2} + k\frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}, \qquad 0 \leqslant \xi \leqslant h \tag{30}$$

$$q_1(\eta) = -\left(k + \frac{c}{2}\right)\frac{\partial f(2h-\eta)}{\partial \eta}, \qquad h \leqslant \eta \leqslant 2h \tag{31}$$

Из (30) и первого соотношения (29) имеем

$$q_1(\xi) = c(h-\xi)\frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^2} - \left(k + \frac{c}{2}\right)\frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}, \qquad 0 \leqslant \varepsilon \leqslant h \tag{32}$$

Формулы (31) и (32), определяющие функцию q_1, запишем в виде

$$q_1(\eta) = \begin{cases} c(h-\eta)\dfrac{\partial^2 f(\eta)}{\partial \eta^2} - \left(k + \dfrac{c}{2}\right)\dfrac{\partial f(\eta)}{\partial \eta}, & 0 \leqslant \eta \leqslant h \\ -\left(k + \dfrac{c}{2}\right)\dfrac{\partial f(2h-\eta)}{\partial \eta}, & h \leqslant \eta \leqslant 2h \end{cases} \tag{33}$$

Согласно (33), пластическая зона состоит из двух областей, в которых напряжения имеют разные аналитические выражения.

Для области OBC (фигура, б) из (27), (30) и первого соотношения (33), (22) получим

$$\begin{aligned}
\sigma_x' &= c(h-x-y)\frac{\partial^2 f(x+y)}{\partial x^2} - \left(k+\frac{c}{2}\right)\frac{\partial f(x+y)}{\partial x} + \\
&+ \left(k+\frac{c}{2}\right)\frac{\partial f(x-y)}{\partial x} + c(h-x)\frac{\partial^2 f(x-y)}{\partial x^2} \\
\sigma_y' &= c(h-x-y)\frac{\partial^2 f(x+y)}{\partial x^2} - \left(k+\frac{c}{2}\right)\frac{\partial f(x+y)}{\partial x} + \\
&+ \left(k-\frac{3c}{2}\right)\frac{\partial f(x-y)}{\partial x} + c(h-x)\frac{\partial^2 f(x-y)}{\partial x^2} \\
\tau' &= -c(h-x-y)\frac{\partial^2 f(x+y)}{\partial x^2} + \left(k+\frac{c}{2}\right)\frac{\partial f(x+y)}{\partial x} + \\
&+ \left(k-\frac{c}{2}\right)\frac{\partial f(x-y)}{\partial x} + c(h-x)\frac{\partial^2 f(x-y)}{\partial x^2}
\end{aligned} \tag{34}$$

Для области ABC из (27), (30), второго соотношения (33), (22) найдем

$$\begin{aligned}
\sigma_x' &= -\left(k+\frac{c}{2}\right)\frac{\partial f(2h-x-y)}{\partial x} + \left(k+\frac{c}{2}\right)\frac{\partial f(x-y)}{\partial x} + c(h-x)\frac{\partial^2 f(x-y)}{\partial x^2} \\
\sigma_y' &= -\left(k+\frac{c}{2}\right)\frac{\partial f(2h-x-y)}{\partial x} + \left(k-\frac{3c}{2}\right)\frac{\partial f(x-y)}{\partial x} + c(h-x)\frac{\partial^2 f(x-y)}{\partial x^2} \\
\tau' &= \left(k+\frac{c}{2}\right)\frac{\partial f(2h-x-y)}{\partial x} + \left(k-\frac{c}{2}\right)\frac{\partial f(x-y)}{\partial x} + c(h-x)\frac{\partial^2 f(x-y)}{\partial x^2}
\end{aligned} \tag{35}$$

Уравнение прямой BC $x+y=h$. На этой прямой, как видно из (34) и (35), напряжения непрерывны.

Для идеально-пластической среды $c=0$ в формулах (34) и (35).

В рассмотренной задаче может быть учтено влияние инерционных сил [3].

Поступила 28 IX 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В. Теория пластичности, учитывающая микронапряжения. ПММ, 1958, т. 22, вып. 1.
2. Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М., «Наука», 1966.
3. Ивлев Д. Д. Вдавливание тонкого лезвия в пластическую среду. Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 10.