Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 532.72

ДИФФУЗИЯ К ЧАСТИЦЕ В СЛУЧАЕ СДВИГОВОГО ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ. ПРИБЛИЖЕНИЕ ДИФФУЗИОННОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Ю. П. Гупало, Ю. С. Рязанцев

(Москва)

Рассматривается установившаяся конвективная диффузия растворенного в потоке вещества к поверхности частицы при однородном сдвиговом течении вязкой жидкости. В приближении диффузионного пограничного слоя получено решение задач о диффузии к твердой сфере и к сферической капле.

Определение диффузионного притока вещества (тепла) к поверхности движущейся частицы представляет собой одну из основных задач физико-химической гидродинамики, возникающих при разработке теории горения, химических реакторов, особенно реакторов с взвешенным слоем, теории коагуляции и флокуляции дисперсных систем, осаждения аэрозолей и в ряде других приложений.

Полученные к настоящему времени аналитические решения охватывают лишь случай ламинарного обтекания частиц прямолинейным и однородным на бесконечности потоком при малых числах Рейнольдса [1–6].

В данной работе получено приближенное аналитическое выражение диффузионного потока вещества на поверхность сферической частицы, находящейся в однородном ламинарном сдвиговом потоке. Для поля сдвигового течения используются выражения, полученные в стоксовом приближении в работе [7]. Предполагается, что число Пекле велико, так что уравнение конвективной диффузии может быть записано в приближении пограничного слоя.

1. Постановка задачи. Рассмотрим полностью увлекаемую потоком сферическую частицу в вязкой несжимаемой жидкости в случае произвольного установившегося однородного сдвигового течения. В прямоугольной декартовой системе координат, связанной с частицей, распределение скоростей невозмущенного течения (на больших расстояниях от частицы) будет линейной функцией координат

$$\mathbf{v}_0 = (\boldsymbol{\alpha}\mathbf{r}) \tag{1.1}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, $\boldsymbol{\alpha}$ — постоянный симметричный тензор второго ранга, который без потери общности можно записать в виде

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{Vmatrix} -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 2\alpha \end{Vmatrix} \tag{1.2}$$

Для поля течения вокруг сферы, соответствующего условию на бесконечности (1.1), (1.2), используем результат, полученный Эйнштейном для твердой частицы в пренебрежении инерционными членами в уравнениях Навье — Стокса и обобщенный Тейлором [7] на случай капли.

Функция тока в сферических координатах имеет вид

$$\psi=\alpha a^3\left(\frac{r^3}{a^3}-\frac{5}{2}M_1+\frac{3}{2}M_2\frac{a^2}{r^2}\right)\sin^2\theta\cos\theta \tag{1.3}$$

$$M_1=\frac{\beta+{}^2/_5}{\beta+1},\qquad M_2=\frac{\beta}{1+\beta}$$

$$\left(v_r=\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta},\qquad v_\theta=-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)$$

Здесь a — радиус частицы, v_r, v_θ — составляющие скорости жидкости, β — отношение вязкостей жидкостей внутри и вне капли (для твердой частицы $\beta=\infty$).

Найдем распределение диффундирующего вещества (тепла) в жидкости и диффузионный поток на поверхность сферической частицы в поле течения (1.3) в предположении, что на ее поверхности происходит полное поглощение вещества, концентрация которого вдали от сферы постоянна. Будем считать, что число Пекле $P=\alpha a^2/D\gg 1$ (D — коэффициент диффузии), тогда диффузионным переносом вещества вдоль поверхности частицы можно пренебречь по сравнению с диффузионным переносом вещества по нормали к ней.

Уравнение стационарной конвективной диффузии в пограничном слое и граничные условия можно записать в виде

$$v_r\frac{\partial c}{\partial r}+\frac{1}{r}v_\theta\frac{\partial c}{\partial\theta}=D\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial c}{\partial r}\right) \tag{1.4}$$

$$r=a,\quad c=0;\quad r\to\infty,\quad c=c_0$$

Здесь c — концентрация. Перейдя от переменных $r\theta$ к переменным $\psi\theta$, сведем задачу (1.4) к следующей:

$$\frac{\partial c}{\partial\theta}=-D\sin\theta\frac{\partial}{\partial\psi}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial c}{\partial\psi}\right) \tag{1.5}$$

$$\psi=0,\quad c=0;\quad \psi\to\infty,\quad c=c_0 \tag{1.6}$$

Чтобы завершить формулировку задачи в новых переменных, необходимо еще одно условие, которое может быть получено на основании следующих соображений. Поток жидкости вдоль траекторий, выходящих из бесконечности и заканчивающихся в некоторых точках поверхности сферы (назовем их траекториями натекания) максимально обогащен диффундирующим веществом. Поэтому концентрацию на траекториях натекания следует положить равной концентрации на бесконечности, т. е. c_0.

Рассмотрим поле течения (1.3). Видно, что все траектории натекания — лучи $\theta=\theta_0$, $a<r<\infty$, причем их расположение зависит от знака величины α: при $\alpha>0$ они заполняют всю плоскость $\theta=\pi/2$ вне сферы; при $\alpha<0$ имеются всего лишь две траектории натекания — лучи $\theta=0$ и $\theta=\pi$, $a<r<\infty$. Таким образом, в качестве дополнительного условия следует принять

$$\theta=\theta_0,\qquad c=c_0\qquad (r>a) \tag{1.7}$$

Здесь величина θ_0 выбирается следующим образом:

$$\theta_0 = \pi / 2 \quad \text{при } \alpha > 0 \tag{1.8}$$

$$\theta_0 = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant \theta \leqslant \pi / 2 \\ \pi, & \pi / 2 \leqslant \theta \leqslant \pi \end{cases} \quad \text{при } \alpha < 0 \tag{1.9}$$

Необходимо иметь в виду, что условие (1.7) носит предельный характер и должно выполняться при $P \to \infty$.

При решении задачи (1.5)—(1.9) следует воспользоваться разложением величины $r^2 \partial\psi / \partial r$ в окрестности сферы в ряд по ψ, что позволяет свести (1.5) к уравнению теплопроводности. Главные члены этого разложения в случае твердой частицы и капли имеют различный вид, поэтому эти случаи будут рассмотрены отдельно.

2. Диффузия к твердой сфере. Вблизи поверхности сферы функция тока (1.3) имеет вид

$$\psi = {}^{15}/_{2}\alpha a\,(r - a)^2 \sin^2\theta \cos\theta + O\,((r - a)^3)$$

Отсюда получим

$$r^2 \frac{\partial\psi}{\partial r} = 30^{1/2} a^{5/2} \sin\theta\,(\psi\alpha\cos\theta)^{1/2}\,\mathrm{sgn}\,(\alpha\cos\theta) + O\,(\psi) \tag{2.1}$$

Ограничившись первым членом разложения, подставим (2.1) в (1.5) и введем новую переменную

$$t = 30^{1/2} D\,|\,\alpha\,|^{1/2} a^{5/2} A\,(\theta)\,\mathrm{sgn}\,\alpha \tag{2.2}$$

$$A\,(\theta) = \mathrm{sgn}\,(\cos\theta) \int\limits_{\theta}^{\theta_0} \sin^2\theta\,|\cos\theta\,|^{1/2} d\theta \tag{2.3}$$

В результате задача (1.5)—(1.9) сведется к уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial}{\partial\psi}\left(\psi^{1/2} \frac{\partial c}{\partial\psi}\right)$$

с граничными условиями (1.6) и начальным условием, вытекающим из (1.7), (2.2), (2.3): $t = 0$, $c = c_0$. Решение этой задачи имеет вид

$$c = c_0 \left(\frac{4}{9}\right)^{1/3} \Gamma^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) \int\limits_0^{\eta} \exp\left(-\frac{4}{9}\eta^3\right) d\eta \qquad \left(\eta = \frac{|\,\psi\,|^{1/2}}{t^{1/3}}\right) \tag{2.4}$$

Формула (2.4) вместе с (2.2), (2.3) описывает распределение концентрации вокруг сферы. Диффузионный поток на сферу равен

$$j = D\left(\frac{\partial c}{\partial r}\right)_{r=a} = c_0 \frac{(5/3)^{1/3}}{\Gamma\,(1/3)} \left(\frac{\alpha D^2}{a}\right)^{1/3} \sin\theta\,|\cos\theta\,|^{1/2} A^{-1/3}(\theta) \tag{2.5}$$

Интеграл A (θ) в силу (2.3), (1.8), (1.9) можно представить в следующем виде:

$$A\,(\theta) = \begin{cases} \Omega\,(\theta), & 0 \leqslant \theta \leqslant \pi / 2 \\ \Omega\,(\pi - \theta) & \pi / 2 \leqslant \theta \leqslant \pi \end{cases} \quad \text{при } \alpha > 0 \tag{2.6}$$

$$A\,(\theta) = \begin{cases} \Omega\,(\theta) - \Omega\,(0), & 0 \leqslant \theta \leqslant \pi / 2 \\ \Omega\,(\pi - \theta) - \Omega\,(0), & \pi / 2 \leqslant \theta \leqslant \pi \end{cases} \quad \text{при } \alpha < 0 \tag{2.7}$$

Здесь

$$\Omega(\theta) = \int_\theta^{\pi/2} \sin^2\theta \cos^{1/2}\theta d\theta = \Omega(0) + \frac{2}{5}\sin\theta\cos^{3/2}\theta - \frac{4}{5}E\left(\frac{\theta}{2}, \sqrt{2}\right)$$

$$\Omega(0) = {}^1/_5\,({}^1/_2\pi)^{3/2}\,\Gamma^{-2}({}^5/_4) \tag{2.8}$$

где $E(\theta/2, \sqrt{2})$ — эллиптический интеграл второго рода.

Толщина диффузионного пограничного слоя оценивается по формуле

$$\delta = Dc_0 / j \tag{2.9}$$

Величина $\delta \to \infty$ при $\theta \to 0$ и $\theta \to \pi$ (для $\alpha > 0$) и при $\theta \to \pi/2$ (для $\alpha < 0$). Это означает, что здесь толщина диффузионного пограничного слоя не мала по сравнению с радиусом сферы, поэтому в окрестности указанных предельных значений θ использованный метод решения неприменим. Из (2.5)—(2.9) видно, что эти окрестности тем меньше, чем меньше числа Пекле. Заметим также, что их вклад в полный поток на частицу несуществен.

Полный диффузионный поток на частицу получим интегрированием (2.5) по ее поверхности с использованием соотношений (2.6)—(2.8). Вычисления показывают, что полный поток не зависит от знака α и равен

$$I = \frac{6\pi\,({}^5/_3)^{1/3}}{\Gamma({}^4/_3)}\,\Omega^{2/3}(0)\,c_0(|\alpha|D^2a^5)^{1/3} = ({}^9/_5)^{1/3}\,\pi^2\Gamma^{-1}({}^4/_3)\Gamma^{-4/3}({}^5/_4)\,c_0(|\alpha|D^2a^5)^{1/3} \approx$$
$$\approx 15.3c_0(|\alpha|D^2a^5)^{1/3} \tag{2.10}$$

3. Диффузия к капле. Вблизи поверхности сферической капли в силу (1.3)

$$r^2\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{3}{\beta+1}\alpha a^4\sin^2\theta\cos\theta + O(\psi) \tag{3.1}$$

Аналогично п. 2 введем новую переменную

$$t = \frac{3}{\beta+1}D\alpha a^4 A(\theta), \qquad A(\theta) = \int_\theta^{\theta_0}\sin^3\theta\cos\theta\,d\theta \tag{3.2}$$

Тогда уравнение (1.5) сведется к обычному уравнению теплопроводности, решение которого с граничными условиями (1.6) и начальным условием, соответствующим (1.7) — (1.9), имеет вид

$$c = c_0\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\eta \exp(-\eta^2)\,d\eta \qquad \left(\eta = \frac{|\psi|}{2\sqrt{t}}\right) \tag{3.3}$$

Учитывая определение θ_0 в силу (1.7) — (1.9) и используя (3.2), получим

$$4A(\theta) = \begin{cases} 1 - \sin^4\theta & \text{при } \alpha > 0 \\ -\sin^4\theta & \text{при } \alpha < 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

Диффузионный поток на поверхность капли равен

$$j = D\left(\frac{\partial c}{\partial r}\right)_{r=a} = c_0\left[\frac{3D\alpha}{\pi(1+\beta)A(\theta)}\right]^{1/2}\sin^2\theta\,|\cos\theta| \tag{3.5}$$

Видно, что в отличие от случая твердой сферы диффузионный поток на каплю не зависит от размера капли.

Интегрируя (3.6) по поверхности капли с учетом (3.4), (3.5), получим, что независимо от знака α полный поток на каплю равен

$$I = 4\sqrt{3\pi}\left(\frac{D|\alpha|}{1+\beta}\right)^{1/2}c_0a^2 \tag{3.6}$$

Рассмотренный случай обтекания, как и обтекание прямолинейным однородным потоком, наблюдается лишь при некотором частном виде движения частицы. Реализацией такого течения является, например, поле ламинарного обтекания полностью увлекаемой потоком частицы, движущейся по оси диффузора (конфузора). Формулы (2.10), (3.6) могут служить исходными при получении приближенных формул для более сложных течений. Следует отметить, что сдвиговое течение типа (1.1) в случае произвольного тензора α поворотом осей координат представляется в виде суммы трех тензоров вида (1.2).

Поступила 10 II 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959.
2. Acrivos A., Taylor T. D. Heat and mass transfer from single spheres in stokes flow. Phys. Fluids. 1962, vol. 5, No. 4, p. 378—394.
3. Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С. Диффузия к твердой сферической частице в потоке вязкой жидкости при конечных числах Рейнольдса. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 6.
4. Головин А. М., Иванов М. Ф. Движение пузыря в вязкой жидкости. ПМТФ, 1971, № 1.
5. Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С. Массо- и теплообмен сферической частицы в ламинарном потоке вязкой жидкости. ПММ, 1971, т. 35, вып. 2.
6. Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С., Чалюк А. Т. Диффузия к капле при больших числах Пекле и конечных числах Рейнольдса. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 2.
7. Taylor G. I. Viscosity of a fluid containing small drops of another fluid. Proc. Roy. Soc. A. 1932, vol. 138, No. 834, p. 41—48.