Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 539.31

МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ В ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОСТИ

В. Г. Громов

(Ростов-на-Дону)

Предлагается и обосновывается метод построения решения граничной задачи термовязкоупругости для неоднородной среды в виде ряда по степеням разрешающего оператора некоторой вспомогательной однородной вязкоупругой задачи.

Граничной задаче классической вязкоупругости Больцмана — Вольтерра в последнее время уделяется большое внимание [1–10]. Изучен вопрос о единственности решения [1, 2] и о существовании отдельных классов решений [3–5]. Аналитические методы построения решений рассматривались в работах [6–10] и др.

1. Постановка задачи. Полная система уравнений квазистатики вязкоупругого тела при заданном температурном поле имеет вид [11]

$$\sigma_{ij,j}+f_i=0, \qquad \sigma_{ij}=E^*_{ijkl}(\varepsilon_{kl}-\alpha_{kl}\theta), \qquad 2\varepsilon_{ij}=u_{i,j}+u_{j,i} \tag{1.1}$$

Здесь $\theta(x, t)$ — температурное поле, $f_i(x, t)$ — объемная плотность внешних сил, $u_i(x, t)$ — квазистатические смещения, $\varepsilon_{ij}(x, t)$ — тензор деформаций, $\sigma_{ij}(x, t)$ — тензор напряжений, α_{ij} — постоянный тензор анизотропного теплового расширения, $E_{ijkl}{}^*$ — тензор-оператор анизотропной термовязкоупругости, x — точка трехмерного евклидова пространства, t — время. Как обычно, по повторяющемуся индексу подразумевается суммирование от единицы до трех, а запятая перед индексом означает дифференцирование по соответствующей координате.

Пользуясь симметрией тензора-оператора

$$E^*_{ijkl}=E^*_{jikl}=E^*_{ijlk}=E^*_{klij}=E_{ijkl}-\int_0^t Э_{ijkl}(x,t,\tau)(\cdot)\,d\tau \tag{1.2}$$

уравнения (1.1) запишем в перемещениях

$$(E^*_{ijkl}u_{k,l})_{,j}+g_i=0, \qquad g_i=f_i-\alpha_{kl}(E^*_{ijkl}\theta)_{,j} \tag{1.3}$$

Пусть вязкоупругое тело занимает ограниченную область Ω. Смещения и усилия на поверхности тела S обозначены соответственно $\varphi_i(x, t)$, $\psi_i(x, t)$. Относительно квазистатических условий на границе S предполагаем, что они удовлетворяют условию самосопряженности

$$\varphi_i\psi_i=0, \qquad x\in S, \qquad 0\leqslant t<\infty$$

Выполнения этого условия в случаях первой, второй и третьей основных граничных задач можно добиться введением в области Ω достаточно гладких вспомогательных полей смещений и напряжений, снимающих заданные смещения и усилия на границе S либо ее частях [12–14].

В дальнейшем граничные условия будем считать однородными

$$u_i|_{S_1} = 0, \qquad \sigma_{ij}n_j|_{S_2} = 0, \qquad S_1 + S_2 = S \tag{1.4}$$

Здесь n_j — вектор внешней нормали к поверхности S. Задачу (1.3), (1.4) представим в векторной форме

$$V_t\mathbf{u} = \mathbf{g}, \quad x \in \Omega, \quad \mathbf{u} = 0, \quad x \in S_1, \quad \Sigma = 0, \quad x \in S_2$$
$$(V_t u)_i = -(E^*_{ijkl}u_{k,l})_{,j} \tag{1.5}$$

где V_t — оператор термовязкоупругости, $\Sigma_i = \sigma_{ij}n_j$ — вектор напряжений на поверхности S.

Пусть $\mathbf{h}(x, t)$ — достаточно гладкий вектор, удовлетворяющий условиям (1.5) на границе. Умножим обе части уравнения (1.5) на $\boldsymbol{h}$ и проинтегрируем по области Ω. Поскольку

$$\int_\Omega (\mathbf{q}\cdot V_t\mathbf{u})\,d\Omega = \int_\Omega h_{i,j}E^*_{ijkl}u_{k,l}\,d\Omega \tag{1.6}$$

получаем равенство

$$\int_\Omega h_{i,j}E^*_{ijkl}u_{k,l}d\Omega = \int_\Omega h_i g_i d\Omega \tag{1.7}$$

Тождество (1.6) определяет некоторое расширение оператора термовязкоупругости V_t. Поэтому обобщенным решением граничной задачи (1.5) будем называть всякий вектор $\mathbf{u}$, исчезающий по условиям (1.5) на поверхности S и тождественно удовлетворяющий соотношению (1.7) для любого вектора $\mathbf{h}$ из некоторого плотного множества.

2. Сведение к операторному уравнению. Рассмотрим множество векторов $M(Q_T)$, заданных в цилиндре $Q_T = \Omega \times [0, T]$, $0 \leqslant T < \infty$. Будем говорить, что множество $M(Q_T)$ — непрерывное продолжение в цилиндр Q_T функций $M(\Omega)$, заданных в области Ω, если для любого вектора $\mathbf{h}(x, t) \in M(Q_T)$ выполняются следующие условия: при всяком фиксированном $t_0 \in [0, T]$ $\mathbf{h}(x, t_0) \in M(\Omega)$ и $\mathbf{h}(x, t)$ непрерывны по t в смысле нормы на множестве $M(\Omega)$. Последнее позволяет ввести норму на множестве $M(Q_T)$

$$\|\mathbf{h}(x, t)\|_{M(Q_T)} = \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \|\mathbf{h}(x, t)\|_{M(\Omega)} \tag{2.1}$$

Существование нормы (2.1) вытекает из непрерывности нормы на $M(\Omega)$ как функции параметра t и теоремы Вейерштрасса о точной верхней грани для непрерывной функции. При таком построении множества $M(Q_T)$ на него переносятся все основные свойства (полнота, компактность, вложения) из множества $M(\Omega)$.

Пусть $L_p(Q_T)$ — непрерывное продолжение в цилиндр обычного пространства векторов $L_p(\Omega)$. Рассмотрим множество $M(Q_T)$ векторов, дважды дифференцируемых в области Ω и удовлетворяющих однородным граничным условиям (1.4). Множество $M(Q_T)$ плотно в $L_2(Q_T)$, так как содержит в себе всюду плотное в $L_2(Q_T)$ множество финитных бесконечно дифференцируемых в области Ω функций. Замыкание этого множества по норме, порожденной скалярным произведением

$$(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})_{H^\circ(Q_T)} = \sup_{0\leqslant t\leqslant T}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})_{H^\circ(\Omega)} = \sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int_\Omega u_{i,j}v_{i,j}d\Omega$$

определяет гильбертово пространство $H^\circ(Q_T)$. Из теорем вложения [15] следует, что $H^\circ(Q_T) \subset L_p(Q_T)$, причем для всякого элемента $\mathbf{u} \in H^\circ(Q_T)$

$$\|\mathbf{u}\|_{L_p(Q_T)} \leqslant c_p\|\mathbf{u}\|_{H^\circ(Q_T)} \qquad (1 < p \leqslant 6) \tag{2.2}$$

Постоянная c_p зависит также от области Ω.

Тензор-оператор E_{ijkl}^* считаем начально положительно определенным. Это означает, что для любого симметричного тензора γ_{ij} выполняется неравенство

$$E_{ijkl}\gamma_{ij}\gamma_{kl} > c\gamma_{ij}\gamma_{ij} \tag{2.3}$$

где положительная постоянная c не зависит от тензора E_{ijkl} и точки x.

Неравенство (2.3) позволяет ввести на множестве $M(Q_T)$ скалярное произведение

$$(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})_{H(Q_T)} = \sup_{0\leqslant t\leqslant T}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})_{H(\Omega)} = \sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int_\Omega E_{ijkl}u_{i,j}v_{k,l}d\Omega \tag{2.4}$$

которое в силу симметрии тензора E_{ijkl} является билинейной формой от энергии упругой деформации. Замыкание множества $M(Q_T)$ по норме порожденной скалярным произведением (2.4) приводит к гильбертову пространству $H(Q_T)$. Пространство $H(Q_T)$ эквивалентно пространству $H^\circ(Q_T)$ в том смысле, что они состоят из одних и тех же элементов и из сходимости в одном из них следует сходимость в другом. Следовательно, $H(Q_T) \subset L_p(Q_T)$.

В силу (2.2) и неравенства Корна [13] имеем

$$\|\mathbf{u}\|_{H^\circ(Q_T)} \leqslant c\|\mathbf{u}\|_{H(Q_T)}, \qquad \|\mathbf{u}\|_{L_p(Q_T)} \leqslant c_p\|\mathbf{u}\|_{H(Q_T)} \tag{2.5}$$

Конечно, постоянные в (2.5) и (2.2) разные.

Введем оператор A_t такой, что при фиксированном $t \in [0, T]$ для любых векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{h} \in H(Q_T)$ имеет место тождество

$$(\mathbf{h}\cdot A_t\mathbf{u})_{H(\Omega)} = \int_\Omega h_{i,j}\int_0^t Э_{ijkl}(x,t,\tau)\,u_{k,l}\,d\tau d\Omega \tag{2.6}$$

Тогда основное равенство (1.7) можно представить так:

$$(\mathbf{h}\cdot\mathbf{u})_{H(\Omega)} - \mu(\mathbf{h}\cdot A_t\mathbf{u})_{H(\Omega)} = (\mathbf{h}\cdot\mathbf{g}) \tag{2.7}$$

Здесь $(\mathbf{h}\cdot\mathbf{g})$ — обычное скалярное произведение векторов по области Ω, μ — параметр возмущения. При $\mu = 1$ получаем (1.7).

Для всякого фиксированного вектора $\mathbf{g} \in L_q(Q_T)$, $^6/_5 \leqslant q$ скалярное произведение $(\mathbf{h}\cdot\mathbf{g})$ определяет линейный функционал на $H(Q_T)$. Действительно, для любого вектора $\mathbf{h} \in H(Q_T)$ из неравенства Гельдера [15] и оценки (2.5) имеем

$$|(\mathbf{h}\cdot\mathbf{g})| \leqslant \|\mathbf{h}\|_{L_p(\Omega)} \|\mathbf{g}\|_{L_q(\Omega)} \leqslant c_p \|\mathbf{g}\|_{L_q(\Omega)} \|\mathbf{h}\|_{H(\Omega)} \leqslant c\|\mathbf{h}\|_{H(\Omega)} \tag{2.8}$$

т. е. при выбранных значениях q пространство $H(\Omega)$ вкладывается в $L_p(\Omega)$ $(1 < p \leqslant 6)$. В силу теоремы Рисса [16] существует единственный элемент $\mathbf{v} \in H(Q_T)$, такой, что

$$(\mathbf{h}\cdot\mathbf{g}) = (\mathbf{h}\cdot\mathbf{v})_{H(\Omega)} \tag{2.9}$$

Это дает возможность представить равенство (2.7) в виде

$$([\mathbf{u} - \mu A_t \mathbf{u} - \mathbf{v}]\cdot\mathbf{h})_{H(\Omega)} = 0$$

для любого $\mathbf{h} \in H(Q_T)$. Отсюда следует, что

$$\mathbf{u} - \mu A_t \mathbf{u} = \mathbf{v} \tag{2.10}$$

Правая часть операторного уравнения (2.10) является решением упругой задачи. В самом деле, полагая в (2.7) $\mu = 0$, получаем

$$(\mathbf{h}\cdot\mathbf{u})_{H(\Omega)} = (\mathbf{h}\cdot\mathbf{g}) \tag{2.11}$$

Из единственности представления (2.9) следует, что $\mathbf{v} = \mathbf{u}$. Но равенство (2.11) определяет [13] обратный оператор упругой задачи

$$\mathbf{u} = E^{-1}\mathbf{g}, \qquad (E\mathbf{u})_i = -E_{ijkl} u_{k,l} \tag{2.12}$$

Нетрудно проверить, что этот оператор — самосопряженный и ограниченный

$$\|E^{-1}\mathbf{g}\|_{H(Q_T)} \leqslant c_p \|\mathbf{g}\|_{L_q(Q_T)}, \qquad q \geqslant {}^6/_5 \tag{2.13}$$

В результате операторное уравнение (2.10) представляется в виде

$$\mathbf{u} - \mu A_t \mathbf{u} = E^{-1}\mathbf{g} \tag{2.14}$$

Дальнейшее сводится к изучению свойств этого уравнения.

3. Построение решения. Помимо условия (2.3) на тензор-оператор E_{ijkl}^* наложим дополнительное требование: для любых фиксированных значений $0 \leqslant t,\ \tau \leqslant T$ ядра $Э_{ijkl}(x, t, \tau) \in C(\Omega)$; кроме того

$$\|Э_{ijkl}(x, t', \tau') - Э_{ijkl}(x, t, \tau)\|_{C(\Omega)} \to 0, \quad t' \to t, \quad \tau' \to \tau \tag{3.1}$$

Здесь $C(\Omega)$ — пространство непрерывных функций.

Лемма 1. Оператор A_t действует в пространстве $H(Q_T)$, причем имеет место оценка

$$\|A_t \mathbf{u}\|_{H(\Omega)} \leqslant \int_0^t \Gamma(t, \tau) \|\mathbf{u}\|_{H(\Omega)}(\tau)\, d\tau \tag{3.2}$$

где $\Gamma(t, \tau)$ — непрерывная функция, связанная с тензором $Э_{ijkl}$ и областью Ω.

Доказательство. Оценим норму оператора A_t. Для этого выберем $\mathbf{h} = A_t\mathbf{u}$ и воспользуемся тождеством (2.6). Это дает

$$\|A_t \mathbf{u}\|^2_{H(\Omega)} = |((A_t\mathbf{u})_{i,j} \cdot \int_0^t Э_{ijkl}(x, t, \tau)\, u_{k,l}(x, \tau)\, d\tau)| \tag{3.3}$$

По неравенству Буняковского получаем

$$\| A_t \mathbf{u} \|^2_{H(\Omega)} \leqslant \| (A_t \mathbf{u})_{i,j} \|_{L_2(\Omega)} \| \int_0^t Э_{ijkl}(x, t, \tau) u_{k,l} \, d\tau \|_{L_2(\Omega)} \tag{3.4}$$

По определению норм и оценке (2.5) имеем

$$\| (A_t \mathbf{u})_{i,j} \|_{L_2(\Omega)} \leqslant \| A_t \mathbf{u} \|_{H^0(\Omega)} \leqslant c_1 \| A_t \mathbf{u} \|_{H(\Omega)} \quad (i, j = 1, 2, 3) \tag{3.5}$$

Оценивая второй сомножитель в (3.4) при помощи неравенства Минковского [15], находим

$$\| \int_0^t Э_{ijkl}(x, t, \tau) u_{k,l} \, d\tau \|_{L_2(\Omega)} \leqslant c \int_0^t K_{ij}(\tau, \tau) \| \mathbf{u} \|_{H(\Omega)}(\tau) \, d\tau \tag{3.6}$$

$$K_{ij}(t, \tau) = \sum_{k,l=1}^{3} \| Э_{ijkl}(x, t, \tau) \|_{C(\Omega)}$$

Используя неравенства (3.5), (3.6), из (3.4) находим оценку (3.2), где

$$\Gamma(t, \tau) = c \sum_{i,j=1}^{8} K_{ij}(t, \tau) \tag{3.7}$$

Теперь нетрудно доказать сильную непрерывность по t оператора A_t. Имеем

$$([A_{t'} \mathbf{u} - A_t \mathbf{u}] \cdot \mathbf{h})_{H(\Omega)} = \left(\frac{t'}{t} - 1 \right) (A_t \mathbf{n} \cdot \mathbf{h})_{H(\Omega)} + \frac{t'}{t} ((J_1 + J_2 + J_3) \mathbf{u} \cdot \mathbf{h})_{H(\Omega)} \tag{3.8}$$

Здесь введены обозначения для операторов

$$(J_1 \mathbf{u} \cdot \mathbf{h})_{H(\Omega)} = \int_\Omega h_{i,j} \int_0^t Э_{ijkl}(x, t, \tau) \left[U_{k,l} \left(x, \frac{t'}{t} \tau \right) - u_{k,t}(x, \tau) \right] d\tau \, d\Omega$$

$$(J_2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{h})_{H(\Omega)} - \int_\Omega h_{i,j} \int_0^t \left[Э_{ijkl} \left(x, t', \frac{t'}{t} \tau \right) - Э_{ijkl}(x, t, \tau) \right] u_{k,l}(x, \tau) \, dt \, d\Omega \tag{3.9}$$

$$(J_3 \mathbf{u} \cdot \mathbf{h})_{H(\Omega)} = \int_\Omega h_{i,j} \int_0^t \left[Э_{ijkl} \left(x, t', \frac{t'}{t} \tau \right) - Э_{ijkl}(x, t, \tau) \right] \times$$
$$\times \left[u_{k,l} \left(x, \frac{t'}{t} \tau \right) - u_{k,l}(x, \tau) \right] d\tau \, d\Omega$$

Соотношение (3.8) получается заменой переменной $\tau' = (t' / t)\tau$ в операторе A_t и тождественных пребразований.

При $t' \to t$ первое слагаемое в (3.8) стремится к нулю. Покажем, что то же будет иметь место и для остальных слагаемых.

Видно, что

$$(J_1 \mathbf{u} \cdot \mathbf{h})_{H(\Omega)} = \left(A_t \left[\mathbf{u} \left(x, \frac{t'}{t} \tau \right) - \mathbf{u}(x, \tau) \right] \cdot \mathbf{h} \right)_{H(\Omega)} \tag{3.10}$$

Используя неравенства Буняковского и затем (3.2), находим

$$| (J_1 \mathbf{u} \cdot \mathbf{h})_{H(\Omega)} | \leqslant \left\| A_t \left[\mathbf{u} \left(x, \frac{t'}{t} \tau \right) - \mathbf{u}(x, \tau) \right] \right\|_{H(\Omega)} \| \mathbf{h} \|_{H(\Omega)} \leqslant \tag{3.11}$$
$$\leqslant \| \mathbf{h} \|_{H(\Omega)} \int_0^t \Gamma(t, \tau) \left\| \mathbf{u} \left(x, \frac{t'}{t} \tau \right) - \mathbf{u}(x, \tau) \right\|_{H(\Omega)} d\tau \to 0, \qquad t' \to t$$

так как $\mathbf{u}(x, t) \in H(Q_T)$ по условию и $\| \mathbf{h} \|_{H|\Omega|}$ не зависит от t'.

Для оценки второго выражения (3.9) применяем неравенство Гельдера с показателями $p = q = 2$. Поступая далее так же, как при оценке (3.6), получаем

$$|(J_2\mathbf{u}\cdot\mathbf{h})_{H(\Omega)}^{\cdot}| \leqslant \|h_{i,j}\|_{L_2(\Omega)} \left\| \int_0^t \left[\mathrm{Э}_{ijkl}\left(x, t', \frac{t'}{t}\tau\right) - \mathrm{Э}_{ijkl}(x, t, \tau)\right] u_{k,l} d\tau \right\|_{L_2(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant \|\mathbf{h}\|_{H(\Omega)} \sum_{i,\,j=1}^{3} \int_0^t \left\| \mathrm{Э}_{ijkl}\left(x, t', \frac{t'}{t}\tau\right) - \mathrm{Э}_{ijkl}(x, t, \tau) \right\|_{C(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{H(\Omega)}(\tau)\, d\tau \to 0, \qquad t' \to t \tag{3.12}$$

так как имеет место условие (3.1). Из (3.11) и (3.12) следует, что тем более

$$|(J_3\mathbf{u}\cdot\mathbf{h})_{H(\Omega)}| \to 0, \qquad t' \to t \tag{3.13}$$

Лемма доказана.

Лемма 2. Оператор A_t является вольтерровым в пространстве $H(Q_T)$.

Доказательство. Из леммы 1 и критерия компактности Рисса [16] следует, что оператор A_t вполне непрерывен в $H(Q_T)$. Остается проверить [17], что резольвента $(\lambda I - A_t)$, $\lambda = \mu^{-1}$ существует для всех конечных значений параметра λ, кроме $\lambda = 0$. Имеем

$$(\lambda I - A_t)^{-1}\mathbf{h} = \lambda^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} A_t^n \mathbf{h} \tag{3.14}$$

Поскольку A_t действует в $H(Q_T)$, его степени также будут действовать в этом пространстве. Кроме того, справедлива оценка

$$\|A_t^n\mathbf{h}\|_{H(\Omega)} \leqslant \int_0^t \Gamma_{n-1}(t, \tau)\|\mathbf{h}\|_{H(\Omega)}\, d\tau, \qquad \mathbf{h} \in H(Q_T) \tag{3.15}$$

где $\Gamma_{n-1}(t, \tau)$ — $n-1$-я итерация ядра (3.7). Действительно, по индукции

$$\|A_t^{n+1}\mathbf{h}\|_{H(\Omega)} = \|A_t(A_t^n\mathbf{h})\|_{H(\Omega)} \leqslant \int_0^t \Gamma(t, \tau)\|A_\tau^n\mathbf{h}\|_{H(\Omega)}\, d\tau \leqslant \tag{3.16}$$

$$\leqslant \int_0^t \Gamma(t, \tau)\, d\tau \int_0^t \Gamma_{n-1}(\tau, \theta)\|\mathbf{h}\|_{H(\Omega)}\, d\theta = \int_0^t \|\mathbf{h}\|_{H(\Omega)}\, d\theta \int_\theta^t \Gamma(t, \tau)\, \Gamma_{n-1}(\tau, \theta)\, d\tau$$

Последний интеграл в (3.16) означает n-ю итерацию ядра $\Gamma(t, \tau)$.

Используя оценку (3.15), получаем

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} A_t^n \mathbf{h} \right\|_{H(\Omega)} \leqslant \left(I + \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|^{-n} \int_0^t \Gamma_{n-1}(t, \tau)(\cdot)\, d\tau\right\|\mathbf{h}\|_{H(\Omega)} \tag{3.17}$$

т. е. ряд для резольвенты сильно мажорируется рядом Неймана для обычного оператора Вольтерра, который, как известно, сходится при любом конечном значении параметра $\lambda^{-1} = \mu$. Лемма доказана.

Теорема 1. Если температурное поле $\theta(x, t) \in W_p^{(1)}(Q_T)$ $(p > 3)$, вектор сил $\mathbf{f}(x, t) \in L_q(Q_T)$ $(q \geqslant {}^6/_5)$, то существует единственное решение задачи термовязкоупругости $\mathbf{u}(x, t) \in H(Q_T)$, представимое рядом

$$\mathbf{u} = \sum_{n=0}^{\infty} A_t^n E^{-1}\mathbf{g} \tag{3.18}$$

Доказательство. Тензор-оператор E^*_{ijkl} — аналитическая функция температуры [11], поэтому его свойства по области Ω целиком определяются температурным полем (в случае только температурной неоднородности). По предположению, температурное поле дифференцируемо по Соболеву, причем производные суммируемы со степенью $p>3$. Из теорем вложения [15] следует, что в этом случае температура $\theta(x, t) \in C(Q_T)$ т. е. является непрерывной функцией. Следовательно, тензор-оператор E^*_{ijkl} удовлетворяет дополнительному требованию (3.1).

Далее, правая часть (1.3) $\mathbf{g}(x, t) \in L_q(Q_T)$ $(q \geqslant {}^6/_5)$. Действительно, $\mathbf{f}(x, t) \in L_q(Q_T)$ $(q \geqslant {}^6/_5)$ по условию. Остальные слагаемые содержат производные от температуры, которые суммируемы с более высокими степенями.

Таким образом, условия теоремы обеспечивают эквивалентность граничной задачи термовязкоупругости (1.5) (в ее обобщенной формулировке (1.7)) операторному уравнению (2.14), а также разрешимость последнего. Используя лемму 2, при $\mu = 1$ получаем ряд (3.18). Из неравенств (3.17) и (2.3) следует оценка для решения

$$\|\mathbf{u}\|_{H(Q_T)} \leqslant c_T' \|E^{-1}\mathbf{g}\|_{H(Q_T)} \tag{3.19}$$

где постоянная c_T' выражается через нормы в $C(Q_T)$ ядер $Э_{ijkl}$. В этом легко убедиться на основании равенств (3.6) и (3.9).

$$c_T' = \exp\,(T \sup_{0\leqslant t,\, \tau\leqslant T} \Gamma(t, \tau)) = \exp\,(cT_{ijkl} \max \| Э_{ijkl}(x, t, \tau)\|_{C(Q_T)}\,) \tag{3.20}$$

Используя ограниченность обратного оператора упругой задачи (2.13), получаем

$$\|\mathbf{u}\|_{H(Q_T)} \leqslant c_T \|\mathbf{g}\|_{L_q(Q_T)}, \qquad q \geqslant {}^6/_5 \tag{3.21}$$

Замечание. При рассмотрении второй граничной задачи следует иметь в виду, что исходное множество функций $M(Q_T)$ должно удовлетворять дополнительным кинематическим условиям

$$\int_\Omega \mathbf{u}\, d\Omega = 0, \qquad \int_\Omega [\mathbf{r} \times \mathbf{u}]\, d\Omega = 0 \tag{3.22}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки тела. Кроме того, относительно области Ω помимо обычного «условия конуса» следует сделать некоторые дополнительные предположения [13].

4. Об эффективности решения. Построение решения (3.18) основано на предварительном обращении оператора упругой задачи. Оценка (3.19), (3.20) показывает, что отклонение от упругого решения будет тем больше, чем больше время T и норма тензора $Э_{ijkl}$. Практически это означает, что приемлемая сходимость ряда (3.18) будет иметь место только при достаточно малой норме операторов A_t. Поэтому встает вопрос об эффективности решения.

Улучшения сходимости можно добиться путем видоизменения алгоритма построения решения. Тензор-оператор (1.2) представим в виде

$$E^*_{ijkl} = \overset{\circ}{E}_{ijkl} - \Delta^*_{ijkl} \tag{4.1}$$

$$\overset{\circ}{E}_{ijkl} = E_{ijkl} - \int_0^t \overset{\circ}{Э}_{ijkl}(t, \tau)(\cdot)\, d\tau, \quad \Delta^*_{ijkl} = \int_0^t [Э_{ijkl}(x, t, \tau) - \overset{\circ}{Э}_{ijkl}(t, \tau)]\,(\cdot)\, d\tau$$

Однородное ядро $\overset{\circ}{Э}_{ijkl}$ выбирается по удобству. В частности, таковым может оказаться осреднение

$$\overset{\circ}{Э}_{ijkl}(t, \tau) = \frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega} Э_{ijkl}(x, t, \tau)\, d\Omega$$

либо значение ядра $Э_{ijkl}$ в некоторой характерной точке области $\Omega + S$. Тогда оператор термовязкоупругости представляется в виде

$$V_t = V_t^{\circ} - \Delta_t \quad (V_t^{\circ}(\cdot))_i = \overset{\circ}{E}_{ijkl}(\cdot)_{k,lj}, \quad (\Delta_t(\cdot))_i = (\Delta^*_{ijkl}(\cdot)_{k,l})_{,j} \tag{4.2}$$

соответствующем выделению задачи однородной вязкоупругости. Расширение операторов V_t° и Δ_t на множество $H(Q_T)$ приводит к интегральным тождествам

$$(\mathbf{h}\cdot V_t^{\circ}\mathbf{u})_{H(\Omega)} = (\mathbf{h}\cdot[\mathbf{u} - A_t^{\circ}\mathbf{u}])_{H(\Omega)},$$

$$(\mathbf{h}\cdot A_t^{\circ}\mathbf{u})_{H(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} h_{i,j}\int\limits_0^t \overset{\circ}{Э}_{ijkl}(t, \tau)\, u_{k,l}\, d\tau d\Omega \tag{4.3}$$

$$(\mathbf{h}\cdot \Delta_t\mathbf{u})_{H(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} h_{i,j}\int\limits_0^t [Э_{ijkl}(x, t, \tau) - \overset{\circ}{Э}_{ijkl}(t, \tau)]\, u_{k,l}\, d\tau d\Omega$$

Подобно предыдущему (см. п. 2), задача термовязкоупругости сводится к операторному уравнению

$$\mathbf{u} - A_t^{\circ}\,\mathbf{u} - \Delta_t\mathbf{u} = E^{-1}\mathbf{g} \tag{4.4}$$

Оператор $I - A_t^{\circ}$ допускает обращение, так как является частным случаем оператора $I - A_t$. Поэтому уравнение (4.4) можно записать так:

$$\mathbf{u} - B_t\mathbf{u} = V_t^{\circ-1}\mathbf{g}$$

$$B_t = (I - A_t^{\circ})^{-1}\Delta_t, \qquad V_t^{\circ-1} = (I - A_t^{\circ})^{-1}E^{-1} \tag{4.5}$$

причем, $V_t^{\circ-1}$ — обратный оператор однородной вязкоупругой задачи. Опираясь на предыдущие результаты, убеждаемся, что оператор B_t действует в $H(Q_T)$ и является вольтерровым в этом пространстве.

Теорема 2. В условиях теоремы 1 решение задачи термовязкоупругости представим в виде

$$\mathbf{u} = \sum_{n=0}^{\infty} B_t^n V_t^{\circ-1}\mathbf{g} \tag{4.6}$$

Улучшенная сходимость ряда (4.6) по сравнению с (3.18) связана с тем, что подходящим выбором тензора $\overset{\circ}{Э}_{ijkl}$ норма оператора B_t может быть сделана достаточно малой, в особенности, когда тензор $Э_{ijkl}$ слабо неоднороден

$$\|B_t\| \leqslant \|\Delta_t\| \|(I - A_t^{\circ})^{-1}\| \leqslant c_T \max_{ijkl}\|Э_{ijkl}(x, t, \tau) - \overset{\circ}{Э}_{ijkl}(t, \tau)\|_{C(Q_T)} \times$$

$$\times \exp\big(cT \max_{ijkl} \sup_{0\leqslant t,\, \tau\leqslant T} |\overset{\circ}{Э}_{ijkl}(t, \tau)|\big) \tag{4.7}$$

При получении (4.7) использованы оценки, аналогичные (3.2) и (3.19) для операторов Δ_t и $V_t^{\circ-1}$.

Итак, процедура построения решения граничной задачи термовязкоупругости сводится к решению некоторой однородной задачи вязкоупругости с последующим вычислением поправок на неоднородность. Эффективность метода в большой мере будет зависеть от выбранной однородной задачи. Само же решение однородной задачи во многих случаях можно построить элементарно, опираясь на хорошо разработанную алгебру операторов Вольтерра или методы операционного исчисления.

Поступила 20 X 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Predeleanu M. On the unity of the solution of a system of equations of kind of substances having linear rheological properties.— C. r. Acad. Sci., 1963, vol. 256, No. 1.
2. Oden F., Tadybakhsh J. Uniqueness in the linear theory of viscoelasticity. Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1965, vol. 18, No. 3.
3. Hlaváček I., Predeleanu M. Sur l'existence de la solution dans la théorie du fluage linéaire. I. Premier probléme aux limites. Aplikace Mathematiky, 1964, t. 9. No. 5.
4. Babůska J., Hlaváček J. On the existence and uniqueness of solution in the theory of viscoelasticity. Arch. Mech. stosowanej, 1966, t. 18, No. 1.
5. Edelstein W. Exisfence of solutions to the displacement problem for quasistatie viscoelastieity. Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1966, vol. 22, No. 2.
6. Hunter S. C. The solution of boundary value problems in linear viscoelasticity. In: Mechanics and Chemistry of Solid Propellants. N. Y., Pergamon Press, 1967.
7. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966.
8. Розовский М. И. Интегрально-операторный метод в наследственной теории ползучести. Докл. АН СССР, 1965, т. 160, № 4.
9. Громов В. Г. К вопросу о решении граничных задач линейной вязкоупругости. Механика полимеров, 1967, № 6.
10. Громов В. Г. Алгебра операторов Вольтерра и ее применение в задачах вязкоупругости. Докл. АН СССР, 1968, т. 182, № 1.
11. Ильюшин А. А., Победря Б. Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М., «Наука», 1970.
12. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1964.
13. Михлин Г. С. Проблема минимума квадратичного функционала. М.— Л., Гостехиздат, 1952.
14. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., «Мир», 1971.
15. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд-во ЛГУ, 1950.
16. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. М., «Наука», 1965.
17. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения, М., «Наука», 1967.