Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 532.526

ОБ ОБРАЗОВАНИИ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО СИММЕТРИЧЕСКОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ПРИ ВНЕЗАПНОМ ВОЗНИКНОВЕНИИ ДВИЖЕНИЯ

В. Н. Самохин

(Москва)

Изучается образование пограничного слоя на теле, которое мгновенно начинает двигаться в покоящейся несжимаемой жидкости. При определенных условиях доказывается существование и единственность решения соответствующей краевой задачи для системы уравнений Прандтля на некотором промежутке времени $0 \leqslant t \leqslant T$ вдоль всего обтекаемого тела. Указывается способ построения приближенных решений и доказывается их сходимость.

Эта задача рассматривалась также в работе Блазиуса [1]. Предлагаемый им метод решения задачи состоит в нахождении функции тока в виде асимптотического ряда по степеням времени. Им выписаны явно первые два члена разложения. Краткое изложение этих результатов и математическая постановка задачи имеется в [2, 3]. Задача о развитии пограничного слоя при постепенном разгоне изучена в работах О. А. Олейник [4, 5].

Для плоскопараллельного симметрического обтекания тела задача об образовании пограничного слоя при мгновенном возникновении движения приводит к рассмотрению системы уравнений

$$u_t + uu_x + vu_y = -p_x + \nu u_{yy}, \qquad u_x + v_y = 0 \tag{1}$$

в области D_T $\{0 \leqslant t \leqslant T,\ 0 \leqslant x \leqslant X,\ 0 \leqslant y < \infty\}$ с условиями

$$u|_{t=0} = U(0, x), \qquad u|_{y=0} = 0 \quad \text{при } t > 0, \qquad u|_{x=0} = 0$$
$$v|_{y=0} = v_0(t, x), \qquad u \to U(t, x) \quad \text{при } y \to \infty \tag{2}$$

Здесь u и v — компоненты скорости, $U(t, x)$ — продольная компонента скорости внешнего потока, $U(t, 0) = 0$, $U(t, x) > 0$ при $x > 0$ и $-p_x = U_t + UU_x$.

После замены независимых переменных

$$\tau = \sqrt{t}, \quad \xi = x, \quad \eta = u / U \tag{3}$$

и введения новой неизвестной функции

$$w(\tau, \xi, \eta) = \sqrt{t} u_y / U \tag{4}$$

система (1) с условиями (2) сведется к одному уравнению

$$\nu w^2 w_{\eta\eta} - {}^1/_2 \tau w_\tau - \tau^2 \eta U w_\xi + A w_\eta + B w = 0, \tag{5}$$

в области $\Omega\{0\leqslant\tau\leqslant\sqrt{T},\ \ 0\leqslant\xi\leqslant X,\ \ 0\leqslant\eta\leqslant 1\}$ с граничными условиями

$$w|_{\eta=1}=0 \quad (\nu w w_\eta - \tau v_0 w + C)|_{\eta=0}=0 \tag{6}$$

$$A=\tau^2(\eta^2-1)U_x+\tau^2(\eta-1)\frac{U_t}{U}, \quad B=-\eta\tau^2 U_x-\tau^2\frac{U_t}{U}+\frac{1}{2}$$

$$C=\tau^2 U_x+\tau^2\frac{U_t}{U}$$

Применяя метод прямых [6], докажем существование решения задачи (5), (6) и установим некоторые оценки для w. Через преобразования (3), (4) получим соответствующие результаты для решения u, v задачи (1), (2).

Для произвольной функции $f(\tau,\ \xi,\eta)$ через $f^{k,\,l}(\eta)$ обозначим $f(kh,\ lh,\eta)$, где $h=\mathrm{const}>0$. Уравнение (5) с условиями (6) заменим системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$L^{k,l}(w)\equiv \nu (w^{k,l})^2 w_{\eta\eta}^{k,l}-\frac{kh}{2}\,\frac{w^{k,l}-w^{k-1,l}}{h}-$$

$$-(\eta+\lambda h)(kh)^2 U^{k,l}\,\frac{w^{k,l}-w^{k,l-1}}{h}+A^{k,l}w_\eta^{k,l}+B^{k,l}w^{k,l}=0$$

$$k=0,1,\ldots,\left[\frac{\sqrt{T}}{h}\right],\qquad l=0,1,\ldots,\left[\frac{X}{h}\right] \tag{7}$$

на отрезке $0\leqslant\eta\leqslant 1$ с условиями

$$w^{k,l}(1)=0,\qquad l^{k,l}(w)\equiv(\nu w^{k,l}w_\eta^{k,l}-khv_0^{k,l}w^{k,l}+C^{k,l})|_{\eta=0}=0 \tag{8}$$

В уравнениях (7) λ — достаточно большая положительная постоянная, не зависящая от h.

Всюду в дальнейшем C_i и M_i — положительные постоянные, не зависящие от h, $\sigma_\gamma=\sqrt{-\ln\gamma(1-\eta)}$, где $0<\gamma<1,\ 0\leqslant\eta<1$.

Лемма. Предположим, что $U_x+U_t/U>0$, $U_x(0,0)>0$, $v_0\leqslant M_1\tau^{1+\varepsilon}$, $\varepsilon>0$, $|v_{0x}|\leqslant M_2\tau$, функции $v_0, U, U_x, U_t/U, U_{xx}, U_{x\tau}, (U_t/U)_x, (U_t/U)_x$ ограничены, $(U_t/U)\geqslant -M_3 U$ в некоторой окрестности $x=0$. Тогда при $0\leqslant lh\leqslant X$ и $0\leqslant kh\leqslant\sqrt{T}$, где T зависит от U, v_0, ν, система (7) с условиями (8) имеет решение $w^{k,l}(\eta)$, непрерывное при $0\leqslant\eta\leqslant 1$, имеющее непрерывную производную третьего порядка при $0\leqslant\eta<1$ и удовлетворяющее неравенствам

$$C_1(1-\eta)\sigma_\mu\leqslant w^{k,l}\leqslant C_2(1-\eta)\sigma_{\mu_1},\qquad 0<\mu_1<\frac{1}{\sqrt{e}}<\mu<1 \tag{9}$$

Кроме того, справедливы оценки

$$|(w^{k,l}-w^{k,l-1})/h)|\leqslant C_3(1-\eta)\sigma_{\mu_1} \tag{10}$$

$$|(w^{k,l}-w^{k-1,l})/h|\leqslant C_4(1-\eta)\sigma_{\mu_1} \tag{11}$$

$$-C_5\sigma_{\mu_1}\leqslant w_\eta{}^{k,l}\leqslant C_6\Phi(\eta) \tag{12}$$

где $\Phi(\eta)=-\eta^2$ при $0\leqslant\eta<1-\delta$ и $\Phi(\eta)=-\sigma_\mu$ при $1-\delta\leqslant\eta<1$

$$|w^{k,l}w_{\eta\eta}^{k,l}|\leqslant C_7,\qquad w^{k,l}w_{\eta\eta}^{k,l}<-1/(4\nu) \tag{13}$$

Существование функций $w^{0,l}(\eta)$ $(l = 0, 1, \ldots, [X/h])$ и оценки (9) для $w^{0,l}$ легко следуют из уравнений (7) при $k = 0$. При $k \geqslant 1$ решение $w^{k,l}$ системы (7) с условиями (8) получается как предел при $\varepsilon_1 \to 0$ решений системы

$$L^{k,l}(w) + \varepsilon_1 w^{k,l}_{\eta\eta} = 0, \ \varepsilon_1 > 0, \ 1 \leqslant k \leqslant [\sqrt{T}/h], \ 0 \leqslant l \leqslant [X/h]$$

с условиями (8). Доказательство этого факта и оценок (9) аналогично доказательству лемм 3 и 4 в работе [6]. Для доказательства оценок (10) — (12) используются уравнения и граничные условия, которым удовлетворяют величины

$$r^{k,l} = (w^{k,l} - w^{k,l-1})/h, \ \rho^{k,l} = (w^{k,l} - w^{k-1,l})/h, \ z^{k,l} = w^{k,l}_{\eta}$$

Например, функция $r^{k,l}$ удовлетворяет уравнению

$$R^{k,l}(r^{k,l}) = [L^{k,l}(w) - L^{k,l-1}(w)]/h = 0$$

и граничным условиям

$$r^{k,l}(1) = 0, \ \lambda^{k,l}(r^{k,l}) = [l^{k,l}(w) - l^{k,l-1}(w)]/h = 0 \quad \text{при } \eta = 0$$

Далее, предполагая, что неравенства (10) — (12) выполнены для $w^{k',l'}(\eta)$ при $k' \leqslant k - 1$ и при $k' = k$ и $l' \leqslant l - 1$, доказываем, что при достаточно малом T эти неравенства верны и при $k' = k$ и $l' = l$. Это доказательство проводится аналогично доказательству леммы 9 работы [6]. Неравенства (13) являются следствиями оценок (10) — (12) и получаются из уравнений (7).

Теорема 1. Пусть выполнены условия леммы. Тогда при любом X и некотором T, зависящем от U, v_0, ν, в области Ω $\{0 \leqslant \tau \leqslant \sqrt{T}$, $0 \leqslant \xi \leqslant X$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1\}$ существует решение задачи (5), (6), обладающее следующими свойствами: w непрерывна в Ω, $C_1(1-\eta)\sigma_\mu \leqslant w \leqslant C_2 \cdot (1-\eta)\sigma_{\mu_1}$, w_η непрерывна по η при $\eta < 1$, $-C_5\sigma_{\mu_1} \leqslant w_\eta \leqslant C_6\Phi(\eta)$, где Φ — функция, указанная в лемме, $|w_\xi| \leqslant C_3(1-\eta)\sigma_{\mu_1}$, $|w_\tau| \leqslant C_4(1-\eta)\sigma_{\mu_1}$, $ww_{\eta\eta}$ ограничено, $ww_{\eta\eta} < -1/(4\nu)$. В области Ω функция удовлетворяет почти всюду уравнению (5) и условиям (6). Решение задачи (5), (6), обладающее такими свойствами, единственно.

Существование решения w задачи (5), (6) с указанными свойствами следует из существования решения $w^{k,l}$ задачи (7), (8) и оценок (9) — (13). Для доказательства единственности решения задачи (5), (6) рассмотрим разность $w_1 - w_2 = W$ двух решений этой задачи. Функция W удовлетворяет уравнению

$$P(W) \equiv \nu w_1 W_{\eta\eta} - \frac{\tau}{2}\frac{W_\tau}{w_1} - \tau^2\eta U\frac{W_\xi}{w_1} + B\frac{W}{w_1} + \\ + A\frac{W_\eta}{w_1} + \nu w_{2\eta\eta}\frac{w_1 + w_2}{w_1}W = 0$$

и граничным условиям

$$W\Big|_{\eta=1} = 0, \qquad \left(\nu W_\eta - C\frac{W}{w_1 w_2}\right)\Big|_{\eta=0} = 0$$

Рассмотрим

$$\int_\Omega P(W)\,We^{-\alpha\tau}d\tau d\xi d\eta = 0, \ \alpha = \text{const} > 0 \tag{14}$$

Преобразуя полученные интегралы интегрированием по частям, из (14) имеем неравенство вида

$$\int_\Omega K(w_1, w_2, \tau, \xi, \eta, \alpha)\,W^2 e^{-\alpha\tau}d\tau d\xi d\eta \geqslant 0 \tag{15}$$

где функция $K(w_1, w_2, \tau, \xi, \eta, \alpha) < 0$ при достаточно большом α. Поэтому из (15) следует, что $W^2 \equiv 0$, т. е. $w_1 \equiv w_2$.

Теорема 2. Предположим, что функции U_x, U_{xx}, U_t / U, $(U_t / U)_x$, $\sqrt{t}\, U_{xt}$, $\sqrt{t}\,(U_t / U)_t$, v_0, $\sqrt{t}\, v_{0t}$ ограничены, $U_x(0, 0) > 0$, $U_x + U_t / U > 0$, $-M_3 U \leqslant U_t / U$ при малых x. Пусть, далее, $v_0 \leqslant M t^{1/2+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, $|v_{0x}| \leqslant M_2 t^{1/2}$. Тогда в области D_T, где T зависит от U, v_0, ν, существует единственное решение u, v задачи (1), (2), обладающее следующими свойствами: u/U непрерывно при $t > 0$, $\sqrt{t} u_y / U$ ограничено и непрерывно, $u \to U$ при $y \to \infty$, u и v удовлетворяют условиям (2), u_y, u_x, u_{yy}, u_t, v_y ограничены и непрерывны при $t > 0$. Уравнения системы (1) удовлетворяются почти всюду в D_T. Кроме того, имеют место неравенства

$$C_1\left(1 - \frac{u}{U}\right)\sigma_\mu\left(\frac{u}{U}\right) \leqslant \frac{\sqrt{t}\, u_y}{U} \leqslant C_2\left(1 - \frac{u}{U}\right)\sigma_{\mu_1}\left(\frac{u}{U}\right) \tag{16}$$

$$U(t, x)\exp\left(-\frac{C_2^2 y^2}{4t} - \frac{C_2 y\sqrt{-\ln \mu_1}}{\sqrt{t}}\right) \leqslant U(t, x) - u \leqslant$$
$$\leqslant U(t, x)\exp\left(-\frac{C_1^2 y^2}{4t} - \frac{C_1 y\sqrt{-\ln \mu}}{\sqrt{t}}\right) \tag{17}$$

Эта теорема доказывается так же, как теорема 2 работы [6] и теорема 2 работы [4].

Оценки (17) характеризуют скорость стремления $u(t, x, y)$ к $U(t, x)$ при $y \to \infty$ и поведение u при малых t и фиксированных x и y, что связано со скоростью образования пограничного слоя. Из неравенств (17) следует также, что функция u удовлетворяет условиям (2). Для суммы первых членов разложения функции u по степеням времени, найденных Блазиусом в работе [1], также справедливы оценки вида (17).

Из (3) и (4) следует, что приближенное решение $u((kh)^2, lh, y)$ задачи (1), (2) может быть построено при помощи функций $w^{k,l}$ по формуле

$$\frac{y}{\sqrt{kh}} = \int_0^\eta \frac{ds}{w^{k,l}(s)}, \qquad \eta = \frac{u((kh)^2, lh, y)}{U((kh)^2, lh)}$$

Автор благодарит О. А. Олейник за постоянное внимание к работе.

Поступила 3 XII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Blasius H. Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. Z. Math. und Phys., 1908, Bd. 56, Nr. 1.
2. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. М., Физматгиз, 1962.
3. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., Изд-во иностр. лит., 1956.
4. Олейник О. А. Образование пограничного слоя при постепенном разгоне. Сиб. матем. ж., 1968, т. 9, вып. 5.
5. Олейник О. А. Приближенные решения и асимптотические разложения для задачи о развитии пограничного слоя при разгоне. ПММ, 1969, т. 23, вып. 3.
6. Олейник О. А. Математические задачи теории пограничного слоя. Успехи матем. наук, 1968, т. 23, вып. 3.