Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 539.31

СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД, СВЯЗАННЫЕ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ ХАНКЕЛЯ И МЕЛЕРА — ФОКА

В. М. Александров, М. И. Чебаков

(Ростов-на-Дону)

На основании интегральных преобразований Ханкеля и Мелера — Фока рассматриваются некоторые типы парных интегральных уравнений и соответствующие им типы интегральных уравнений второго рода, возникающие при изучении ряда смешанных задач механики сплошных сред. Путем обобщения асимптотических методов работ [1, 2] получены эффективные приближенные решения. В качестве примера исследована задача о кручении штампом усеченного шара, защемленного по сферической границе.

1. Задачи, связанные с преобразованием Ханкеля. Рассмотрим парное интегральное уравнение

$$\int_0^\infty T(\gamma) J_n(\gamma r) L(\lambda\gamma) d\gamma = f(r) \qquad (0 \leqslant r \leqslant 1)$$

$$\int_0^\infty T(\gamma) J_n(\gamma r) \gamma d\gamma = 0 \qquad (r > 1) \tag{1.1}$$

Здесь $0 < \lambda < \infty$ — безразмерный параметр, $J_n(x)$ — функции Бесселя, непрерывная функция $L(u) > 0$ при $u > 0$ и такова, что

$$L(u) = Bu(1 + O(u^2)) \qquad (u \to 0, \ B = \text{const}) \tag{1.2}$$

$$L(u) = 1 - \sum_{i=1}^m c_i u^{-2i} + O(u^{-2(m+1)}) \qquad (u \to \infty)$$

Пусть $n = 1$. Умножим первое соотношение (1.1) на $(t^2 - r^2)^{-1/2}$ и проинтегрируем по r от нуля до t, а второе умножим на $(r^2 - t^2)^{-1/2}$ и проинтегрируем по r и t до бесконечности. Изменяя порядок интегрирования, используя интегралы

$$\int_0^t \frac{J_1(\gamma r)\, dr}{\sqrt{t^2 - r^2}} = \frac{1 - \cos\gamma t}{\gamma t}, \qquad \int_t^\infty \frac{J_1(\gamma r)\, dr}{\sqrt{r^2 - t^2}} = \frac{\sin\gamma t}{\gamma t} \tag{1.3}$$

и дифференцируя затем первое уравнение о t, пол чим

$$\varphi(t) = \int_0^\infty T(\gamma)[1 - L(\lambda\gamma)] \sin\gamma t\, d\gamma = g'(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1) \tag{1.4}$$

$$\varphi(t) = 0 \qquad (t > 1)$$

$$g(t) = \int_0^t \frac{f(r)\, dr}{\sqrt{t^2 - r^2}}, \qquad \varphi(t) = \int_0^\infty T(\gamma) \sin\gamma t\, d\gamma \tag{1.5}$$

С учетом второго равенства (1.4)

$$T(\gamma) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \varphi(\tau)\sin\gamma\tau\, d\tau \tag{1.6}$$

Подставляя (1.6) в первое равенство (1.4), приходим к интегральному уравнению второго рода относительно $\varphi(t)$

$$\varphi(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \varphi(\tau)\,d\tau \int_0^\infty [1 - L(\lambda\gamma)]\sin\gamma t \sin\gamma\tau\, d\gamma + g'(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1) \tag{1.7}$$

Считая функции $\varphi(t)$ и $g'(t)$ нечетными, приходим к уравнению

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi\lambda}\int_{-1}^1 \varphi(\tau) M\left(\frac{t-\tau}{\lambda}\right) d\tau + g'(t) \qquad (|t| \leqslant 1) \tag{1.8}$$

$$M(y) = \int_0^\infty [1 - L(u)]\cos uy\, du \tag{1.9}$$

Возможна и другая форма записи (1.8), (1.9)

$$\int_{-1}^1 \varphi(\tau) K\left(\frac{t-\tau}{\lambda}\right) d\tau = \pi\lambda g'(t) \qquad (|t| \leqslant 1) \tag{1.10}$$

$$K(y) = \int_0^\infty L(u)\cos uy\, du \tag{1.11}$$

В конкретных задачах часто используется величина

$$\tau(r) = \int_0^\infty T(\gamma) J_1(\gamma r)\gamma\, d\gamma \tag{1.12}$$

которая через $\varphi(t)$ выражается следующим образом:

$$\tau(r) = -\frac{2}{\pi}\frac{d}{dr}\int_r^1 \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\sqrt{\tau^2 - r^2}} \qquad (0 \leqslant r \leqslant 1) \tag{1.13}$$

Для случая $n = 0$ аналогичным образом можно прийти к уравнениям (1.), (1.9) или (1.10), (1.11). Здесь следует учесть, что функции $\varphi(t)$ и $g'(t)$ нужно продолжить в область $-1 \leqslant t < 0$ четным образом и

$$\tau(r) = -\frac{2}{\pi}\frac{d}{dr} r\int_r^1 \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\sqrt{\tau^2 - r^2}}, \qquad g(t) = \int_0^t \frac{rf(r)\,dr}{\sqrt{t^2 - r^2}} \tag{1.14}$$

При $n \geqslant 2$ уравнение (1.1) также может быть приведено [3] к уравнению типа (1.8), (1.9).

1°. Пусть параметр λ велик, при этом переменная y в (1.9) мала и может быть получено разложение

$$M(y) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i |y|^i, \qquad b_{2n+1} = \frac{(-1)^{n+1}\pi}{2(2n+1)!} c_{n+1} \tag{1.15}$$

$$b_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_0^\infty \left[1 - L(u) - \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{u^{2i}}\right] u^{2n}\, du$$

Подставляя (1.15) в (1.8) и разыскивая решение в виде

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(t) \lambda^{-k} \tag{1.16}$$

получим для $\varphi_k(t)$ следующее рекуррентное соотношение: $\varphi_0(t) = g'(t)$

$$\varphi_k(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{i=0}^{k-1} b_{k-i-1} \int_{-1}^{1} \varphi_i(\tau) |t - \tau|^{k-i+1}\, d\tau \tag{1.17}$$

2°. Приведем другой способ решения (1.8) при достаточно больших λ. Для этого разложим ядро $M(y)$ в двойной ряд по полиномам Лежандра

$$M\left(\frac{\tau - t}{\lambda}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij}(\lambda) P_i(\tau) P_j(t)$$

$$c_{nm} = (-1)^{n+m} (2n+1)(2m+1) \frac{\pi\lambda}{2} \int_0^\infty [1 - L(u)] \times$$

$$\times J_{1/2+n}\left(\frac{u}{\lambda}\right) J_{1/2+m}\left(\frac{u}{\lambda}\right) \frac{du}{u} \tag{1.18}$$

Подставляя (1.18) в (1.8) и разыскивая для случая четной функции $g'(t)$ решение в виде

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} S_k P_{2k}(t) \tag{1.19}$$

получим относительно неизвестных коэффициентов S_k следующую бесконечную систему:

$$S_i = \frac{2}{\pi\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} S_k c_{2i,\,2k}(\lambda)\ (4k+1)^{-1} + G_i \quad (i = 0, 1, \ldots) \tag{1.20}$$

Здесь G_i — коэффициенты разложения функции $g'(t)$ в ряд вида (1.19). Аналогичным образом может быть получена бесконечная система в случае нечетной функции $g'(t)$.

3°. Пусть параметр λ мал. Функцию $L(u)$ со свойствами (1.2) аппроксимируем выражением

$$L^*(u) = \frac{u}{\sqrt{u^2+1}} \frac{Q_1(u)}{Q_2(u)} \tag{1.21}$$

где $Q_1(u)$ и $Q_2(u)$ — четные полиномы одинаковой степени. Далее подробно рассмотрим простейший случай, когда $Q_1 = Q_2 = 1$. Приближенное решение уравнения (1.10), (1.11) для случая $g'(t) \equiv 1$ получим по формуле

$$\varphi(t) = \lim q_\varepsilon(t, s) \qquad \begin{pmatrix} \varepsilon \to 0 \\ s = 1 \end{pmatrix} \tag{1.22}$$

где функция $q_\varepsilon(t, s)$ находится из интегрального уравнения

$$\int_{-s}^{s} q_\varepsilon(\tau, s)\, d\tau \int_0^\infty \frac{\sqrt{u^2+\varepsilon^2}}{\sqrt{u^2+1}} \cos\left(\frac{\tau - t}{\lambda} u\right) du = \pi\lambda \qquad (|t| \leqslant s \leqslant 1) \tag{1.23}$$

Будем искать главный член асимптотики при малых λ решения уравнения (1.23) в виде

$$q_\varepsilon{}^\circ(t, s) = \mu\omega\left(\frac{s+t}{\lambda}\right)\omega\left(\frac{s-t}{\lambda}\right)v^{-1}\left(\frac{t}{\lambda}\right) \tag{1.24}$$

где $\omega(\tau)$ и $v(\tau)$ — решения уравнений

$$\int_0^\infty \omega(\tau)\, d\tau \int_{-\infty}^\infty \frac{\sqrt{u^2+\varepsilon^2}}{\sqrt{u^2+1}} e^{-i(t-\tau)u} du = 2\pi \qquad (0 \leqslant t < \infty) \tag{1.25}$$

$$\int_{-\infty}^\infty v(\tau)\, d\tau \int_{-\infty}^\infty \frac{\sqrt{u^2+\varepsilon^2}}{\sqrt{u^2+1}} e^{-i(t-\tau)u} du = 2\pi \qquad (|t| < \infty) \tag{1.26}$$

Опуская выкладки, приведем результат

$$\omega(t) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left[\exp\left(-\frac{\varepsilon+1}{2}t\right)I_0\left(\frac{1-\varepsilon}{2}t\right) + \right. \tag{1.27}$$

$$\left. + \int_0^t \exp\left(-\frac{\varepsilon+1}{2}\tau\right)I_0\left(\frac{\varepsilon-1}{2}\tau\right)d\tau\right], \qquad v(t) = \frac{1}{\varepsilon}$$

Здесь $I_0(x)$ — функция Бесселя от мнимого аргумента.

Теперь в соответствии с (1.22) и (1.24) получим

$$\varphi_0(t) = q_0(t, 1) \qquad q_0(t, s) = \mu F\left(\frac{s+t}{\lambda}\right)F\left(\frac{s-t}{\lambda}\right) \tag{1.28}$$

$$F(x) = \Phi(-{}^1/_2,\ 1;\ -x)$$

где $\Phi(\alpha, \beta;\ x)$ — вырожденная гипергеометрическая функция.

Подставляя (1.28) в уравнение (1.10), (1.21) при $g'(t) \equiv 1$, $Q_1 = Q_2 \equiv 1$ и переходя к пределу при $\lambda \to 0$, получим, что $\mu = \pi / 4$. Теперь по формулам (1.28) найдем

$$\varphi_0(0) = \left(\frac{1}{\lambda} + 1 + O(\lambda)\right), \qquad \varphi_0(1) = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}(1 + O(\lambda)) \tag{1.29}$$

К таким же формулам можно прийти, используя результаты работы [4]. Это еще раз подтверждает, что соотношения (1.28) дают главный член асимптотики решения задачи для малых λ.

4°. Если главный член асимптотики искать по-прежнему по формулам (1.22), (1.24), а функции $\omega(t)$ и $v(t)$ определять из уравнений

$$\int_0^\infty \omega(\tau)\,d\tau \int_{-\infty}^\infty \frac{|u|}{\sqrt{u^2+1}} e^{-i(t-\tau)u}\,du = 2\pi e^{-\varepsilon t} \qquad (0 \leqslant t < \infty)$$

$$\int_{-\infty}^\infty v(\tau)\,d\tau \int_{-\infty}^\infty \frac{|u|}{\sqrt{u^2+1}} e^{-i(t-\tau)u}\,du = 2\pi e^{-\varepsilon t} \qquad (|t| < \infty) \tag{1.30}$$

то придем к формулам (1.28). Действительно

$$\omega(t) = \frac{\sqrt{\varepsilon+1}}{\sqrt{\pi\varepsilon(1-\varepsilon)}}\left(\frac{d}{dt} l(t,\varepsilon) + l(t,\varepsilon)\right), \qquad v(t) = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon} e^{-\varepsilon t}$$

$$l(t,\varepsilon) = \int_0^t \frac{e^{-\varepsilon\tau}}{\sqrt{t-\tau}} \operatorname{erf}\sqrt{(1-\varepsilon)\tau}\,d\tau \tag{1.31}$$

Здесь $\operatorname{erf} x$ — интеграл вероятности. При выводе формул (1.31) были использованы соотношения[1]

$$|u| = -[\sqrt{u}]^+[\sqrt{u}]^-$$

$$[\sqrt{u}]^+ = \begin{cases} \sqrt{u} & (u \geqslant 0) \\ i\sqrt{u} & (u < 0) \end{cases}, \qquad [\sqrt{u}]^- = \begin{cases} -\sqrt{u} & (u \geqslant 0) \\ i|\sqrt{u}| & (u < 0) \end{cases} \tag{1.32}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-iut}\,du}{\sqrt{u+i}\,(u+i\varepsilon)\,[\sqrt{u}]^+} = \begin{cases} -\sqrt{2}(1-\varepsilon)^{-1/2}\, l(t,\varepsilon) & (t \geqslant 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

5°. Если правая часть уравнения (1.10) отлична от постоянной, то асимптотическое решение при малых λ может быть получено с использованием результата (1.28) по формуле М. Г. Крейна [5].

Пусть $g'(t) = At$, $A = \text{const}$. Тогда

$$\varphi_0(t) = -\frac{A}{2}\frac{d}{dt}\int_{|t|}^1 \frac{q_0(t,\xi)}{q_0^2(\xi,\xi)}\left(\int_{-\xi}^{\xi} q_0(\tau,\xi)\,d\tau\right)d\xi \tag{1.33}$$

Используя интеграл

$$\int_{-\xi}^{\xi} q_0(\tau,\xi)\,d\tau = \frac{\pi}{2}\left(\xi + \frac{\xi^2}{\lambda}\right) \tag{1.34}$$

и асимптотически упростив (1.33), получим

$$\varphi_0(t) = A\left[F\left(\frac{2t}{\lambda}\right)\right]^{-1}\left(t + \frac{t^2}{\lambda}\right) + \frac{At}{2\lambda}(1-t^2)^{1/2}(1 + O(\lambda)) \tag{1.35}$$

Если $g'(t) = At^2$, $A = \text{const}$, то аналогичным образом можно прийти к результатам

$$\varphi_0(0) = \frac{A}{6\lambda}(1 + O(\lambda)), \qquad \varphi_0(1) = \frac{A}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}(1 + O(\lambda)) \tag{1.36}$$

[1] Формулы (1.32) взяты из докторской диссертации Ю. И. Черского, г. Тбилиси, 1962 г.

6°. Приведем некоторые результаты расчетов, позволяющих утверждать, что изложенные схемы приближенного решения обеспечивают полное и эффективное исследование той или иной задачи при всех значениях параметра λ.

Для простоты рассмотрим случай, когда $g'(t) \equiv 1$ и $L(u) = u(u^2+1)^{-1/2}$. При этом постоянные c_i в (1.2) и b_i в (1.15) имеют вид

$$c_i = (-1)^{i-1}\frac{(2i-1)!!}{(2i)!!} \tag{1.37}$$

$$b_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!\,2^{2n}}\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i(2n+1)!}{i!\,(2n-2i+1)(2n-i+1)!}$$

$$b_{2n+1} = -\frac{\pi}{[(2n)!!]^2(4n+4)} \tag{1.38}$$

В соответствии с (1.17) для больших λ найдем

$$\begin{gathered}\varphi_0(t) = 1, \qquad \varphi_1(t) = 2/\pi; \qquad \varphi_2(t) = \eta_1 t^2 + \eta_2\\ \varphi_3(t) = \eta_3 t^2 + \eta_4, \qquad \varphi_4(t) = \eta_5 t^4 + \eta_6 t^2 + \eta_7\\ \varphi_5(t) = \eta_8 t^4 + \eta_9 t^2 + \eta_{10}\end{gathered} \tag{1.39}$$

$$\begin{array}{lll}\eta_1 = -0.2500 & \eta_5 = -0.004987 & \eta_8 = 0.001989\\ \eta_2 = 0.1553 & \eta_6 = 0.002520 & \eta_9 = -0.02945\\ \eta_3 = 0.05305 & \eta_7 = 0.005968 & \eta_{10} = 0.0009780\\ \eta_4 = -0.04261 & & \end{array}$$

Три первых коэффициента (1.18) имеют вид

$$c_{00} = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2/\lambda)^{2k}}{[(2k+1)!!]^2(2k+2)} - \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1/\lambda)^{2k-1}}{(k!)^2(2k+1)} \tag{1.40}$$

$$c_{02} = c_{20} = 4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2/\lambda)^{2k}[30-15(2k+4)+2.5(2k+3)(2k+4)]}{[(2k+1)!!]^2(2k+2)(2k+3)(2k+4)} -$$

$$-\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1/\lambda)^{2k-1}[30-15(2k+3)+2.5(2k+2)(2k+3)]}{(k!)^2(2k+1)(2k+2)(2k+3)}$$

Систему (1.13) решаем методом редукции, полагая $i + k \leqslant 1$. Имеем соответственно

$\lambda = 0.4$	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	
$S_0 = 2.80$	2.18	1.87	1.69	1.57	1.48	(1.41)
$-S_1 = 0.514$	0.293	0.187	0.129	0.0937	0.0712	

В табл. 1 даны значения

$$\varphi(0), \qquad \varphi(1), \qquad P = \int_{-1}^{1}\varphi(t)\,dt \tag{1.42}$$

подсчитанные по формулам (1.39) (2—4 строки), по формулам (1.19), (1.41) (5—7 строки) и по формулам (1.28), (1.34) (8—10 строки).

2. Задачи, связанные с преобразованием Мелера — Фока. Рассмотрим парное интегральное уравнение

$$\int_0^\infty T(\gamma)\,P^n_{-1/2+i\gamma}(\operatorname{ch} r)\,L(\gamma)\,d\gamma = f(r) \qquad (0 \leqslant r \leqslant \alpha) \tag{2.1}$$

$$\int_0^\infty T(\gamma)\,P^n_{-1/2+i\gamma}(\operatorname{ch} r)\,\gamma \operatorname{th}\pi\gamma\,d\gamma = 0 \qquad (r > \alpha)$$

Таблица 1

λ	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4
$\varphi(0)$	—	2.35	1.97	1.76	1.62	1.52
$\varphi(1)$	—	1.53	1.60	1.53	1.46	1.41
P	—	4.16	3.70	3.36	3.13	2.96
$\varphi(0)$	3.06	2.33	1.96	1.75	1.62	1.52
$\varphi(1)$	2.29	1.89	1.68	1.56	1.47	1.41
P	5.60	4.36	3.74	3.37	3.14	2.97
$\varphi(0)$	3.06	2.26	1.87	1.64	1.49	1.39
$\varphi(1)$	2.08	1.75	1.55	1.42	1.33	1.27
P	5.50	4.19	3.53	3.14	2.88	2.69

где $0 < \alpha < \infty$ — безразмерный параметр, $P^n_{-1/2}+i\gamma$ — присоединенные функции конуса, непрерывная функция $L(\gamma) > 0$ при $\gamma > 0$ и такова, что

$$L(\gamma) = B\gamma^2(1 + O(\gamma^2)) \qquad (\gamma \to 0, \ B = \text{const}) \tag{2.2}$$
$$L(\gamma) = 1 + O(\gamma^{-2}) \qquad (\gamma \to \infty)$$

Парное уравнение (2.1) может быть приведено к интегральному уравнению второго рода [3]

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi(t) M(t-x)\,dt + p(x) \qquad (|x| \leqslant \alpha)$$
$$M(y) = \int_0^\infty (1 - L(\gamma))\cos\gamma y\,d\gamma \tag{2.3}$$

Возможна и другая форма записи (2.3)

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi(t) K(t-x)\,dt = \pi p(x) \qquad (|x| \leqslant \alpha) \tag{2.4}$$

$$K(y) = \int_0^\infty L(\gamma)\cos\gamma y\,d\gamma \tag{2.5}$$

Здесь для случая $n = 1$

$$T(\gamma) = \int_0^\alpha \varphi(t)\cos\gamma t\,dt$$

$$p(x) = c\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{2}\,\mathrm{sh}\,x}{\pi}\int_0^x \frac{f(\tau)\,d\tau}{\sqrt{\mathrm{ch}\,x - \mathrm{ch}\,\tau}} \tag{2.6}$$

Для дальнейшего потребуется величина

$$\psi(r) = \int_0^\infty T(\gamma)\,\gamma\,\mathrm{th}\,\pi\gamma\,P^1_{-1/2+i\gamma}(\mathrm{ch}\,r)\,d\gamma \tag{2.7}$$

которой с учетом (2.6) можно придать вид [3]

$$\psi(r) = -\frac{d}{dr}\int_r^\alpha \varphi'(\tau)\,[2(\mathrm{ch}\,\tau - \mathrm{ch}\,r)]^{-1/2}\,d\tau \qquad (0 \leqslant r \leqslant \alpha) \tag{2.8}$$

Здесь учтено $\varphi(\alpha) = 0$, что соответствует условию интегрируемости $\psi(r)$ на $[0, \alpha]$ и служит условием для определения постоянной c в (2.6).

Заметим, что к уравнению типа (2.3) может быть приведено и парное интегральное уравнение [3]

$$\int_0^\infty \gamma T(\gamma) P^n_{-1/2+i\gamma}(\operatorname{ch} r) L(\gamma)\, d\gamma = f(r) \qquad (0 \leqslant r \leqslant \alpha)$$

$$\int_0^\infty T(\gamma) \operatorname{th} \pi\gamma\, P^n_{-1/2+i\gamma}(\operatorname{ch} r)\, d\gamma = 0 \qquad (r > \alpha) \tag{2.9}$$

Приближенное решение уравнения (2.4), (2.5) можно построить, аппроксимировав функцию $L(\gamma)$ в соответствии с (2.2) выражением

$$L^*(\gamma) = \frac{\gamma^2 P_1(\gamma)}{(\gamma^2 + D^2) P_2(\gamma)} \tag{2.10}$$

где $P_1(\gamma)$ и $P_2(\gamma)$ — четные полиномы одинаковой степени. Далее подробно рассмотрим случай а) $P_1 = P_2 \equiv 1$ и несколько коснемся случая

$$\text{б)}\ P_1(\gamma) = \gamma^2 + E^2, \qquad P_2(\gamma) = \gamma^2 + G^2.$$

Решение интегрального уравнения (2.4), (2.5), (2.10) может быть найдено в замкнутом виде [2]. С учетом формулы М. Г. Крейна [5] приведем, опуская выкладки, решение уравнения

$$\int_{-s}^{s} q(t, s) K(t - x)\, dt = \pi \qquad (|x| \leqslant s \leqslant \alpha) \tag{2.11}$$

Для случая а) имеем

$$q(t, s) = {}^1\!/_2 D^2 s^2 + Ds + 1 - {}^1\!/_2 D^2 t^2 \tag{2.12}$$

Для случая б) решение значительно усложняется

$$\begin{gathered}
q(t, s) = m - nt^2 + l\,[e^{-E(s+t)} + e^{-E(s-t)}] \\
m = [\Phi_1 s^2 + \Phi_2 s + \Phi_3 + e^{-2Es}(\Phi_4 s^2 + \Phi_5 s + \Phi_6)]\,[E_1 + E_2 e^{-2Es}]^{-1} \\
n = D^2 G^2 2^{-1} E^{-2} = (2\pi\beta)^{-1}, \qquad l = (F_1 + F_2 s)(E_1 + E_2 e^{-2Es})^{-1} \\
E_1 = E(D - G) D^{-1} G^{-1} (E - D)^{-1} (G - E)^{-1} \\
E_2 = E(D - G) D^{-1} G^{-1} (D + E)^{-1} (G + E)^{-1} \\
\Phi_1 = DG(G - D) 2^{-1} E^{-1} (D - E)^{-1} (G - E)^{-1} \\
\Phi_2 = [D^2 (G - E)] - G^2 (D - E)]\, E^{-2} (D - E)^{-1} (G - E)^{-1} \\
\Phi_3 = [D^3 (G - E) - G^3 (D - E)][E^{-2} G^{-1} D^{-1} (D - E)^{-1} (G - E)^{-1} \\
\Phi_4 = DG(D - G)\, 2^{-1} E^{-1} (D + E)^{-1} (G + E)^{-1} \\
\Phi_5 = [D^2 (G + E) - G^2 (D + E)] E^{-2} (D + E)^{-1} (G + E)^{-1} \\
\Phi_6 = [D^3 (G + E) - G^3 (D + E)] E^{-2} G^{-1} D^{-1} (D - E)^{-1} (G - E)^{-1} \\
F_1 = (G^2 - D^2) E^{-2} D^{-1} G^{-1}, \qquad F_2 = (G - D) E^{-2}
\end{gathered} \tag{2.13}$$

Предположим, что функция $p(x)$ четная и $p(x) = p_1'(x)$, тогда для случая (а) по формуле М. Г. Крейна с использованием (2.12) найдем следующее приближенное решение интегрального уравнения (2.4), (2.5).

$$\varphi(x) = p(x) + Dp'(\alpha) + D^2 \int_{|x|}^{\alpha} p_1(t)\,dt \tag{2.14}$$

Заметим, что если воспользоваться способом построения главного члена асимптотики при малых $\lambda = s^{-1}$, приведенным в п. 3°, то для уравнения (2.11) в случае а) будем иметь

$$q(t, s) = {}^1/_2\, D^2 s^2 + Ds + {}^1/_2 - {}^1/_2\, D^2 t^2 \tag{2.15}$$

что хорошо совпадает с (2.12). Для приближенного решения уравнения (2.4), (2.5), (2.2) могут быть использованы алгоритмы п. 1 (см. пп. 1°, 2°).

3. Кручение усеченного шара штампом. Названная задача рассматривалась ранее в работах [3, 6], где она была сведена к парному интегральному уравнению типа (2.1), а затем к уравнению второго рода типа (2.3), в котором

$$\begin{gathered} L(\gamma) = \operatorname{th} \pi\gamma \operatorname{th} \beta\gamma \quad (0 \leqslant \beta \leqslant \pi) \\ \alpha = 2 \operatorname{Arth}(b / a), \qquad \beta = \arcsin(a / R) \\ p(x) = c \operatorname{ch} x / 2 + H(\operatorname{ch} x / 2)^{-1}, \\ H = -2\sqrt{2}\, a\varepsilon\pi^{-1} \end{gathered} \tag{3.1}$$

Здесь β — параметр, характеризующий степень усечения шара, a — радиус среза, R — радиус шара, b — радиус штампа, ε — угол поворота штампа.

Видно, что $L(\gamma)$ вида (3.1) удовлетворяет свойствам (2.2) при $B = \pi\gamma$. Контактные касательные напряжения найдем по формуле [3]

$$\tau(r) = -Ga^{-1}(1 + \operatorname{ch} r)^{3/2}\psi(r), \qquad r = 2 \operatorname{Arth}(\rho a^{-1}) \tag{3.2}$$

где функция $\psi(r)$ дается (2.8), ρ — расстояние до оси симметрии.

В качестве приближенного решения уравнения (2.3), (3.1) возьмем (2.14), где

$$\begin{gathered} D = (\pi\beta)^{-1/2} \\ p_1(x) = 2c \operatorname{sh}(x / 2) + 2H \operatorname{arctg}(sh(x / 2)) \end{gathered} \tag{3.3}$$

Заметим, что точность простейшего случая ($P_1 = P_2 \equiv 1$) аппроксимации (2.10) при $\pi / 4 \leqslant \beta \leqslant \pi$ не превосходит 15%.

Теперь по формулам (2.8) и (3.2) найдем приближенное представление для $\tau(r)$

$$\begin{gathered} \tau(r) = a^{-1}G \operatorname{sh} r\,(1 + \operatorname{ch} r)^{3/2} \left[-\frac{1}{2} c\left(\frac{1}{2} - 2D^2\right)\left((1 + \operatorname{ch} r)^{-1} + \right.\right. \\ \left. + \frac{\sqrt{1 + \operatorname{ch}\alpha} + \sqrt{\operatorname{ch}\alpha - \operatorname{ch} r}}{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha - \operatorname{ch} r}\,[2\sqrt{(\operatorname{ch}\alpha - \operatorname{ch} r)(1 + \operatorname{ch}\alpha)} + 2\operatorname{ch}\alpha - \operatorname{ch} r + 1}\right) + \\ + H\sqrt{2}D^2\left(\frac{\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{sh}{}^1/_2\,\alpha)}{\operatorname{sh}\alpha\sqrt{\operatorname{ch}\alpha - \operatorname{ch} r}} + \frac{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha - \operatorname{ch} r}}{\sqrt{2}(1 + \operatorname{ch} r)\sqrt{\operatorname{ch}\alpha + 1}} - \right. \\ - \frac{1}{4\sqrt{\operatorname{ch} r - 1}} \arccos\frac{4(1 - \operatorname{ch} r) + (3 - \operatorname{ch} r)(\operatorname{ch}\alpha - 1)}{(1 + \operatorname{ch} r)(\operatorname{ch}\alpha - 1)} + \\ \left.\left. + \int_r^{\alpha} \frac{\operatorname{ch} x \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{sh}{}^1/_2\, x)\,dx}{\operatorname{sh}^2 x\sqrt{\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} r}}\right)\right] \end{gathered} \tag{3.4}$$

где постоянная c, найденная из условия $\varphi(\alpha) = 0$, имеет вид

$$c = -H\,\frac{(\operatorname{ch}{}^1/_2\,\alpha)^{-1} + 2D \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{sh}{}^1/_2\,\alpha)}{\operatorname{ch}{}^1/_2\,\alpha + 2D\operatorname{sh}{}^1/_2\,\alpha} \tag{3.5}$$

При выводе формулы (3.4) были использованы значения следующих интегралов:

$$\int_r^\alpha \frac{\operatorname{sh} {}^1/_2 x\, dx}{\sqrt{\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} r}} = \sqrt{2} \ln \frac{2\sqrt{(\operatorname{ch}\alpha - \operatorname{ch} r)(1+\operatorname{ch}\alpha)} + 2\operatorname{ch}\alpha - \operatorname{ch} r + 1}{1+\operatorname{ch} r} \quad (\alpha > r)$$

$$\int_r^\alpha \frac{\operatorname{sh} {}^1/_2 x\, dx}{\operatorname{ch}^2 {}^1/_2 x \sqrt{\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} r}} = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{\operatorname{ch}\alpha - \operatorname{ch} r}}{(1+\operatorname{ch} r)\sqrt{1+\operatorname{ch}\alpha}} \quad (\alpha > r)$$

$$\int_r^\alpha \frac{dx}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} {}^1/_2 x \sqrt{\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} r}} = -\frac{\sqrt{2}\sqrt{\operatorname{ch}\alpha - \operatorname{ch} r}}{(1+\operatorname{ch} r)\sqrt{1+\operatorname{ch}\alpha}} + \tag{3.6}$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{ch} r - 1}} \arccos \frac{4(1-\operatorname{ch} r) + (3-\operatorname{ch} r)(\operatorname{ch}\alpha - 1)}{(1+\operatorname{ch} r)(\operatorname{ch}\alpha - 1)} \quad (\alpha > r)$$

В табл. 2 даны некоторые результаты вычислений величины $\tau(r)(G\varepsilon)^{-1}$, полученные по формуле (3.4). Во второй строке таблицы для сравнения приведены соответствующие точные данные для задачи о кручении штампом упругого полупространства.

Таблица 2

	b/a \ ρ/a	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
$\gamma = \pi$	0.0	0.128	0.400	0.735	1.25	2.63
	0.1	0.133	0.402	0.742	1.25	2.65
	0.3	0.132	0.411	0.753	1.28	2.68
	0.5	0.139	0.432	0.791	1.34	2.80
	0.7	0.149	0.465	0.857	1.46	3.07
	0.9	0.164	0.512	0.959	1.69	3.88
$\gamma = {}^1/_2\pi$	0.1	0.137	0.404	0.743	1.26	2.66
	0.3	0.136	0.420	0.768	1.30	2.71
	0.5	0.147	0.456	0.832	1.40	2.90
	0.7	0.165	0.513	0.944	1.60	3.34
	0.9	0.192	0.597	1.13	2.01	4.65

Далее значения величины $c(a\varepsilon)^{-1}$ получены при $\beta = \pi$ по формуле (3.5) (вторая строка) с использованием более точной аппроксимации (2.10) (третья строка)

$b/a =$	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
$c(a\varepsilon)^{-1} =$	0.990	0.919	0.788	0.597	0.318
$c(a\varepsilon)^{-1} =$	1.01	0.949	0.825	0.618	0.319

В (2.10) при $\beta = \pi$ положим

$$D = 0.424, \qquad P_1(\gamma) = \gamma^2 + (0.75)^2, \qquad P_2(\gamma) = \gamma^2 + (0.56)^2$$

Погрешность такой аппроксимации не превосходит 1.5%. Аналитическое выражение для $c(a\varepsilon)^{-1}$ при использовании указанной аппроксимации не приводим из-за его громоздкости.

В заключение отметим, что аналогичным образом могут быть аналитически и численно исследованы задачи о вдавливании кольцевого штампа в упругое полупространство, о кольцевой трещине в упругом пространстве.

Поступила 7 VII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В. М. Асимптотические методы в контактных задачах теории упругости. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
2. Бабешко В. А., Ворович И. И. К расчету контактных температур, возникающих при вращении вала в подшипнике. ПМТФ, 1968, № 2.
3. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., «Наука», 1968.
4. Александров В. М., Бабешко В. А., Кучеров В. А. Контактные задачи для упругого слоя малой толщины. ПММ. 1966, т. 30, вып. 1.
5. Гохберг П. Ц., Крейн М. Г. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. М., «Наука», 1967.
6. Баблоян А. А. Решение некоторых парных интегральных уравнений. ПММ, 1964, т. 28, вып. 6.