Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 532.529

РЕОЛОГИЯ КОНЦЕНТРИРОВАННЫХ СМЕСЕЙ ЖИДКОСТИ С МЕЛКИМИ ЧАСТИЦАМИ. ПАРАМЕТРЫ МЕЖФАЗОВОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Ю. А. Буевич, В. Г. Марков

(Москва)

Рассматривается совместное движение жидкости и взвешенных в ней твердых, жидких или газообразных частиц. Расположение частиц в пространстве считается случайным, а сами частицы — сферами малого радиуса, так что числа Рейнольдса для обтекания частиц разных размеров малы и, кроме того, можно пренебречь случайными («псевдотурбулентными») пульсациями обеих фаз. Вычислены величины, характеризующие взаимодействие между фазами в условиях нестационарного неоднородного течения.

Дисперсные системы, состоящие из жидкости и взвешенных в ней частиц, можно условно разделить на два класса. В «мягких» системах, относящихся к первому классу, частицы и жидкость совершают регулярные детерминированные движения; случайные пульсации фаз слабы и не оказывают существенного влияния на поведение системы, так что в большинстве случаев ими можно пренебречь. Напротив, в системах второго класса («жесткие» системы) имеют место интенсивные хаотические пульсации частиц и жидкости, играющие определяющую роль в формировании реологических свойств и особенностей процессов переноса в таких системах.

Систематическая гидромеханическая теория «мягких» систем развита лишь для случая, когда концентрация дисперсной фазы достаточна мала, так что можно либо вообще пренебречь взаимодействием между частицами, либо приближенно учитывать только парные взаимодействия [1, 2]. Теория случайных псевдотурбулентных движений фаз и их влияния на реологию «жестких» систем построена в [3]. Однако в этом случае некоторые важные параметры, характеризующие поведение дисперсной системы в пренебрежении пульсациями фаз, приходится задавать априори. Поэтому построение теории мягких систем высокой концентрации представляет непосредственный интерес также и для анализа процессов в жестких дисперсных системах.

Задача о стесненном движении жидкости в концентрированном облаке случайно расположенных частиц и о возникающих при этом силах межфазового взаимодействия рассматривалась ранее на основе различных допущений [4–6].

Более строгий подход к решению задачи о стационарном потоке в решетке твердых частиц был предложен Тэмом [7], использовавшим приближение «точечных» сил, согласно которому возмущения, вносимые в поток частицами, заменяются возмущениями от точечных сил, приложенных к жидкости в центрах частиц. Этот метод, не содержащий произвольных эмпирических допущений, был распространен на нестационарные течения в [8].

Ниже формулируется система последовательных приближений, в рамках которой приближение точечных сил, использованное в [7, 8], представляет естественное «нулевое» приближение, что дает принципиальную возможность уточнения результатов, получаемых на основе указанного приближения. Результаты работ [7, 8] обобщаются также на случаи, когда поток жидкости не только нестационарен, но и неоднороден, а частицы не обязательно твердые и не обязательно неподвижны.

1. Основные допущения и уравнения. Рассмотрим течение жидкости в полидисперсном облаке, образованном мелкими сферическими частицами, такими, что значения числа Рейнольдса, характеризующие обтекание частиц разных размеров, малы и можно использовать линеаризованные уравнения гидромеханики в форме Стокса.

Ввиду линейности уравнений локальные скорость $\mathbf{V}(t, \mathbf{r})$ и давление $P(t, \mathbf{r})$ жидкости в промежутках между частицами можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(t, \mathbf{r}) &= \mathbf{V}_0(t, \mathbf{r}) + \sum_{j=1}^{N} \mathbf{V}(t, \mathbf{r}; \mathbf{r}^{(j)}) \\ P(t, \mathbf{r}) &= P_0(t, \mathbf{r}) + \sum_{j=1}^{N} P(t, \mathbf{r}; \mathbf{r}^{(j)}) \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $\mathbf{V}_0(t, \mathbf{r})$, $P_0(t, \mathbf{r})$ — скорость и давление невозмущенного течения, а $\mathbf{V}(t, \mathbf{r}; \mathbf{r}^{(j)})$, $P(t, \mathbf{r}; \mathbf{r}^{(j)})$ — возмущение, вносимое частицей с центром в точке $\mathbf{r}^{(j)}$, N — полное число частиц в системе. Наряду с (1.1) будем рассматривать также поля скорости и давления жидкости, возмущаемой всеми частицами кроме j-й,

$$\mathbf{V}^{(j)'}(t, \mathbf{r}; \mathbf{r}^{(j)}) = \mathbf{V}(t, \mathbf{r}) - \mathbf{V}(t, \mathbf{r}; \mathbf{r}^{(j)}), \quad P^{(j)'}(t, \mathbf{r}; \mathbf{r}^{(j)}) = P(t, \mathbf{r}) - P(t, \mathbf{r}; \mathbf{r}^{(j)}) \tag{1.2}$$

Величины (1.2) не имеют, в отличие от (1.1), сингулярностей в точке $\mathbf{r} = \mathbf{r}^{(j)}$ (см. обсуждение в [7]).

Поля, введенные в (1.1) и (1.2), удовлетворяют уравнениям

$$\begin{gathered} d_0(\partial / \partial t)\mathbf{V}_0(t, \mathbf{r}) = -\nabla P_0(t, \mathbf{r}) + \mu_0 \Delta \mathbf{V}_0(t, \mathbf{r}) - \nabla \Phi(t, \mathbf{r}) \\ d_0(\partial / \partial t)\mathbf{V}(t, \mathbf{r}; \mathbf{r}^{(j)}) = -\nabla P(t, \mathbf{r}; \mathbf{r}^{(j')}) + \mu_0 \Delta \mathbf{V}(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}^{(j)}) - \mathbf{F}(t, \mathbf{r}; \mathbf{r}^{(j)}) \\ \mathbf{F}(t, \mathbf{r}; \mathbf{r}^{(j)}) = \int \mathbf{p}(t, \mathbf{r})\, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(j)} - \mathbf{a}^{(j)})\, d\mathbf{a}^{(j)} \\ \nabla \mathbf{V}_0(t, \mathbf{r}) = 0, \quad \nabla \mathbf{V}(t, \mathbf{r}; \mathbf{r}^{(j)}) = 0 \end{gathered} \tag{1.3}$$

Здесь d_0 и μ_0 — плотность и вязкость жидкости, $\mathbf{p}(t, \mathbf{r})$ — вектор плотности напряжений на поверхностях частиц, $\mathbf{a}^{(j)}$ — вектор, проведенный из центра j-й частицы в произвольную точку на ее поверхности. Величины $\mathbf{r}^{(j)}$ зависят от времени. Вектор $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}; \mathbf{r}^{(j)})$ представляет полную реакцию на j-ю частицу со стороны обтекающей жидкости; $\Phi(t, \mathbf{r})$ — потенциал внешних массовых сил. Интегрирование в (1.3) проводится по поверхности j-й частицы. Из (1.3) следуют также очевидные уравнения для сумм в (1.1) и (1.2).

Подробное описание движения жидкости в терминах величин (1.1) и (1.2) не только не необходимо, но и, по существу, невозможно, так как положение частиц в системе в значительной мере случайно и неизвестно (исключение составляют лишь стационарные зернистые слои с регулярной упаковкой частиц). Поэтому разумно, следуя [7, 8], рассматривать только некоторые средние характеристики течения жидкости в промежутках между частицами, вводя для этой цели понятие об ансамбле частиц, составляющих облако, и определенные предположения о характере этого ансамбля.

Допустим, что частицы статистически независимы и корреляционные связи между их положениями в пространстве вообще отсутствуют. В этом случае функция распределения ансамбля N частиц по их радиусам $a^{(j)}$ и радиус-векторам их центров $\mathbf{r}^{(j)}$ ($j = 1, 2, \ldots, N$) может быть представлена в виде простой суперпозиции унарных функций распределения, одинаковых для всех частиц. Имеем

$$\varphi_N(t, \mathbf{r}^{(1)}, \ldots, \mathbf{r}^{(N)};\ a^{(1)}, \ldots, a^{(N)}) = \prod_{j=1}^{N} \varphi(t, \mathbf{r}^{(j)}, a^{(j)}) \tag{1.4}$$

Для определенности считаем функции распределения, введенные в (1.4), нормированными на единицу в областях своего определения. От времени t они зависят как от параметра.

Строго говоря, суперпозиционное соотношение (1.4) справедливо лишь для статистически независимых точечных частиц. Центры независимых частиц конечного объема в любом случае не могут быть расположены как угодно близко один к другому, что в (1.4) не учитывается. Соответствующая ошибка возрастает с увеличением объемной концентрации ρ частиц в системе и при ρ, близких к концентрации ρ_* состояния плотной упаковки. Соотношение (1.4) должно быть заменено более точным, включающим бинарные функции распределения, как это обычно делается в статистической физике жидкостей и плотных газов. Вводить бинарные функции распределения следует также в случаях, когда между частицами системы имеются устойчивые корреляционные связи (например образуются долгоживущие дуплеты частиц). Однако для статистически независимых частиц соотношение (1.4) дает вполне удовлетворительные результаты [7, 8] вплоть до $\rho \sim 0.5$. Поэтому, ограничиваясь далее рассмотрением только таких частиц, используем для простоты соотношение (1.4) без дальнейших оговорок.

Кроме этих функций, можно ввести также счетную (числовую) и объемную концентрации частиц при помощи равенств

$$n(t, \mathbf{r}) = N \int \varphi(t, \mathbf{r}, a)\, da, \qquad \rho(t, \mathbf{r}) = \frac{4}{3}\pi N \int a^3 \varphi(t, \mathbf{r}, a)\, da \tag{1.5}$$

Операцию усреднения по ансамблю частиц определим следующим образом:

$$\langle f \rangle = \int \cdots \int f \varphi_N(t; \mathbf{r}^{(1)}, \ldots, \mathbf{r}^{(N)};\ a^{(1)}, \ldots, a^{(N)}) d\mathbf{r}^{(1)} \cdots d\mathbf{r}^{(N)} da^{(1)} \cdots da^{(N)} \tag{1.6}$$

где f — произвольная функция. Функции, не зависящие от $\mathbf{r}^{(j)}$ и $a^{(j)}$, при таком усреднении, очевидно, не изменяются. Из (1.1) и (1.2) получим, в частности

$$\langle \mathbf{V} \rangle = \mathbf{V}_0(t, \mathbf{r}) + \langle \mathbf{V}(t, \mathbf{r}; \mathbf{r}^{(j)}) \rangle N, \quad \langle P \rangle = P_0(t, \mathbf{r}) + \langle P(t, \mathbf{r}; \mathbf{r}^{(j)}) \rangle N \tag{1.7}$$
$$\langle \mathbf{V}^{(j)'} \rangle = \mathbf{V}_0 + \langle \mathbf{V}(t, \mathbf{r}; \mathbf{r}^{(j)}) \rangle (N-1), \quad \langle P^{(j)'} \rangle = P_0 + \langle P(t, \mathbf{r}; \mathbf{r}^{(j)}) \rangle (N-1)$$

Из (1.7) имеем равенства, справедливые асимптотически при $N \gg 1$

$$\langle \mathbf{V} \rangle = \langle \mathbf{V}^{(j)'} \rangle, \qquad \langle P \rangle = \langle P^{(j)'} \rangle \tag{1.8}$$

Используя операцию (1.6), из (1.3) получим также усредненные уравнения

$$d_0 \langle (\partial / \partial t) \mathbf{V} \rangle = -\langle \nabla P \rangle + \mu_0 \langle \Delta \mathbf{V} \rangle - \nabla \Phi - N \langle \mathbf{F} \rangle = 0, \quad \langle \nabla \mathbf{V} \rangle = 0 \tag{1.9}$$

В общем случае частицы совершают поступательное движение и вращаются (если частицы — твердые) относительно осей, проходящих через их центры. Обозначим скорость движения центра j-й частицы и угловую скорость ее вращения через $\mathbf{W}^{(j)}(t)$ и $\mathbf{\Omega}^{(j)}(t)$ соответственно. При усреднении по ансамблю, согласно (1.4), (1.6), обе эти величины не изменяются Скорости поступательного движения и вращения частиц можно описать, введя также векторные функции $\mathbf{W}(t, \mathbf{r}, a)$ и $\mathbf{\Omega}(t, \mathbf{r}, a)$ такие, что

$$\mathbf{W}(t, \mathbf{r}^{(j)}, a^{(j)}) \equiv \mathbf{W}^{(j)}(t), \qquad \mathbf{\Omega}(t, \mathbf{r}^{(j)}, a^{(j)}) \equiv \mathbf{\Omega}^{(j)}(t)$$

Однако в отличие от $\mathbf{W}^{(j)}(t)$ и $\mathbf{\Omega}^{(j)}(t)$ введенные векторные функции изменяются при усреднении по ансамблю. Если псевдотурбулентные пульсации, рассмотренные в [3], отсутствуют или слабы (что предполагается), эти функции можно считать регулярными.

Для целей этой работы достаточно рассматривать $\mathbf{W}(t, \mathbf{r}, a)$, $\mathbf{\Omega}(t, \mathbf{r}, a)$, а также $\varphi(t, \mathbf{r}, a)$ как некие известные величины, задаваемые априори. Это полностью адекватно для течений внутри облака неподвижных частиц, исследованных в [7,8]. В общем случае указанные величины представляют собой решения некоторых уравнений (здесь пока не рассматриваемых), описывающих среднее движение мягкой дисперсной системы в приближении взаимопроникающих взаимодействующих сплошных сред.

Пространственный масштаб l существенного изменения величин $\mathbf{V}(t, \mathbf{r})$ и $P(t, \mathbf{r})$ совпадает по порядку величины со средним расстоянием между центрами частиц. Пространственный масштаб соответствующих величин, усредненных по ансамблю, так же, как масштаб $\varphi(t, \mathbf{r}, a)$, $\mathbf{W}(t, \mathbf{r}, a)$, $\mathbf{\Omega}(t, \mathbf{r}, a)$ и вообще всех параметров, характеризующих среднее движение фаз дисперсной системы, не обязательно равен l. Считая для простоты, что масштабы всех средних параметров одинаковы по порядку величины, и обозначая их через L, примем

$$L \gg l \sim a\rho^{-1/3} \gtrsim a, \qquad \varepsilon_l = l / L \ll 1$$

Это предположение означает, что можно выбрать такой физический малый объем смеси, в котором будет содержаться достаточное для усреднения по ансамблю число частиц, причем все средние параметры могут рассматриваться в пределах этого объема как практически не зависящие от координат. Укажем, что существование такого объема представляет непременное условие законности применения методов механики сплошной среды к описанию среднего движения дисперсной системы, рассматриваемой как суперпозиция взаимодействующих взаимопроникающих континуумов.

Временные масштабы изменения как величин $\mathbf{V}(t, \mathbf{r})$, $P(t, \mathbf{r})$, так и соответствующих средних совпадают и определяются, например, динамикой изменения граничных условий, наложенных на систему. Пусть по порядку величины эти масштабы равны τ. Однако временной масштаб T существенного изменения функции распределения $\varphi(t, \mathbf{r}, a)$ должен существенно превышать τ, так как указанное изменение связано не с изменением локальной гидродинамической обстановки в окрестности какой-либо частицы, а с перераспределением частиц во всем объеме, занятом дисперсной системой, или в объеме с линейными размерами порядка L. Поэтому примем

$$T \gg \tau, \qquad \varepsilon_\tau = \tau / T \ll 1$$

В дальнейшем для упрощения считаем ε_l и ε_τ малыми одного порядка, т. е. $\varepsilon_l \sim \varepsilon_\tau \sim \varepsilon$. Параметр ε естественно использовать при построении асимптотических решений уравнений, записанных выше.

В малой окрестности $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \lesssim l$ произвольной точки r_0 все величины, характеризующие среднее движение, можно представить в форме разложений по ε. Ниже потребуется разложение

$$\mathbf{W}(t, \mathbf{r}, a) = \mathbf{W}_0(t, \mathbf{r}_0, a) + \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \mathbf{W}_m(t, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0, a;\ \mathbf{r}_0), \mathbf{W}_m = O(\mathbf{W}_0) \quad (1.10)$$

где под знаком суммы стоят фактически коэффициенты ряда Тейлора. Аналогично в области $t - t_0 \lesssim \tau$, $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \lesssim l$ будем иметь

$$\varphi(t, \mathbf{r}, a) = \varphi_0(t_0, \mathbf{r}_0, a) + \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \varphi_m(t - t_0,\ \mathbf{r} - \mathbf{r}_0,\ a;\ t_0, \mathbf{r}_0)$$

$$\int \varphi_0 da = \frac{n(t_0, \mathbf{r}_0)}{N}, \qquad \int \varphi_m da = O\left(\frac{n(t_0, \mathbf{r}_0)}{N}\right) \quad (1.11)$$

Формуле (1.11) соответствует разложение

$$\varphi_N(t; \mathbf{r}^{(1)}, \ldots, \mathbf{r}^{(N)};\ a^{(1)}, \ldots, a^{(N)}) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \varphi_{Nm}, \quad \varphi_{N0} = \prod_{j=1}^{N} \varphi_0(t_0, \mathbf{r}_0, a^{(j)})$$

$$\varphi_{N1} = \sum_{m=1}^{N} \varphi_1(t - t_0, \mathbf{r}^{(m)} - \mathbf{r}_0, a^{(m)};\ t_1, \mathbf{r}_0) \prod_{j=1,\, j\neq m}^{N} \varphi_0(t_0, \mathbf{r}_0, a^{(j)}) \quad (1.12)$$

Если использовать (1.12) для усреднения некоторой функции f в соответствии с правилом (1.6), то m-й член, возникающий в ряде для $\langle f \rangle$, будет иметь порядок $(\varepsilon N)^m$, т. е. при $N \to \infty$ последующие члены этого ряда не обязательно малы по сравнению с предыдущими. Однако, если усредняемая функция зависит от координат центров и радиусов $\sim n(t_0, \mathbf{r}_0)\, l^3$ частиц, содержащихся в объеме $\sim l^3$, окружающем точку $\mathbf{r}_0$, то, как легко показать, m-й член будет иметь порядок $(\varepsilon n(t_0, \mathbf{r}_0)\, l^3)^m \sim \varepsilon^m$, т. е. ряд для $\langle f \rangle$ будет асимптотическим разложением.

2. Разложение по мультиполям и условие самосогласованности. Как показано в работах [7,8], а также следует из анализа ниже, при течении жидкости в облаке частиц имеет место эффективное гидродинамическое экранирование каждой частицы ее ближайшими соседями в том смысле, что на скорость этой частицы, а также на скорость и давление жидкости вблизи нее существенно влияют лишь те соседние частицы, которые находятся от нее на расстоянии порядка $l \sim a\rho^{-1/3}$. Поэтому, используя при усреднении по ансамблю функцию распределения (1.12) и учитывая п. 1, имеем

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle \mathbf{V} \rangle_0}{\partial t} - \varepsilon \left(\int \cdots \int \frac{\partial \varphi_{N1}}{\partial t} \mathbf{V}(t, \mathbf{r})\, d\mathbf{r}^{(1)} \ldots d\mathbf{r}^{(N)} da^{(1)} \ldots da^{(N)} + O(\varepsilon) \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \langle \mathbf{V} \rangle_0 + O(\varepsilon) \quad (2.1)$$

Аналогично получаем

$$\langle \nabla P \rangle = \nabla \langle P \rangle_0 + O(\varepsilon), \qquad \langle \Delta \mathbf{V} \rangle = \Delta \langle \mathbf{V} \rangle_0 + O(\varepsilon)$$

$$\langle \nabla \mathbf{V} \rangle = \nabla \langle \mathbf{V} \rangle_0 + O(\varepsilon) \quad (2.2)$$

Индекс нуль у угловых скобок здесь и ниже означает, что усреднение проводится по функции φ_{N0} из (1.12). Конкретные представления величин, обозначенных в (2.2) через $O(\varepsilon)$, во избежание громоздкости не выписываются.

Рассмотрим величину $\langle \mathbf{F} \rangle$ в (1.9). Используя определение вектора $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}; \mathbf{r}^{(j)})$ в (1.3), разложим дельта-функцию под знаком интеграла в ряд по степеням компонент вектора $\mathbf{a}^{(j)}$. Получим

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{r}; \mathbf{r}^{(j)}) = \int \mathbf{p}(\mathbf{r}^{(j)} + \mathbf{a}^{(j)})\, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(j)} - \mathbf{a}^{(j)})\, d\mathbf{a}^{(j)} =$$
$$= \int \mathbf{p}(\mathbf{r}^{(j)} + \mathbf{a}^{(j)}) \left(\sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q!} (\mathbf{a}^{(j)}\nabla)^q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(j)}) \right) d\mathbf{a}^{(j)}$$

Меняя порядок суммирования и интегрирования, имеем

$$F_i(t, \mathbf{r}; \mathbf{r}^{(j)}) = \sum_{q=1}^{\infty} {}^{q}G_{ik\ldots m}(\mathbf{r}^{(j)}) \int \frac{\partial}{\partial r_k} \cdots \frac{\partial}{\partial r_m} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(j)}) \tag{2.3}$$
$${}^{q}G_{ik\ldots m}(\mathbf{r}^{(j)}) = \frac{1}{q!} \int \mathbf{p}(\mathbf{r}^{(j)} + \mathbf{a}^{(j)})\, a_k^{(j)} \ldots a_m^{(j)} d\mathbf{a}^{(j)}$$

Здесь ${}^{q}\mathrm{G}(\mathbf{r}^{(j)})$ — тензоры q-го ранга. Это разложение представляет собой, в сущности, разложение по мультиполям, аналогичное по смыслу такому разложению в теории потенциала. Первый член (монополь) в (2.3) описывает силу, приложенную в точке $\mathbf{r} = \mathbf{r}^{(j)}$ и равную по величине силе, воздействующей на эту частицу со стороны обтекающей ее жидкости. Второй член определяется тензором ${}^{2}\mathrm{G}(\mathbf{r}^{(j)})$-точечным «дипольным моментом» напряжений, распределенных по поверхности частицы. Очевидно, приближение точечных сил, введенное в [7, 8], соответствует учету только первого члена в (2.3).

Из определения тензоров ${}^{q}\mathrm{G}(\mathbf{r}^{(j)})$ ясно, что $\langle {}^{q+1}G \rangle \sim a \langle {}^{q}G \rangle$ для любых q, ${}^{q}G_{i\ldots j}$. Очевидно также, что $\langle {}^{q}G \rangle$ может зависеть только от средних характеристик течения, так что в соответствии с п. 1 имеем $(\partial / \partial r_k) \langle {}^{q}G \rangle \sim L^{-1} \langle {}^{q}G \rangle$. Используя эти соображения, легко показать, что каждый последующий член в разложении $\langle \mathbf{F} \rangle$ имеет по ε порядок, на единицу больший, чем предыдущий член. Действительно, покажем это для первых двух членов. Имеем из (2.3)

$$\langle {}^{1}\mathrm{G}(\mathbf{r}^{(j)})\, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(j)}) \rangle = \int {}^{1}\mathrm{G}(\mathbf{r}^{(j)})\, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(j)})\, \varphi(t, \mathbf{r}^{(j)}, a^{(j)})\, d\mathbf{r}^{(j)} da^{(j)} + O(\varepsilon) =$$
$$= \left(\frac{n}{N}\right) \langle {}^{1}\mathrm{G} \rangle + O(\varepsilon)$$

а также, интегрируя по частям

$$\langle {}^{2}\mathrm{G}(\mathbf{r}^{(j)})\, \nabla\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(j)}) \rangle = \int {}^{2}\mathrm{G}(\mathbf{r}^{(j)})\, \varphi(t, \mathbf{r}^{(j)}, a^{(j)})\, \nabla\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(j)})\, dr^{(j)} da^{(j)} +$$
$$+ O(\varepsilon) = -\left(\frac{n}{N}\right) \nabla \langle {}^{2}\mathrm{G} \rangle + O(\varepsilon) \sim \varepsilon \left(\frac{n}{N}\right) \langle {}^{1}\mathrm{G} \rangle$$

Обобщение на члены высшего порядка элементарно.

Таким образом, в соответствии с (2.3) вектор $\langle \mathbf{F} \rangle$ выражается в виде ряда по степеням ε, коэффициенты которого, получаемые усреднением по ансамблю (1.12), также зависят от ε, и этот ряд представляет собой обобщенное асимптотическое разложение в смысле Эрдейи. Используя указанный ряд, представляя $\langle \mathbf{V} \rangle$ и $\langle P \rangle$ в виде рядов

$$\langle \mathbf{V} \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \langle \mathbf{V} \rangle^{(m)}, \qquad \langle P \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \langle P \rangle^{(m)} \tag{2.4}$$

с неизвестными коэффициентами и рассматривая величины (2.1), (2.2) с $\langle \mathbf{V} \rangle$ и $\langle P \rangle$ из (2.4) как обобщенные асимптотические разложения, можно получить из (1.9) систему уравнений последовательных приближений для определения всех коэффициентов в рядах (2.4). Ниже ограничимся исследованием только нулевого приближения, в котором имеем

$$d_0(\partial / \partial t) \langle \mathbf{V} \rangle^{(0)} = -\nabla \langle P \rangle^{(0)} + \mu_0 \Delta \langle \mathbf{V} \rangle^{(0)} - \nabla \Phi - n \langle {}^1\mathbf{G} \rangle_0^{(0)} = 0 \qquad (2.5)$$
$$\nabla \langle \mathbf{V} \rangle^{(0)} = 0$$

Здесь $\langle {}^1\mathbf{G} \rangle_0^{(0)}$ — главный член асимптотического разложения для $\langle {}^1\mathbf{G} \rangle$. Аналогично можно записать и уравнения для следующих приближений. Уравнения (2.5) нулевого приближения соответствуют использованию приближения точечных сил в той же форме, что и в [7,8], и представлений о локально однородном стационарном ансамбле частиц, определяемом функцией распределения (1.12).

Удобно использовать уравнения (2.5) в системе координат, связанной с центром некоторой j-й частицы. Имеем

$$d_0(\partial / \partial t)\, \mathbf{U}^{(j)} = -\nabla \langle P \rangle^{(0)} + \mu_0 \Delta \mathbf{U}^{(j)} - \nabla \Phi - d_0(\partial / \partial t)\, \mathbf{W}^{(j)} - n \langle {}^1\mathbf{G} \rangle_0^{(0)} = 0$$
$$\nabla \mathbf{U}^{(j)} = 0, \qquad \mathbf{U}^{(j)} = \langle \mathbf{V} \rangle^{(0)} - \mathbf{W}^{(j)}, \qquad \Delta \mathbf{U}^{(j)} \equiv \Delta \langle \mathbf{V} \rangle^{(0)} \qquad (2.6)$$

Для упрощения последующих рассуждений применим к (2.6) преобразование Фурье, в результате чего получим уравнения

$$i\omega d_0 \mathbf{U}_\omega^{(j)} = -\nabla P_\omega + \mu_0 \Delta \mathbf{U}_\omega - \nabla \Phi_\omega - i d_0 \omega \mathbf{W}_\omega^{(j)} - n \mathbf{G}_\omega = 0$$
$$\nabla \mathbf{U}_\omega^{(j)} = 0 \qquad (2.7)$$

где ω — частота, индекс ω отмечает преобразования Фурье соответствующих величин, угловые скобки и индексы в обозначениях давления и силы для простоты опущены.

Уравнения (2.6) или (2.7) можно использовать, в частности, для исследования обтекания j-й частицы. При этом влияние всех остальных частиц на формирование полей скорости и давления вблизи этой частицы, т. е. влияние стесненности обтекания учитывается при помощи введения объемной силы $-n \langle {}^1\mathbf{G} \rangle_0^{(0)}$ (или ее фурье-компоненты $-n\mathbf{G}_\omega$), описывающей сопротивление, оказываемое частицами потоку жидкости.

Очевидно, что величина $\mathbf{G}_\omega$ должна представлять собой линейную комбинацию линейно-независимых векторов, характеризующих течение, невозмущенное j-й частицей, в точке $\mathbf{r} = \mathbf{r}^{(j)}$ (это следует непосредственно из линейности уравнений движения). Таких векторов всего два

$$\mathbf{U}_\omega^{(j)\prime} = \langle \mathbf{V}^{(j)\prime} \rangle_\omega^{(0)} - \mathbf{W}_\omega^{(j)} = \langle \mathbf{V} \rangle_\omega^{(0)} - \mathbf{W}_\omega^{(j)} = \mathbf{U}_\omega^{(j)}, \qquad \Delta \mathbf{U}_\omega^{(j)\prime} = \Delta \mathbf{U}_\omega^{(j)}$$

(здесь использовано соотношение (1.8); вектор $\nabla \langle P^{(j)} \rangle_\omega^{(0)} = \nabla \langle P \rangle_\omega^{(0)}$ линейно зависит от $\mathbf{U}_\omega^{(j)}$ и $\Delta \mathbf{U}_\omega^{(j)}$ — связь между ними определяется уравнениями движения). Поэтому можно записать

$$\mathbf{G}_\omega^{(j)} = D'(\omega, a^{(j)})\, \mathbf{U}_\omega^{(j)} + D''(\omega, a^{(j)\prime})\, \Delta \mathbf{U}_\omega^{(j)} \qquad (2.8)$$

что представляет собой естественное обобщение формул, предложенных для силы в [7,8]. Очевидно, $D'' \sim a^2 D'$, т. е. отношение второго члена в (2.8) к первому имеет порядок ε^2. Поэтому в уравнениях (2.7) нужно учитывать только первый член из выражения (2.8). Имеем тогда [1]

$$n\mathbf{G}_\omega = n\langle D'\mathbf{U}_\omega^{(j)}\rangle_0 = \mu_0 \alpha \mathbf{U}_\omega^{(j)} + \mu_0 \mathbf{\Gamma}^{(j)} \tag{2.9}$$

$$\mu_0\alpha = n\int D'\varphi_0\, da, \qquad \mu_0 \mathbf{\Gamma}^{(j)} = \mu_0 \alpha \mathbf{W}_\omega^{(j)} - n\int D'\mathbf{W}_0 \varphi_0\, da$$

где $\mathbf{W}_0$ определена в (1.10).

Подставляя (2.9) в (2.7), получаем окончательно

$$(\Delta - \beta^2)\mathbf{U} = \mu_0^{-1}\nabla(P + \Psi), \qquad \nabla\mathbf{U} = 0 \tag{2.10}$$

$$\beta^2 = \mu_0^{-1}(\mu_0\alpha + id_0\omega), \qquad \Psi = \Phi + id_0\omega\mathbf{W}\mathbf{r} + \mathbf{\Gamma}\mathbf{r}$$

Для упрощения записи индексы ω и (j) опущены; величина Ψ представляет собой эффективный потенциал массовых сил, действующих на жидкость. Первый член в выражении для Ψ описывает внешнее массовое поле, второй — поле сил инерции в избранной системе координат. Наконец, третий член определяет дополнительное поле массовых сил, появление которого обусловлено различием в собственных скоростях частиц разных радиусов, а следовательно, и в силах их ваимодействия с жидкостью (частицы, движущиеся относительно выделенной, увлекают в своем движении и жидкость). Этот член специфичен для полидисперсных систем; для монодисперсной системы $\mathbf{\Gamma} \equiv 0$.

Уравнения (2.10) можно рассматривать с формальной точки зрения как уравнения, описывающие движение некоторой фиктивной жидкости, на которую действует объемная сила «трения» — $\mu_0\alpha\mathbf{U}$ во всем пространстве. Это движение моделирует истинное течение жидкости в промежутках между частицами. В этом смысле имеется некоторое, хотя и весьма поверхностное сходство с концепцией фиктивной гомогенной среды, предложенной из чисто эмпирических соображений в работе [4].

Уравнения (2.10) содержат неизвестные параметры α и $\mathbf{\Gamma}$, которые можно определить из условия самосогласованности теории в форме, рассмотренной в [7,8]. А именно, решив задачу об обтекании частицы потоком, управляемым уравнениями (2.10), нетрудно вычислить силу (2.8) и найти тем самым представление для коэффициента D', который будет зависеть от α как от параметра. Вычисляя далее α в соответствии с определением в (2.9), придем к алгебраическому (трансцендентному) уравнению для комплексной величины α, решение которого позволяет полностью замкнуть теорию. Действительно, остающаяся неизвестной величина $\mathbf{\Gamma}$ может быть вычислена, если α известна в соответствии с формулой (2.9).

3. Вычисление силы и момента, действующих на частицу. Рассмотрим обтекание некоторой пробной частицы, помещенной в жидкость, содержащую другие частицы, в предположении, что течение определяется уравнениями (2.10). Пусть скорость и давление в потоке, невозмущенном этой частицей, есть $\mathbf{U}_0(\mathbf{r})e^{i\omega t}$, $P_0(\mathbf{r})e^{i\omega t}$. Выбирая начало координат в центре твердой сферической частицы, имеем задачу для амплитуд скорости и давления

$$(\Delta - \beta^2)\mathbf{U} = \mu_0^{-1}\nabla R, \qquad \nabla\mathbf{U} = 0, \qquad R = P + \Psi \tag{3.1}$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{\Omega}\times\mathbf{r} \quad (r = a); \qquad \mathbf{U}\to\mathbf{U}_0 \quad (r\to\infty)$$

---

[1] Выражения для величины $\mathbf{G}_\omega^{(j)}$, использованные в [7,8], несколько различаются. Однако можно показать, что это различие имеет высший порядок по ε и потому в рамках нулевого приближения несущественно.

Аналогично, для обтекания жидкой (газообразной) сферы имеем следующую задачу:

$$\begin{gathered}(\Delta-\beta^2)\mathbf{U}^{(0)}=\mu_0^{-1}\nabla R^{(0)}, \qquad \nabla\mathbf{U}^{(0)}=0, \qquad R^{(0)}=P^{(0)}+\Psi \\ (\Delta-\gamma^2)\mathbf{U}^{(1)}=\mu_0^{-1}\nabla R^{(1)}, \qquad \nabla\mathbf{U}^{(1)}=0, \qquad R^{(1)}=P^{(1)}+\Phi+id_0Wr \qquad (3.2) \\ \gamma^2=id_1\mu_1^{-1}\omega; \quad \mathbf{U}^{(0)}=\mathbf{U}^{(1)}, \quad (\sigma^{(0)}\mathbf{n})_\tau=(\sigma^{(1)}\mathbf{n})_\tau \quad (r=a) \\ \mathbf{U}^{(0)}\to\mathbf{U}_0 \quad (r\to\infty); \qquad \mathbf{U}^{(1)}=O(1), \qquad R^{(1)}=O(1) \quad (r\to 0)\end{gathered}$$

Индексы нуль и единица относятся к областям вне и внутри частицы, σ — тензор напряжений, $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности частицы, индекс τ означает касательную составляющую напряжений.

Нетрудно записать также условие непрерывности нормальных напряжений на поверхности частицы. Однако это условие, необходимое для определения малых отклонений формы капли или пузырька от сферической, совершенно несущественно при решении гидродинамической задачи об их обтекании.

Представим $\mathbf{U}_0(\mathbf{r})$, $R_0(\mathbf{r})$ в виде рядов по базисным векторным функциям, построенным на сферических функциях,

$$\mathbf{U}_0(\mathbf{r})=\sum_{m=0}^{\infty}F_m\frac{\mathbf{r}}{r}s_m+G_mr\nabla s_m+H_m\mathbf{r}\times\nabla s_m, \qquad R_0(\mathbf{r})=\mu_0\sum_{m=0}^{\infty}L_ms_m \qquad (3.3)$$

Решения задач (3.1) или (3.2) ищем в виде рядов, аналогичных (3.3), с коэффициентами $f_m^{(0)}$, $g_m^{(0)}$, $h_m^{(0)}$ и $l_m^{(0)}$ вне частицы и $f_m^{(1)}$, $g_m^{(1)}$, $h_m^{(1)}$ и $l_m^{(1)}$ внутри нее. В этих рядах s_m — сферическая функция m-го порядка, включающая $2m+1$ членов, соответствующих главной и присоединенным функциям Лежандра. Например, под символом A_ms_m понимается сумма

$$A_ms_m=A_m^{(0)}P_m+\sum_{m'=1}^{m}A_{m+}^{(m')}P_m^{(m')}\cos m'\varphi+A_{m-}^{(m')}P_m^{(m')}\sin m'\varphi$$

и т. п. Коэффициенты в (3.3) и рядах для решений (3.1), (3.3) зависят только от r.

Подставляя ряды (3.3) в (3.1), применяя теорему Эйлера об однородных функциях и учитывая, что $\Delta s_m=-m(m+1)r^{-2}s_m$, получаем следующую систему уравнений для коэффициентов в (3.3):

$$\begin{gathered}F_m''+\frac{2}{r}F_m'-\frac{m(m+1)+2}{r^2}F_m-\beta^2F_m+\frac{2m(m+1)}{r^2}G_m-L_m'=0 \\ G_m''+\frac{2}{r}G_m'-\frac{m(m+1)}{r^2}G_m-\beta^2G_m+\frac{2}{r^2}F_m-\frac{1}{r}L_m=0 \qquad (3.4) \\ F_m'+\frac{2}{r}F_m-\frac{m(m+1)}{r^2}G_m=0, \\ H_m''+\frac{2}{r}H_m'-\frac{m(m+1)}{r^2}H_m-\beta^2H_m=0\end{gathered}$$

(штрих означает здесь дифференцирование по r). Коэффициенты $f_m^{(0)}$, $g_m^{(0)}$, $h_m^{(0)}$ и $l_m^{(0)}$ удовлетворяют таким же уравнениям, а коэффициенты $f_m^{(1)}$, $g_m^{(1)}$, $h_m^{(1)}$ и $l_m^{(1)}$ — уравнениям, отличающимся от (3.4) только заменой β^2 на γ^2.

Граничные условия задачи (3.1), налагаемые при $r = a$, приводят к следующим соотношениям между коэффициентами:

$$f_m^{(0)} + F_m = 0 \qquad g_m^{(0)} + G_m = 0, \qquad h_m^{(0)} + H_m = -a\Omega\delta_{1m} \tag{3.5}$$

Аналогично: из граничных условий задачи (3.2) получаем

$$\begin{gathered} f_m^{(0)} + F_m = f_m^{(1)} = 0 \qquad g_m^{(0)} + G_m = g_m^{(1)}, \qquad h_m^{(0)} + H_m = h_m^{(1)} \\ g_m^{(0)\prime} + G_m{}' = \varkappa g_m^{(1)\prime} + a^{-1}(1-\varkappa)\, g_m^{(1)} \\ h_m^{(0)\prime} + H_m{}' = \varkappa h_m^{(1)\prime} + a^{-1}(1-\varkappa)\, h_m^{(1)}, \qquad \varkappa = \mu_1 / \mu_0 \end{gathered} \tag{3.6}$$

Из (3.1) и (3.2) легко получить $\Delta R = 0$, $\Delta R^{(k)} = 0$ $(k = 0, 1)$, откуда следует $l_m^{(0)} = (m_m^{(0)} r^m + n_m^{(0)} r^{-m-1})\,\beta^2$

$$L_m = (M_m + N_m r^{-m-1})\,\beta^2, \qquad l_m^{(1)} = (m_m^{(1)} r^m + n_m^{(1)} r^{-m-1})\,\gamma^2$$

Подставляя это и выражение для G_m, получаемое из третьего уравнения (3.4), в первое уравнение, имеем

$$F_m{}'' + \frac{4}{r} F_m{}' - \frac{(m-1)(m+2)}{r^2} F_m - \beta^2 F_m = m\beta^2 M_m r^{m-1} - \frac{m+1}{r^{m+2}} \beta^2 N_m$$

Решение этого уравнения есть сумма частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения. После вычислений имеем

$$\begin{gathered} F_m = A_m S_m(r) + B_m Q_m(r) - m M_m r^{m-1} + (m+1) N_m r^{-m-2} \\ S_m = 2^m \zeta^{m-1} \frac{d^m}{d(\zeta^2)^m} \frac{\operatorname{sh}\zeta}{\zeta}, \qquad Q_m = (-2)^m \zeta^{m-1} \frac{d^m}{d(\zeta^2)^m} \frac{e^{-\zeta}}{\zeta} \\ \zeta = \beta r \end{gathered} \tag{3.7}$$

При $m = 0$ решения, ограниченного в точке $r = 0$, не существует. При $m \geqslant 1$ функции $S_m(r)$ из (3.7) не имеют особенностей в этой точке. Напротив, функции $Q_m(r)$, расходящиеся при $r \to 0$, исчезают при $r \to \infty$. Из третьего уравнения (3.4) получаем

$$\begin{gathered} G_m = \frac{2}{m(m+1)} A_m \left(S_m + \frac{r}{2} S_m{}'\right) + \frac{2}{m(m+1)} B_m \left(Q_m + \frac{r}{2} Q_m{}'\right) - \\ - M_m r^{m-1} - N_m r^{-m-2} \qquad (m \neq 0) \end{gathered}$$

Решением последнего уравнения (3.4) будет

$$H_m = C_m r S_m + D_m r Q_m$$

Учитывая условия ограниченности решения, записанные в (3.1) и (3.2), получаем наиболее общие допустимые представления для искомых коэффициентов в форме

$$\begin{gathered} F_m = A_m S_m - m M_m r^{m-1}, \qquad f_m^{(1)} = a_m^{(0)} S_m - m m_m^{(1)} r^{m-1} \\ G_m = \frac{2}{m(m+1)} A_m \left(S_m + \frac{r}{2} S_m{}'\right) - M_m r^{m-1}, \qquad H_m = C_m r S_m \\ g_m^{(1)} = \frac{2}{m(m+1)} a_m^{(1)} \left(S_m + \frac{r}{2} S_m{}'\right) - m_m^{(1)} r^{m-1}, \qquad h_m^{(1)} = c_m^{(1)} r S_m \\ f_m^{(0)} = b_m^{(0)} Q_m - (m+1)\, m_m^{(0)} r^{-m-2}, \qquad h_m^{(0)} = d_m^{(0)} r Q_m \\ g_m^{(0)} = \frac{2}{m(m+1)} b_m^{(0)} \left(Q_m + \frac{r}{2} Q_m{}'\right) - n_m^{(0)} r^{-m-2}, \qquad l_m^{(0)} = \beta^2 n_m^{(0)} r^{-m-1} \\ L_m = \beta^2 M_m r^m, \qquad l_m^{(1)} = \gamma^2 m_m^{(1)} r^m \qquad (m \geqslant 1) \end{gathered} \tag{3.8}$$

Здесь A_m, C_m, M_m, $b_m^{(0)}$, $d_m^{(0)}$, $n_m^{(0)}$, $a_m^{(1)}$, $c_m^{(1)}$ и $m_m^{(1)}$ — постоянные, причем A_m, C_m и M_m описывают течение, невозмущенное пробной частицей, и задаются априори, в то время как остальные постоянные определяются из уравнений (3.5) или (3.6). Величины S_m и Q_m в определениях первых шести коэффициентов — функции от βr, последних трех — от γr.

Напряжения, действующие на элементарную площадку с вектором нормали $\mathbf{n} = \mathbf{r} / r$ в поле (3.3) в отсутствие внешнего поля сил с потенциалом Ψ, представятся в форме

$$\sigma\mathbf{n} = \mu_0 \sum_{m=0}^{\infty} \left\{(2F_m'-L_m)\frac{\mathbf{r}}{r} s_m + \left(G_m' - \frac{G_m}{r} + \frac{F_m}{r}\right) r\nabla s_m + \right.$$
$$\left. + \left(H_m' - \frac{H_m}{r} \mathbf{r} \times \nabla s_m\right)\right. \qquad (3.9)$$

Первое слагаемое в (3.9) дает нормальное, а два последующих — касательное напряжение. Аналогичную форму имеют напряжения и в полях, отличающихся от (3.3) заменой коэффициентов F_m, G_m, H_m и L_m на $f_m^{(0)}$, $g_m^{(0)}$, $h_m^{(0)}$ и $l_m^{(0)}$. Для вычисления силы и момента, действующих на частицу при $\Psi = 0$, нужно проинтегрировать величину $\sigma\mathbf{n}$ из (3.9) или $\mathbf{r} \times \sigma\mathbf{n}$ по поверхности частицы — сфере радиуса a.

Отметим, что слагаемые в выражениях типа (3.9), пропорциональные векторам $\mathbf{r} \times \nabla s_m$, при таком интегрировании исчезают, а из остальных слагаемых в (3.9) отличный от нуля вклад дают только члены, соответствующие $m = 1$. Поэтому при рассмотрении реакции потока на тело достаточно найти только постоянные в (3.8) с индексом $m = 1$. При этом постоянные A_1, C_1 и M_1, характеризующие невозмущенное течение, легко могут быть выражены через $\mathbf{U}_0(\mathbf{r})$ и ее производные в точке $r = 0$.

После вычислений и некоторых преобразований для силы $\mathbf{F}$ и момента $\mathbf{M}$, действуюших на твердую частицу при $\Psi = 0$, получим следующие представления:

$$\mathbf{F} = 6\pi\mu_0 a (1 + \xi + {}^1/_3\xi^2)\mathbf{U}_0(0) - 2\pi\mu_0 a^3 [1 - 3\xi^{-2}(e^\xi - 1 - \xi)]\,\Delta\mathbf{U}_0(0) \qquad (3.10)$$
$$M = 4\pi\mu_0 a^3 e^\xi (1 + \xi)^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{U}_0(0) - 8\pi\mu_0 a^3 (1 + \xi + {}^1/_3\xi^2)(1 + \xi)^{-1}\Omega$$
$$\xi = \beta a$$

Напомним, что здесь речь идет об амплитудах сил и моментов, действующих на частицу в гармоническом потоке. Значение силы и момента, действующих в произвольном нестационарном течении, получаются из приведенных ниже значений соответствующих амплитуд в результате обратного преобразования Фурье.

Полная сила $\mathbf{F}_t$, действующая на твердую сферу как со стороны обтекающего потока, так и со стороны поля давления — Ψ (см. (2.10)), представится в виде

$$\mathbf{F}_t = \mathbf{F} - {}^4/_3\pi a^3 (\nabla\Phi + id_0\omega\mathbf{W} + \mathbf{\Gamma}) \qquad (3.11)$$

Второй член в (3.11) представляет собой обобщенную силу Архимеда, действующую на частицу во «внешнем» поле с потенциалом Ψ и обусловленную истинным внешним полем Φ, силами инерции в избранной системе координат и добавкой Γ к массовым силам, специфичной для полидисперсных систем.

Формулы (3.10) и (3.11) содержат в качестве частных случаев все известные формулы для F и M, действующих на единичную частицу в стационарном или гармоническом потоке при малых числах Рейнольдса. В частности, при $\beta = 0$ получаем известную формулу Факсена для силы в стационарном неоднородном потоке, при $\beta = id_0\omega\mu_0^{-1}$ и $\mathrm{U}_0 = -\mathrm{W} = \mathrm{const}$ — известное выражение для силы, действующей на единичную частицу, совершающую гармонические колебания в неподвижной жидкости [9], и т. п. Отметим, что помимо силы (3.11) на частицу действуют еще сила со стороны внешнего массового поля и инерционная сила.

Для силы и момента, действующих на жидкую сферу, после вычислений получаем выражения

$$\mathbf{F} = 6\pi\mu_0 a\,[(1+\xi)\,q + {}^1/_3\,\xi^2]\,\mathbf{U}_0(0) - 2\pi\mu_0 a^3\,[1 - 3\xi^{-2}(e^{\xi} - 1 - \xi)\,q]\,\Delta\mathbf{U}_0(0)$$

$$\mathbf{M} = 4\pi\mu_0 a^3 \frac{\varkappa\eta S_2(\eta)}{\xi^3\,[\xi S_1(\eta)\,Q_2(\xi) + \varkappa\eta Q_1(\xi)\,S_2(\eta)]}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{U}_0(0) \qquad (3.12)$$

$$q = \frac{\varkappa\eta^2 S_1(\eta) + 2\,(1-\varkappa)\,\eta S_2(\eta)}{\varkappa\eta^2 S_1(\eta) + [1 + \xi + 2\,(1-\varkappa)]\,\eta S_2(\eta)} \qquad (\eta = \gamma a)$$

Функции S_m и Q_m определены в (3.7). Выражение для F из (3.12) отличается от соответствующего выражения в (3.10) только наличием множителя q. Из (3.12) легко получаются известные выражения для F и M, действующих на изолированную каплю. Например, при $\xi = \eta = 0$ нетрудно получить обобщение формулы Факсена, исследованное в [10]. Для силы $\mathbf{F}_t$ по-прежнему справедливо соотношение (3.11).

Соотношения (3.10)—(3.12) полностью определяют реакции потока на твердую и жидкую частицы, если только известна величина α или параметр $\xi = \beta a$, зависящий от α и входящий в указанные соотношения. Ниже рассматривается вычисление последней величины для суспензий твердых частиц и эмульсий капель или пузырьков.

Для простоты рассмотрим монодисперсную систему частиц (анализ полидисперсной системы с произвольной функцией распределения частиц по размерам не вносит принципиальных осложнений). В этом случае

$$\mu_0\alpha = nD'(a) \qquad (3.13)$$

где n — счетная концентрация частиц. Для нахождения ξ используем условие самосогласованности, которое в соответствии с (3.10), (3.12), (3.13) и п. 2 примет вид

$$6\pi\mu_0 a\,[(1+\xi)q + {}^1/_3\xi^2] = D'(a) \qquad (3.14)$$

Здесь для твердых частиц $q = 1$, для капель или пузырьков q зависит от ξ и определена в (3.12).

Умножая обе части (3.14) на объемную концентрацию ρ и используя (3.13), получаем

$$6\pi\mu_0 a\rho\,[(1+\xi)q + {}^1/_3\xi^2] = {}^4/_3\pi\mu_0\,(\alpha a^2)a$$

Выражая α через β и далее через ξ, имеем

$$\alpha a^2 = \xi^2 - i\omega', \quad \omega' = \omega / \omega_0, \quad \omega_0 = \nu_0 a^{-2}, \quad \nu_0 = \mu_0 / d_0$$

Используя эти соотношения, получаем уравнение для ξ

$$(1 - {}^3/_2\rho)\xi^2 = i\omega' + {}^9/_2\rho\,(1 + \xi)q \tag{3.15}$$

Если частицы твердые, то (3.15) представляет собой квадратное уравнение относительно ξ, его решение имеет вид

$$\xi = {}^3/_2\,(2-3\rho)^{-1}\,\{3\rho + [8\rho - 3\rho^2 + {}^8/_9 i\,(2-3\rho)\omega']^{1/2}\} \tag{3.16}$$

и полностью определяет величины (3.10) и (3.11). При $\omega' = 0$ из (3.16) получаем известный результат [7].

Для жидкой или газообразной частицы уравнение (3.15) из (3.12) кубическое и, как легко показать, имеет единственный корень с q положительной действительной частью. Можно показать также, что при $\omega' = 0$ этот корень всегда меньше значения ξ для твердых частиц, определяемого формулой (3.16).

При $\omega' \to 0$ из (3.15) имеем, в частности, уравнение

$$\xi^2 = \frac{9\rho}{2 - 3\rho}\,\frac{(2 + 3\varkappa)(1 + \xi)}{\xi + 3 + 3\varkappa} \tag{3.17}$$

Напротив, при $\omega' \to \infty$ жидкие и газообразные частицы начинают вести себя (в смысле взаимодействия их с потоком) как твердые, причем это утверждение тем точнее, чем больше $\varkappa$ и $\lambda = d_1 / d_0$.

При $\varkappa \to \infty$ (т. е. для стационарного течения суспензии твердых частиц) из (3.12) имеем следующее выражение для момента:

$$\mathbf{M} = 4\pi\mu_0 a^3 \frac{i\omega'\lambda e^{\xi}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{U}_0(0)}{15\,(1 + \xi + {}^1/_2\xi^2) + i\omega\lambda\,(1 + \xi)}, \qquad \lambda = \frac{d_1}{d_0}$$

В стационарном течении имеем $\mathbf{M} = 0$. В этом случае частица будет вращаться с угловой скоростью (см. (3.10))

$$\Omega = \frac{1}{2}\,\frac{e^{\xi}}{1 + \xi + {}^1/_3\xi^2}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{U}_0(0) \tag{3.18}$$

Подчеркнем, что эта величина зависит не только от значения ротора скорости невозмущенного течения жидкости в точке, занятой центром частицы, но и от ξ, которая, в свою очередь, существенно зависит от концентрации частиц в системе и физических параметров фаз. Последнее весьма важное обстоятельство совершенно не учитывается при формулировке уравнений сохранения момента импульса фаз для дисперсной системы, рассматриваемой как среда с внутренним вращением.

В заключение отметим, что развитый метод исследования течений мягких дисперсных систем позволяет провести дальнейшее усреднение по физическому объему системы с тем, чтобы получить замкнутую систему уравнений для «макроскопических» параметров, характеризующих среднее движение фаз как взаимопроникающих взаимодействующих сплошных сред (см. обсуждение и вывод модифицированных уравнений Дарси в [8]).

Поступила 9 XII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Brenner H. Rheology of two-phase systems. In: Annual Review of Fluid Mechanics, Palo Alto, Calif., 1970, vol. 2, p. 137—176.
2. Cox R. G. Brenner H. The rheology of a suspension of particles in a Newtonian fluid. Chem. Engng Sci., 1971, vol. 26, No. 1.
3. Buyevich Yu. A. Statistical hydromechanics of disperse systems. Part. I. Physical background and general equations. J. Fluid Mech., 1971, vol. 49, pt. 3.
4. Brinkman H. C. A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles. Appl. Scient. Res. A, 1947, vol. I, No. 1.
5. Happel J., Brenner H. Low Reynolds number hydrodynamics. N. Y., Prentice Hall, 1965.
6. Yaron I., Gal — Or B. On motion of bubbles and drops. Canad. J. Chem. Engng, 1970, vol. 48, No. 10.
7. Tam C. K. W. The drag on a cloud of spherical particles in low Reynolds number flow. J. Fluid Mech., 1969, vol. 38, pt. 3.
8. Буевич Ю. А. О взаимодействии коллектива частиц с пульсирующей жидкостью при малых числах Рейнольдса. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 5.
9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
10. Hetsroni G., Haber S. The flow in and around a droplet or bubble submerged in an unbouned arbitrary velocity field. Rheol. Acta, 1970, vol. 9, No. 4.