Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 532.526

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ПО ВРЕМЕНИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Д. А. Силаев

(Москва)

Рассматривается система уравнений пограничного слоя для нестационарных осесимметрических течений несжимаемой жидкости при наличии вдува или отсоса через границу тела. При условии периодичности по времени внешнего течения и функций, определяющих форму тела и вдув или отсос, доказывается существование и единственность периодического по времени решения этой системы в окрестности критической точки (вынужденные колебания). Задача с заданными начальными условиями (в целом по t) подробно исследована в работе [1], где, в частности, были получены результаты об устойчивости таких течений.

Будем рассматривать систему уравнений

$$u_t + uu_x + vu_y = -p_x + \nu u_{yy}, \quad p_y = 0, \quad (ru)_x + (rv)_y = 0 \tag{1}$$

в области D $\{-\infty < t < +\infty,\ 0 \leqslant x \leqslant X,\ 0 \leqslant y < \infty\}$ при граничных условиях и условии периодичности

$$u\,|_{x=0} = 0, \quad u\,|_{y=0} = 0, \quad v\,|_{y=0} = v_0(t, x), \quad u \to U(t, x) \quad \text{при } y \to \infty \tag{2}$$

$$u(t+T,\ x,\ y) = u(t,\ x,\ y)$$

Здесь u и v — параллельная и перпендикулярная к стенке составляющие скорости, $U(t, x)$ — продольная компонента скорости внешнего течения, $U(t, 0) = 0$, $U(t, x) > 0$ при $x > 0$, $-p_x = U_t + UU_x$, ν — коэффициент вязкости (плотность $\rho \equiv 1$), $r(t, x)$ — расстояние от точки x на поверхности тела до оси симметрии тела, $r(t, 0) = 0$ и $r(t, x) > 0$ при $x > 0$. Предполагаем, что $U_x > 0$, $r_x > 0$ и $p_x / U < 0$ в области D. Пусть U, r, p, v_0 — заданные периодические по t функции с периодом T.

Для изучения задачи (1), (2) введем новые независимые переменные

$$\tau = t, \qquad \xi = x, \qquad \eta = \frac{u(t, x, y)}{U(t, x)} \tag{3}$$

Тогда для функции $w = u_y / U$ получим уравнение

$$\nu w^2 w_{\eta\eta} - w_\tau - \eta U w_\xi + A w_\eta + B w = 0 \tag{4}$$

в области Ω $\{-\infty < \tau < +\infty,\ 0 \leqslant \xi \leqslant X,\ 0 \leqslant \eta < 1\}$ с граничными условиями и условием периодичности

$$w\,|_{\eta=1} = 0, \qquad (\nu w w_\eta - v_0 w + C)\,|_{\eta=0} = 0 \tag{5}$$

$$w(\tau + T, \xi, \eta) = w(\tau, \xi, \eta)$$

Здесь

$$A = (\eta^2 - 1) U_x + (\eta - 1)\frac{U_t}{U}, \quad B = \eta\left(r_x \frac{U}{r} - U_x\right) - \frac{U_t}{U}$$

$$C = -\frac{p_x}{U} = U_x + \frac{U_t}{U}$$

Искомая функция $u(t, x, y)$ определяется из равенства

$$y = \int_0^\eta \frac{ds}{w(t, x, s)}, \qquad \eta = \frac{u(t, x, y)}{U(t, x)}$$

а функция $v(t, x, y)$ определяется из первого уравнения системы (1) [1].

Будем предполагать, что A, B, C, v_0 ограничены и имеют ограниченные производные по t и x.

Пользуясь методом прямых [1], докажем при соответствующих предположениях существование решения задачи (4), (5), установим единственность этого решения и, как следствие, получим соответствующие теоремы о периодических по t решениях исходной задачи (1), (2).

Пусть $f^{m,k}(\eta) \equiv f(mh_1, kh_2, \eta)$ для любой функции $f(\tau, \xi, \eta)$, h_1, $h_2 = \text{const} > 0$. Уравнение (4) с условиями (5) заменим системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$L_{m,k}(w) \equiv \nu (w^{m,k})^2 w_{\eta\eta}^{m,k} - \frac{w^{m,k} - w^{m-1,k}}{h_1} -$$

$$-(\eta U^{m,k} + \mu_k h_2^\gamma)\frac{w^{m,k} - w^{m,k-1}}{h_2} + A^{m,k} w_\eta^{m,k} + B^{m,k} w^{m,k} = 0 \tag{6}$$

$$m = 1, \ldots, N; \quad N = T / h_1; \quad k = 0, 1, \ldots, l; \quad l = [X / h_2]; \quad 0 \leqslant \eta < 1$$

$$U^{m,0} = 0, \quad \mu_0 = 0, \quad \mu_k = \text{const} > 0, \quad (k \geqslant 1), \quad \gamma = \text{const}, \quad 0 < \gamma < 1$$

(здесь h_1 такое, что T / h_1 — целое) с граничными условиями

$$w^{m,k}(1) = 0, \quad \lambda_{m,k}(w) \equiv (\nu w^{m,k} w_\eta^{m,k} - v_0^{m,k} w^{m,k} + C^{m,k})|_{\eta=0} = 0 \tag{7}$$

и условием периодичности

$$w^{0,k}(\eta) = w^{N,k}(\eta) \tag{8}$$

Через M_j, E_j, α будем обозначать положительные постоянные, не зависящие от h_1 и h_2.

Лемма 1. Система дифференциальных уравнений (6) с условиями (7), (8) имеет решение $w^{m,k}(\eta)$ $(0 \leqslant m \leqslant N,\ 0 \leqslant k \leqslant l)$, непрерывное при $0 \leqslant \eta \leqslant 1$ и обладающее всеми производными при $0 \leqslant \eta < 1$. Для этого решения справедлива оценка

$$M_1(1 - \eta) \leqslant w^{m,k}(\eta) \leqslant M_2(1 - \eta)\sigma \tag{9}$$

$$\sigma = \sqrt{-\ln \mu (1 - \eta)} \text{ при } kh_2 \leqslant X, \ h_i \leqslant h_0 = \text{const} > 0, \quad \mu = \text{const}, \quad \mu \in (0, \mu^\circ)$$

где μ° — некоторая положительная постоянная, определяемая данными задачи (1), (2).

Доказательство. Решение системы (6) с условиями (7), (8) получим как предел решений системы

$$L^{\varepsilon}_{m,k}(w) \equiv \varepsilon w^{m,k}_{\eta\eta} + L_{m,k}(w) = 0 \quad \text{при } \varepsilon \to 0 \tag{10}$$

$$m = 1, 2, \ldots, N; \; k = 0, 1, \ldots, l; \; \varepsilon > 0, \; 0 \leqslant \eta < 1$$

с условиями (7), (8). Доказательство леммы 1 во многом аналогично доказательству лемм 3 и 7 в работе [1].

Рассмотрим функции $V_1(\xi, \eta) = M_3(1-\eta)\exp(-\alpha\xi)$ и $V_2(\xi, \eta) = M_4(1-\eta)\sigma$ (M_3, α, $M_4 = \mathrm{const} > 0$). Как показано в работе [1], постоянные M_3, α, M_4, μ° можно выбрать таким образом, что будут выполнены следующие неравенства:

$$L^{\varepsilon}_{m,k}(V_1) \geqslant 0, \quad \lambda_{m,k}(V_1) > 0, \quad L^{\varepsilon}_{m,k}(V_2) \leqslant 0, \quad \lambda_{m,k}(V_2) < 0 \tag{11}$$

Заметим, что M_3, M_4, α и μ° не зависят от ε и h_1, h_2.

Доказательство существования решения задачи (10), (7), (8) проведем на основании теоремы Шаудера [2]. Пусть S — множество ограниченных вектор-функций $\theta = (\theta^0, \theta^1, \ldots, \theta^l)$ таких, что

$$V_1(kh_2, \eta) \leqslant \theta^k(\eta) \leqslant V_2(kh_2, \eta), \; k = 0, 1, \ldots, l; \; l = [X/h_2] \tag{12}$$

Рассмотрим оператор сдвига R; сопоставляющий вектор-функции вектор-функцию θ $w^N = (w^{N,0}, \ldots, w^{N,l})$, где $w^{N,k} = w^{m,k}$ при $m = N = T/h_1$, а $w^{m,k}$ — решение системы (10) с краевыми условиями (7) и начальным условием

$$w^{0,k} = \theta^k \qquad (0 \leqslant k \leqslant l) \tag{13}$$

Как следует из доказательства леммы 7 работы [1], оператор R определен на множестве S. При этом оказывается, что функции $w^{N,k}(\eta)$ непрерывны при $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, обладают вторыми ограниченными производными при $0 \leqslant \eta \leqslant 1$ и справедлива оценка

$$E_1(1-\eta) \leqslant w^{N,k}(\eta) \leqslant E_2(1-\eta)\sigma$$

при некоторых положительных постоянных E_1, E_2, не зависящих от ε и h_1, h_2.

Оператор R отображает S в себя. Это утверждение является следствием неравенств (11) и (12), так как для решения задачи (10), (7), (13) справедлива оценка

$$V_1^{m,k}(\eta) \leqslant w^{m,k}(\eta) \leqslant V_2^{m,k}(\eta) \tag{14}$$

а $V_i^{N,k} = V_i^{0,k}$ ($i = 1, 2$). Доказательство оценки (14) проводится при помощи принципа максимума (см. лемму 3 работы [1]).

Множество RS компактно в S, так как первые и вторые производные $w^{m,k}(\eta)$ ограничены константой, зависящей от данных задачи (1), (2), ε, h_1, h_2 и функций V_1 V_2. Это непосредственно следует из уравнений первого порядка, полученных из системы (10), которым удовлетворяют $w_\eta^{m,k}$, и из оценки $w_\eta^{m,k}$ при $\eta = 0$, которая вытекает из граничного условия (7) (здесь ε, h_i считаем фиксированными; оценка $w_\eta^{m,k}$ зависит от ε и h_i); оценка равномерна по ε для $0 \leqslant \eta \leqslant 1 - \delta$, $\delta > 0$. Производная $w_{\eta\eta}^{m,k}$ выражается из (10).

Непрерывность оператора R следует из уравнений и граничных условий, которым удовлетворяет разность решений задачи (10), (7), (13), соответствующих различным θ, а также из оценок этих решений и их производных.

Итак, получаем, что вполне непрерывный оператор сдвига R отображает ограниченное замкнутое выпуклое множество S пространства ограниченных функций в себя. Поэтому по теореме Шаудера [2] существует неподвижная точка $\theta_0 = (\theta_0{}^0, \theta_0{}^1, \ldots$ $\ldots, \theta_0{}^l)$ отображения R, т. е. $R\theta_0 = \theta_0$. Из этого равенства следует, что $\theta_0 \in RS$ и поэтому $\theta_{0\eta\eta}$ ограничена. Искомое периодическое решение $w^{m,k}(\eta)$ задачи (10), (7) получается как решение системы (10) с граничными условиями (7) и начальным условием $w^{0,k} = \theta_0{}^k$. Дифференцируя по η уравнения (10), получим, что $w_{\eta\eta\eta}^{m,k}$ ($m \geqslant 1$) и, следовательно, $w^{0,k}_{\eta\eta\eta}$ ограничены. Повторяя этот процесс, получаем, что $w^{m,k}(\eta)$ — бесконечно дифференцируемые функции η, причем производные $\partial_\eta^{\,j} w^{m,k}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ равномерно ограничены по ε на отрезке $0 \leqslant \eta \leqslant 1 - \delta$, где δ — любое положительное число.

Получим теперь решение задачи (6) — (8). По теореме Арцела из совокупности $w^{m,k}_\varepsilon$ — решений задачи (10), (7), (8) — можно выбрать последовательность $w^{m,k}_{\varepsilon_n}$, равномерно сходящуюся вместе со всеми производными на любом отрезке $0 \leqslant \eta \leqslant 1 - \delta$ при $\varepsilon_n \to 0$. Так как M_3, M_4, α и μ° были выбраны не зависящими от ε и h_1, h_2, то для предельных функций $w^{m,k}$ справедливы оценки

$$M_3 (1-\eta)\, e^{-\alpha k h_2} \leqslant w^{m,k}(\eta) \leqslant M_4 (1-\eta)\, \sigma$$

равномерные по h_1, h_2. Из этих неравенств следует, что $w^{m,k}(1) = 0$ и $w^{m,k}(\eta)$ непрерывны при $0 \leqslant \eta \leqslant 1$; $w^{m,k}(\eta)$ удовлетворяют системе (6) при $\eta < 1$ и условиям (7), 8). Лемма 1 доказана.

При дополнительных предположениях на функцию $U(t, x)$ можно уточнить оценку для $w^{m,k}(\eta)$ снизу.

Лемма 2. Пусть $(U_t / U)|_{\xi=0} = 0$. Тогда для решения задачи (6)—(8) справедлива оценка

$$w^{m,k}(\eta) \geqslant M_5 (1-\eta)\, \sigma \tag{15}$$

при $0 \leqslant \eta \leqslant 1, \quad 0 \leqslant k h_2 \leqslant X, \quad 0 < \mu < \mu^\circ \quad (\mu^\circ < 1/\sqrt{e})$

Доказательство. Пусть $V_3^{m,k} = M_6 (1-\eta)\, \sigma e^{-\alpha k h_2}$.

Тогда

$$L_{m,k}(V_3) = V_3^{m,k} \Big\{ -\nu M_6^2 e^{-2\alpha k h_2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\sigma^2} \right) + (1+\eta)\, U_x^{m,k} \left(1 - \frac{1}{2\sigma^2} \right) -$$
$$- \frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{U_t}{U} \right)^{m,k} + \eta \left(r_x \frac{U}{r} - U_x \right)^{m,k} + \alpha \left(\eta U^{m,k} + \mu_k h_2^{\gamma} \right) e^{\alpha h_2'} \Big\} > 0$$

при $\eta < 1$, достаточно большом α и достаточно малых M_6 и μ°, так как $U_x > 0$, $|(r_x U)/r - U_x| \leqslant \alpha U$ и $\sigma^{-2} \leqslant \sigma^{-2}(0) \to 0$ при $\mu \to 0$, $0 < h_2' < h_2$. Пусть $\lambda^1_{m,k}(w) \equiv \equiv \lambda_{m,k}(w) / w^{m,k}(0)$. Имеем

$$\lambda^1_{m,k}(V_3) = \left[-\nu M_6 e^{-\alpha k h_2} \sigma \left(1 - \frac{1}{2\sigma^2} \right) - v_0^{m,k} + \frac{C^{m,k}}{M_6 e^{-\alpha k h_2} \sigma} \right] \Bigg|_{\eta=0} > 0$$

если M_6 достаточно мало, так как $C > 0$.

Рассмотрим функции $y^{m,k} = (V_3^{m,k} - w^{m,k})\, e^{-\beta k h_2}$. Покажем, что $y^{m,k} \leqslant 0$. Действительно, для $y^{m,k}$ получаем неравенства

$$[L_{m,k}(V_3) - L_{m,k}(w)]\, e^{-\beta k h_2} = \nu (w^{m,k})^2\, y^{m,k}_{\eta\eta} - \frac{y^{m,k} - y^{m-1,k}}{h_1} -$$
$$- (\eta U^{m,k} + \mu_k h_2^{\gamma})\, \frac{y^{m,k} - y^{m,k-1}}{h_2}\, e^{-\beta h_2} + A^{m,k} y^{m,k}_\eta +$$
$$+ \left[B^{m,k} + \nu (w^{m,k} + V_3^{m,k})\, V^{m,k}_{3\eta\eta} - \left(\eta \frac{U^{m,k}}{h_2} + \frac{\mu_k}{h_2^{1-\gamma}} \right) (1 - e^{-\beta h_2}) \right] y^{m,k} > 0$$

$$0 < \eta < 1, \quad 1 \leqslant m \leqslant N, \quad 0 \leqslant k \leqslant l, \quad \mu_0 = 0, \quad U^{m,0} = 0, \quad 0 < \gamma < 1 \tag{16}$$

$$[\lambda^1_{m,k}(V_3) - \lambda^1_{m,k}(w)]\, e^{-\beta k h_2} = \left[\nu y^{m,k}_\eta - \frac{C^{m,k}}{w^{m,k} V_3^{m,k}}\, y^{m,k} \right] \Bigg|_{\eta=0} > 0$$

$$y^{m,k}(1) = 0, \qquad y^{0,k} = y^{N,k} \tag{17}$$

Выберем $\mu_k \geqslant 1$ при $k \geqslant 1$, $\beta = h_2^{-1}$ и h_2 настолько малым, чтобы коэффициент при $y^{m,k}$ в неравенстве (16) стал неположительным. Пусть M, K и η_0 таковы, что $y^{M,K}(\eta_0) \geqslant y^{m,k}(\eta)$, т. е. $y^{M,K}(\eta_0) = \max y^{m,k}(\eta)$. Допустим, что $y^{M,K}(\eta_0) > 0$. Так как $y^{0,k} = y^{N,k}$, то можем считать $M \geqslant 1$ и $y^{M,K}(\eta_0) \geqslant y^{M-1,K}(\eta_0)$. Так как $[C^{m,k} / w^{m,k} V_3^{m,k}](0) > 0$, из (17) следует, что $\eta_0 \neq 1$ и $\eta_0 \neq 0$. Следовательно, $0 < \eta_0 < 1$ и справедливы неравенства $y_\eta^{M,K}(\eta_0) = 0$, $y_{\eta\eta}^{M,K}(\eta_0) \leqslant 0$.

Так как коэффициент при $y^{m,0}$, равный $\nu(w^{m,0} + V_3^{m,0}) V_{3\eta\eta}^{m,0}$, неположителен, из неравенства (16) следует, что $K \neq 0$ и $y^{M,K}(\eta_0) \geqslant y^{M,K-1}(\eta_0)$. Тогда из (16) получаем, что

$$\left[B^{M,K} + \nu(w^{M,K} + V_3^{M,K}) V_{3\eta\eta}^{M,K} - \left(\eta \frac{U^{M,K}}{h_2} + \frac{\mu_K}{h_2^{1-\gamma}}\right)(1 - e^{-\beta h_2})\right] y^{M,K} \Bigg|_{\eta=\eta_0} > 0$$

Это неравенство невозможно, так как коэффициент при $y^{M,K}$ в силу выбора μ_k, β, h_2 неположителен. Следовательно, $y^{m,k}(\eta) \leqslant 0$ и имеет место оценка

$$w^{m,k}(\eta) \geqslant M_6(1-\eta)\sigma e^{-\alpha k h_2} \geqslant M_5(1-\eta)\sigma, \qquad (M_5 \leqslant M_6 e^{-\alpha X})$$

Лемма 2 доказана.

Определим $w^{m,k}$ для любого целого m: $w^{Np+q,k} = w^{q,k}$ $(0 \leqslant q \leqslant N-1)$. В частности, $w^{-1,k} = w^{N-1,k}$. Заметим, что из T-периодичности коэффициентов системы (1) и условий (2) следует, что

$$L_{Np+q,k}(w) \equiv L_{q,k}(w) = 0, \qquad \lambda_{Np+q,k}(w) \equiv \lambda_{q,k}(w) = 0$$

Обозначим

$$r^{m,k} = \frac{w^{m,k} - w^{m,k-1}}{h_2}, \qquad z^{m,k} = w_\eta^{m,k}, \qquad \rho^{m,k} = \frac{w^{m,k} - w^{m-1,k}}{h_1}$$

Установим оценки для $r^{m,k}$, $z^{m,k}$ и $\rho^{m,k}$, равномерные по h_i $(i = 1, 2)$. Напишем уравнения, которым удовлетворяют $z^{m,k}$, $r^{m,k}$ и $\rho^{m,k}$. Дифференцируя (6) по η, получим уравнения для $z^{m,k}$

$$P_{m,k}(z) \equiv \nu(w^{m,k})^2 z_{\eta\eta}^{m,k} - \frac{z^{m,k} - z^{m-1,k}}{h_1} -$$
$$-(\eta U^{m,k} + \mu_k h_2^\gamma)\frac{z^{m,k} - z^{m,k-1}}{h_2} + A^{m,k} z_\eta^{m,k} + (B^{m,k} + A_\eta^{m,k}) z^{m,k} +$$
$$+ 2\nu w^{m,k} z^{m,k} z_\eta - U^{m,k} r^{m,k} + B_\eta^{m,k} w^{m,k} = 0 \tag{18}$$
$$1 \leqslant m \leqslant N, \quad 0 \leqslant k \leqslant l, \quad U^{m,0} = 0, \quad \mu_0 = 0, \quad \mu_k > 0 \ (k \geqslant 1), \quad 0 < \gamma < 1$$

с условиями

$$z^{m,k}|_{\eta=0} = \frac{1}{\nu}\left(v_0^{m,k} - \frac{C^{m,k}}{w^{m,k}}\right)\Bigg|_{\eta=0}, \qquad z^{0,k} = z^{N,k} \tag{19}$$

Вычитая из уравнения (6) для $w^{m,k}$ уравнение для $w^{m,k-1}$ и разделив на h_2, получим

$$R_{m,k}(r) \equiv \nu(w^{m,k})^2 r_{\eta\eta}^{m,k} - \frac{r^{m,k} - r^{m-1,k}}{h_1} - (\eta U^{m,k-1} + \mu_{k-1} h_2^\gamma) \times$$
$$\times \frac{r^{m,k} - r^{m,k-1}}{h_2} + A^{m,k} r_\eta^{m,k} + B^{m,k} r^{m,k} +$$

$$+\frac{w^{m,k}+w^{m,k-1}}{(w^{m,k-1})^2}\left[\rho^{m,k-1}+(\eta U^{m,k-1}+\mu_{k-1}h_2^{\gamma})r^{m,k-1}-A^{m,k-1}z^{m,k-1}-\right.$$
$$\left.-B^{m,k-1}w^{m,k-1}\right]r^{m,k}-\left[\eta\,\frac{U^{m,k}-U^{m,k-1}}{h_2}+\frac{\mu_k-\mu_{k-1}}{h_2^{1-\gamma}}\right]r^{m,k}+$$
$$+\frac{1}{h_2}\left(A^{m,k}-A^{m,k-1}\right)z^{m,k-1}+\frac{1}{h_2}\left(B^{m,k}-B^{m,k-1}\right)w^{m,k-1}=0 \tag{20}$$
$$1\leqslant m\leqslant N,\quad 1\leqslant k\leqslant l,\quad U^{m,0}=0,\quad \mu_0=0,\quad \mu_k\geqslant\mu_{k-1},\quad 0<\gamma<1$$

Аналогично из условий (7), (8) получаем

$$r^{m,k}(1)=0,\quad \Upsilon_{m,k}(r)\equiv\left[\nu r_{\eta}^{m,k}-\frac{C^{m,k}}{w^{m,k}w^{m,k-1}}r^{m,k}-\right.$$
$$\left.\left.-\frac{v_0^{m,k}-v_0^{m,k-1}}{h_2}+\frac{C^{m,k}-C^{m,k-1}}{h_2w^{m,k-1}}\right]\right|_{\eta=0}=0,\quad r^{0,k}=r^{N,k} \tag{21}$$

Функции $r^{m,0}$ не определены (можно, однако, считать $w^{m,-1}\equiv w^{m,0}$ и, следовательно, $r^{m,0}\equiv 0$). Аналогично из рассмотрения равенств

$$\frac{1}{h_1}\left[L_{m,k}(w)-L_{m-1,k}(w)\right]=0,\qquad \frac{1}{h_1}\left[\lambda_{m,k}^{1}(w)-\lambda_{m-1,k}^{1}(w)\right]=0$$

получаем

$$T_{m,k}(\rho)\equiv\nu\,(w^{m,k})^2\rho_{\eta\eta}^{m,k}-\frac{\rho^{m,k}-\rho^{m-1,k}}{h_1}-$$
$$-(\eta U^{m,k}+\mu_kh_2^{\gamma})\frac{\rho^{m,k}-\rho^{m,k-1}}{h_2}+A^{m,k}\rho_{\eta}^{m,k}+B^{m,k}\rho^{m,k}+$$
$$+\frac{w^{m,k}+w^{m-1,k}}{(w^{m-1,k})^2}\left[\rho^{m-1,k}+(\eta U^{m-1,k}+\mu_kh_2^{\gamma})r^{m-1,k}-A^{m-1,k}z^{m-1,k}-\right.$$
$$\left.-B^{m-1,k}w^{m-1,k}\right]\rho^{m,k}-\eta\,\frac{U^{m,k}-U^{m-1,k}}{h_1}r^{m-1,k}+$$
$$+\frac{1}{h_1}\left(A^{m,k}-A^{m-1,k}\right)z^{m-1,k}+\frac{1}{h_1}\left(B^{m,k}-B^{m-1,k}\right)w^{m-1,k}=0 \tag{22}$$
$$1\leqslant m\leqslant N,\quad 0\leqslant k\leqslant l,\quad U^{m,0}=0,\quad \mu_0=0,\quad \mu_k>0\ (k\geqslant 1),\quad 0<\gamma<1$$

с условиями

$$\rho^{m,k}(1)=0,\quad \Gamma_{m,k}(\rho)\equiv\left[\nu\rho_{\eta}^{m,k}-\frac{C^{m,k}}{w^{m,k}w^{m-1,k}}\rho^{m,k}-\right.$$
$$\left.\left.-\frac{v_0^{m,k}-v_0^{m-1,k}}{h_1}+\frac{C^{m,k}-C^{m-1,k}}{h_1w^{m-1,k}}\right]\right|_{\eta=0}=0,\quad \rho^{0,k}=\rho^{N,k} \tag{23}$$

($\rho^{0,k}$ определены, так как $w^{-1,k}\equiv w^{N-1,k}$). В дальнейшем будем предполагать, что $(U_t\,/\,U)|_{\xi=0}=0$, $U_{xt}|_{\xi=0}=0$ и $v_{0t}|_{\xi=0}=0$. Тогда из (22) и (23) получаем, что $\rho^{m,0}$ должны удовлетворять уравнениям

$$T_{m,0}(\rho)\equiv\nu\,(w^{m,0})^2\rho_{\eta\eta}^{m,0}-\frac{\rho^{m,0}-\rho^{m-1,0}}{h_1}+A^{m,0}\rho_{\eta}^{m,0}+$$
$$+\frac{w^{m,0}+w^{m-1,0}}{(w^{m-1,0})^2}\left[\rho^{m-1,0}-A^{m-1,0}z^{m-1,0}\right]\rho^{m,0}=0 \tag{24}$$

и условиям

$$\rho^{m,0}(1)=0,\quad \Gamma_{m,0}(\rho)\equiv\left.\left[\nu\rho_{\eta}^{m,0}-\frac{C^{m,0}}{w^{m,0}w^{m-1,0}}\rho^{m,0}\right]\right|_{\eta=0}=0,\quad \rho^{0,0}=\rho^{N,0} \tag{25}$$

Функция $\rho^{m,0}(\eta) \equiv 0$ удовлетворяет уравнениям (24) и условиям (25). Будем рассматривать решение $w^{m,k}$ задачи (6)—(8), для которого $\rho^{m,0} \equiv 0$.

Лемма 3. Пусть $v_0|_{\xi=0} \leqslant 0$. Тогда для $z^{m,0} = w_\eta^{m,0}$ справедлива оценка

$$-M_7\sigma \leqslant z^{m,0} \leqslant -M_8\sigma \tag{26}$$

при $0 \leqslant \eta < 1$, M_7, $M_8 = \text{const} > 0$

Доказательство. Так как $\rho^{m,0} \equiv 0$ и $w^{m,0}$ не зависит от m, для $w^{m,0}(\eta) = w^\circ(\eta)$ справедливы утверждения лемм 4, 5 работы [1], из которых следует оценка (26). Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Пусть

$$v_0 \leqslant E_5\xi, \qquad v_{0t} \geqslant -E_6\xi, \qquad |U_t/U| \leqslant E_7\xi$$
$$|(U_t/U)_t| \leqslant E_8\xi, \qquad U_{xt} \leqslant E_9\xi, \qquad |(r_xUr^{-1} - U_x)_t| \leqslant E_{10}\xi \tag{27}$$

Тогда найдется такое положительное X_1, зависящее от данных задачи (1), (2), что при $0 \leqslant kh_2 \leqslant X_1$ и $0 \leqslant mh_1 \leqslant T$ для решения задачи (6) — (8) справедливы оценки

$$-M_9\sigma \leqslant w_\eta^{m,k} \leqslant -M_{10}\sigma \tag{28}$$

$$\left|\frac{w^{m,k} - w^{m,k-1}}{h_2}\right| \leqslant M_{11}(1-\eta)\sigma \tag{29}$$

$$-M_{12}(1-\eta)\sigma \leqslant \frac{w^{m,k} - w^{m-1,k}}{h_1} \leqslant M_{13}kh_2(1-\eta)\sigma \tag{30}$$

$$|w^{m,k}w_{\eta\eta}^{m,k}| \leqslant M_{14}, \qquad w^{m,k}w_{\eta\eta}^{m,k} \leqslant -M_{15} \tag{31}$$

где M_i не зависят от h_1 и h_2.

Доказательство будем вести индукцией по k. При $k = 0$ неравенства (28) — (30) справедливы, $r^{m,0}$ не определена (из доказательства будет видно, что величина $r^{m,0}$ не существенна).

Пусть $\Psi^{m,k} = M_{16}w^{m,k}$, $\Phi_1^{m,k} = -M_6\sigma$, $\Phi_2^{m,k} = -M_{10}\sigma$, $F_1^{m,k} = -M_{17}w^{m,k}$, $F_2^{m,k} = M_{18}kh_2w^{m,k}$. Для доказательства леммы достаточно установить следующие неравенства:

$$|r^{m,k}| \leqslant \Psi^{m,k}, \qquad \Phi_1^{m,k} \leqslant z^{m,k} \leqslant \Phi_2^{m,k}, \qquad F_1^{m,k} \leqslant \rho^{m,k} \leqslant F_2^{m,k}$$

Действительно, выберем $M_{11} \geqslant M_{16}M_2$, $M_{12} \geqslant M_{17}M_2$ и $M_{13} \geqslant M_{18}M_2$. Тогда оценки (28) — (30) будут справедливы. Оценки (31) являются следствием оценок (9), (15), (28) — (30) и уравнений (6).

Доказательство леммы 4 почти повторяет рассуждения леммы 9 работы [1]. Существенное отличие здесь в том, что индукция ведется только по k. Это требует строгой последовательности в доказательстве оценок: сначала оцениваем $r^{m,k}$, затем $z^{m,k}$ и, наконец, $\rho^{m,k}$. Кроме того, следует заметить, что уравнение (22) уже нельзя считать линейным, так как $\rho^{m-1,k}$ не имеет оценки по предположению индукции и $(w^{m,k} + w^{m-1,k})(w^{m-1,k})^{-2}\rho^{m-1,k}\rho^{m,k}$ — нелинейный член. Именно при доказательстве оценки для $\rho^{m,k}$ используется неравенство шагов по τ и по ξ, т. е. $h_1 \neq h_2$.

Пусть $R_{m,k}^1$ — однородная часть оператора $R_{m,k}$. Из (20) имеем

$$R_{m,k}^1(r) + \frac{1}{h_2}(A^{m,k} - A^{m,k-1})z^{m,k-1} + \frac{1}{h_2}(B^{m,k} - B^{m,k-1})w^{m,k-1} = 0$$

Заметим, что в случае $k=1$ коэффициент при $r^{m,0}$ равен нулю. Покажем, что

$$\overset{\circ}{R}_{m,k}(\Psi) \equiv R^1_{m,k}(\Psi) + \frac{1}{h_2}\left|(A^{m,k} - A^{m,k-1})\, z^{m,k-1} + (B^{m,k} - B^{m,k-1})\, w^{m,k-1}\right| < 0$$

при $0 \leqslant \eta < 1$.

Выберем $M_{16}(M_2, M_5, M_{10})$ и $x^1\,(M_2, M_{10}, M_{16}, M_{18})$ так, чтобы при $kh_2 \leqslant x^1$ и достаточно малом h_2 были выполнены следующие неравенства:

$$M_{16}\,\frac{U^{m,k} - U^{m,k-1}}{h_2} > \frac{1}{h_2}\left|\left(r_x\frac{U}{r} - U_x\right)^{m,k} - \left(r_x\frac{U}{r} - U_x\right)^{m,k-1}\right|$$

$$\frac{1}{2}M_{16}w^{m,k}\frac{w^{m,k} + w^{m,k-1}}{(w^{m,k-1})^2}\,A^{m,k-1}z^{m,k-1} \geqslant \left|\frac{A^{m,k} - A^{m,k-1}}{h_2}\, z^{m,k-1}\right| +$$
$$+ \frac{1}{h_2}\left|\left(\frac{U_t}{U}\right)^{m,k} - \left(\frac{U_t}{U}\right)^{m,k-1}\right| w^{m,k-1} \qquad (32)$$

$$[M_{18}(k-1)\,h_2 + (\eta U^{m,k-1} + \mu_{k-1}h_2^{\gamma}) - B^{m,k-1}]\, w^{m,k-1} \leqslant {}^1\!/_2 M_{10}\,(C^{m,k} + \eta U_x^{m,k})\,(1-\eta)\,\sigma$$

Эти неравенства возможны, что видно из оценок $U^{m,k} \leqslant N_1 kh_2$. $|B^{m,k}| \leqslant N_2 kh_2$. Вычисляя $\overset{\circ}{R}_{m,k}(\Psi)$ можно показать, что требуемое неравенство $\overset{\circ}{R}_{m,k}(\Psi) < 0$ — следствие (32).

Обозначая $\gamma^1_{m,k}$ однородную часть оператора $\gamma_{m,k}$, получаем

$$\gamma^1_{m,k}(\Psi) + \left| -\frac{v_0^{m,k} - v_0^{m,k-1}}{h_2} + \frac{C^{m,k} - C^{m,k-1}}{h_2 w^{m,k-1}(0)}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left\{ M_{16}\left[v_0^{m,k} - \frac{C^{m,k}}{w^{m,k}} - \frac{C^{m,k}}{w^{m,k-1}}\right] + \sup|v_{0x}| + \frac{\sup|C_x|}{w^{m,k-1}}\right\}\Bigg|_{\eta=0} < 0$$

если M_{16} достаточно велико и $kh_2 \leqslant x^2\,(E_5, M_2)$. Рассмотрим функции $q_{\pm}^{m,k} = \pm r^{m,k} - \Psi^{m,k}$. Из только что установленных неравенств и уравнений (20), (21) следует, что

$$R^1_{m,k}(q_{\pm}) > 0, \qquad \gamma^1_{m,k}(q_{\pm}) > 0, \qquad q_{\pm}^{m,k}(1) = 0$$
$$q_{\pm}^{0,k} = q_{\pm}^{N,k}, \qquad q_{\pm}^{m,k-1} \leqslant 0$$

Из этих соотношений, повторяя рассуждения леммы 2, получаем, что $q_{\pm}^{m,k} \leqslant 0$ и, следовательно, при $kh_2 \leqslant \xi^1 = \min(x^1, x^2)$ справедлива оценка $-\Psi^{m,k} \leqslant r^{m,k} \leqslant \Psi^{m,k}$.

Оценка $z^{m,k}$ производится точно таким же образом, как и оценка z^k в лемме 6 работы [1]. Не повторяя этих рассуждений, заметим только, что M_9 зависит от M_{16}, M_{10} зависит от данных задачи (1), (2) и констант M_2, M_5 (важно, что M_{10} не зависит от M_{16}); здесь же налагается требование малости X_1 : $kh_2 \leqslant x^3\,(M_{10}, M_{16}, M_2, E_5)$.

Перейдем к оценке $\rho^{m,k}$. Можно проверить, что при $kh_2 \leqslant x^2\,(E_5, M_2)$ будут выполнены следующие неравенства: $T_{m,k}(F_1) > 0\ (0 \leqslant \eta < 1)$ и $\Gamma_{m,k}(F_1) > 0$, если $M_{17}(M_{16}, M_2, M_5)$ достаточно велико. Вычисляя $T_{m,k}(F_2)$ и $\Gamma_{m,k}(F_2)$, нетрудно показать, что $T_{m,k}(F_2) < 0\ \ (0 \leqslant \eta < 1)$ и $\Gamma_{m,k}(F_2) < 0$, при $kh_2 \leqslant \min\{x^2, x^4\,(M_{16}, M_{18}, M_{10})\}$, если $M_{18}(M_{16}, E_6, E_8, E_9)$ выбрано достаточно большим и $h_1, h_2 \leqslant h_0$. Действительно, это возможно, если M_{18} и x^4 таковы, что выполнены следующие неравенства:

$$M_{18}U^{m,k}w^{m,k-1} \geqslant \frac{1}{h_1}\left|\left(r_x\frac{U}{r} - U_x\right)^{m,k} - \left(r_x\frac{U}{r} - U_x\right)^{m-1,k}\right| w^{m-1,k} +$$
$$+ M_{16}\left|\frac{U^{m,k} - U^{m-1,k}}{h_1}\right| w^{m-1,k}$$

$$\frac{1}{2}M_{18}kh_2\frac{w^{m,k}(w^{m,k}+w^{m-1,k})}{(w^{m-1,k})^2}A^{m-1,k}z^{m-1,k}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{A^{m,k}-A^{m-1,k}}{h_1}z^{m-1,k}+\frac{1}{h_1}\left|\left(\frac{U_t}{U}\right)^{m,k}-\left(\frac{U_t}{U}\right)^{m-1,k}\right|w^{m-1,k}$$

$$(M_{18}kh_2+M_{16}(\eta U^{m-1,k}+\mu_k h_2^{\gamma})-B^{m-1,k})\,w^{m-1,k}\leqslant$$

$$\leqslant{}^1\!/_2A^{m-1,k}z^{m-1,k}\leqslant{}^1\!/_2M_{10}(C^{m-1,k}+\eta U_x^{m-1,k})(1-\eta)\sigma$$

выполнимость которых следует из условий леммы, гладкости коэффициентов и независимости M_{16} от M_{18}.

Рассмотрим разности $S_1^{m,k}=F_1^{m,k}-\rho^{m,k}$ и $S_2^{m,k}=\rho^{m,k}-F_2^{m,k}$. По предположению индукции $S_j^{m,k-1}\leqslant 0$ $(j=1,2)$. Для $S_j^{m,k}$ имеем

$$\nu(w^{m,k})^2S_{j\eta\eta}^{m,k}-\frac{S_j^{m,k}-S_j^{m-1,k}}{h_1}\left[1+h_1\frac{w^{m,k}+w^{m-1,k}}{(w^{m-1,k})^2}F_j^{m,k}\right]+$$

$$+A^{m,k}S_{j\eta}^{m,k}+\left[B_1^{m,k}+\frac{w^{m,k}+w^{m-1,k}}{(w^{m-1,k})^2}\rho^{m-1,k}-\right.$$

$$\left.-\left(\eta\frac{U^{m,k}}{h_2}+\frac{\mu_k}{h_2^{1-\gamma}}\right)\right]S_j^{m,k}>0 \tag{33}$$

$$B_1^{m,k}=B^{m,k}+\frac{w^{m,k}+w^{m-1,k}}{(w^{m-1,k})^2}[F_j^{m,k}+(\eta U^{m-1,k}+\mu_k h_2^{\gamma})\,r^{m-1,k}-$$

$$-A^{m-1,k}z^{m-1,k}-B^{m-1,k}w^{m-1,k}]$$

$$\left[\nu S_{j\eta}^{m,k}-\frac{C^{m,k}}{w^{m,k}w^{m-1,k}}S_j^{m,k}\right]\Bigg|_{\eta=0}>0,\quad S_j^{m,k}(1)=0,\quad S_j^{0,k}=S_j^{N,k} \tag{34}$$

Покажем, что при некотором соотношении между шагами h_1 и h_2 коэффициент при $S_j^{m,k}$ в неравенстве (33) может быть сделан отрицательным. Тогда, воспользовавшись принципом максимума (см. лемму 2), из (33), (34) получим, что $S_j^{m,k}\leqslant 0$ $(j=1,2)$ и, следовательно, справедливы оценки $F_1^{m,k}\leqslant\rho^{m,k}\leqslant F_2^{m,k}$ при $kh_2\leqslant X_1=\min_i(x^i)$, если h_1 и h_2 достаточно малы. Тем самым лемма 4 будет доказана.

Выберем $\mu_k\geqslant 1$ при $k\geqslant 1$ и h_2 настолько малым, чтобы

$$B_1^{m,k}-\left(\eta\frac{U^{m,k}}{h_2}+\frac{1}{2}\frac{1}{h_2^{1-\gamma}}\right)<0 \tag{35}$$

что возможно в силу того, что $\gamma<1$ и оценки для $r^{m-1,k}$ и $z^{m-1,k}$ уже доказаны. Далее

$$\frac{w^{m,k}+w^{m-1,k}}{(w^{m-1,k})^2}\rho^{m-1,k}-\frac{\mu_k-{}^1\!/_2}{h_2^{1-\gamma}}\leqslant\left(\frac{w^{m,k}+w^{m-1,k}}{w^{m-1,k}}\right)^2\frac{1}{h_1}-\frac{\mu_k-{}^1\!/_2}{h_2^{1-\gamma}}\leqslant 0 \tag{36}$$

если $\mu_k\geqslant{}^1\!/_2+(1+M_2/M_5)^2$ и $h_1\geqslant h_2^{1-\gamma}$. Лемма 4 доказана.

Теорема 1. Пусть относительно T-периодических функций r, U, v_0 выполнены предположения леммы 4. Тогда существует в Ω_{X_1} $\{0\leqslant\tau\leqslant T,$ $0\leqslant\xi\leqslant X_1,$ $0\leqslant\eta<1\}$ (X_1 — некоторое число, зависящее от U, r, v_0) решение задачи (4), (5), обладающее следующими свойствами: $w(\tau,\xi,\eta)$ непрерывна в Ω_{X_1}, $M_5(1-\eta)\sigma\leqslant w\leqslant M_2(1-\eta)\sigma$, w_η непрерывна по η при $\eta<1$, $-M_9\sigma\leqslant w_\eta\leqslant -M_{10}\sigma$, w_ξ, w_τ, $ww_{\eta\eta}$ ограничены в Ω_{X_1} и $|w_\xi|\leqslant M_{11}(1-\eta)\sigma$, $ww_{\eta\eta}\leqslant -M_{15}$, $-M_{12}(1-\eta)\sigma\leqslant w_\tau\leqslant$

$\leqslant M_{13}\xi\,(1-\eta)\sigma$, функция w удовлетворяет уравнению (4) почти всюду, и при $0 \leqslant \xi \leqslant X_1$ выполняются условия (5). Решение задачи (4), (5), обладающее указанными свойствами, единственно в $\Omega_{X_2} \subset \Omega_{X_1}$.

Доказательство существования повторяет рассуждения теорем 7 и 11 работы [1]. Докажем единственность такого решения задачи (4), (5). Пусть w_1 и w_2 — два решения этой задачи и $w_* = w_1 - w_2$. Для w_* получаем

$$\nu w_1 w_{*\eta\eta} - \frac{w_{*\tau}}{w_1} - \eta U \frac{w_{*\xi}}{w_1} + A\frac{w_{*\eta}}{w_1} + B\frac{w_*}{w_1} + \nu(w_1+w_2)\,w_{2\eta\eta}\frac{w_*}{w_1} = 0 \tag{37}$$

$$\left(\nu w_{*\eta} - C\frac{w_*}{w_1 w_2}\right)\Big|_{\eta=0} = 0,\quad w_*|_{\eta=1} = 0,\quad w_*|_{\tau=0} = w_*|_{\tau=T} \tag{38}$$

Умножив уравнение (37) на $w_* e^{-\alpha\xi}$ и проинтегрировав по Ω_{X_2} ($\alpha = \mathrm{const} > 0$), преобразуем некоторые члены в этом равенстве интегрированием по частям. Получим

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega_{X_2}} [-\nu w_1 (w_{*\eta})^2]\, e^{-\alpha\xi} d\tau d\xi d\eta + \int\limits_{\xi=X_2}\left[-\eta U\frac{w_*^2}{2w_1}\right] e^{-\alpha\xi} d\tau d\eta + \\
&+ \int\limits_{\Omega_{X_2}} \frac{1}{2w_1^2}\,[\nu w_1^2 w_{1\eta\eta} - w_{1\tau} - \eta U w_{1\xi} + A w_{1\eta} + B w_1]\, w_*^2 e^{-\alpha\xi} d\tau d\xi d\eta + \\
&+ \int\limits_{\Omega_{X_2}} \frac{1}{w_1}\left[-\frac{1}{2}\alpha\eta U - \frac{1}{2}\eta U_x + \frac{1}{2}\eta\left(r_x\frac{U}{r} - U_x\right) - \frac{U_t}{U} + \right.\\
&\qquad\left. + \nu(w_1+w_2)\,w_{2\eta\eta}\right] w_*^2 e^{-\alpha\xi} d\tau d\xi d\eta + \\
&+ \int\limits_{\eta=0}\left[-\frac{C}{w_2} + \frac{1}{2}\nu w_{1\eta} - A\frac{1}{2w_1}\right] w_*^2 e^{-\alpha\xi} d\tau d\xi = 0
\end{aligned} \tag{39}$$

Здесь использованы условия (38) и условие $U|_{\xi=0} = 0$. Выберем α из неравенства $|r_x U r^{-1} - U_x| \leqslant \alpha U$ и X_2 настолько малым, чтобы

$$\left[-\frac{C}{w_2} + \frac{1}{2}\left(\nu w_{1\eta} - A\frac{1}{w_1}\right)\right]\Big|_{\eta=0} = \left(-\frac{C}{w_2} + \frac{1}{2}v_0\right)\Big|_{\eta=0} \leqslant 0,\quad -\frac{U_t}{U} + \nu(w_1+w_2)w_{2\eta\eta} \leqslant 0$$

Тогда левая часть равенства (39) представляет собой сумму интегралов от неположительных функций, из чего заключаем, что каждый из этих интегралов равен нулю. А так как в интеграле по области Ω_{X_2} коэффициент при w_*^2 отрицательный, получаем, что $w_* = 0$ почти всюду. Из непрерывности w_* в Ω_{X_2} следует, что $w_* \equiv 0$ и $w_1 \equiv w_2$. Теорема 1 доказана.

Замечание. Можно показать, что $\Omega_{X_2} = \Omega_{X_1}$.

Теорема 2. Пусть $U(t, x) = ax + b(t, x)x^2$, $a = \mathrm{const} > 0$, $b(t, x)$ имеет ограниченные производные второго порядка, $v_0 \leqslant K_1 x$, $v_{0t} \geqslant -K_2 x$, $r_x|_{x=0} > 0$, $|(r_x U r^{-1} - U_x)_t| \leqslant K_3 x$, b, v_0, r — периодические по t функции с периодом T. Тогда существует и единственно в D_{X_2} $\{0 \leqslant t \leqslant T$ $0 \leqslant x \leqslant X_2$, $0 \leqslant y \leqslant \infty\}$ решение u, v задачи (1), (2), обладающее следующими свойствами: u/U, u_y/U ограничены и непрерывны в D_{X_2}, $u > 0$ при $y > 0$, $x > 0$; $u \to U$ при $y \to \infty$, $u|_{x=0} = 0$, $u|_{y=0} = 0$, $u_y/U > 0$ при $y \geqslant 0$, $u_y/U \to 0$ при $y \to \infty$; u_y, u_x, u_{yy}, u_t, v_y ограничены и непрерывны по y; u_{yy}/u_y, v непрерывны по y и ограничены при ограниченных y, $v|_{y=0} = v_0(t, x)$, u_{yyy} ограничена в D_{X_2}, u_{yx}, u_{yt} ограничены при ограниченных y. Уравнения системы (1) удовлетворяются почти всюду в D_{X_2}. Кроме того, выполнены неравенства

$$K_4 (U - u)\sigma \leqslant u \leqslant K_5 (U - u)\sigma$$

$$-K_6\sigma \leqslant \frac{u_{yy}}{u_y} \leqslant -K_7\sigma, \qquad \left| \frac{u_{yyy}u_y - u_{yy}^2}{u_y^2} \right| \leqslant K_8$$

$$\left| \frac{1}{u_y}(u_{yx}u_y - u_x u_{yy}) + \frac{U_x}{u_y U}(uu_{yy} - u_y^2) \right| \leqslant K_9 (U - u)\sigma$$

$$-K_{10}(U - u)\sigma \leqslant \frac{1}{u_y}(u_{yt}u_y - u_t u_{yy}) + \frac{U_t}{u_y U}(uu_{yy} - u_y^2) \leqslant K_{11} x (U - u)\sigma$$

Здесь $\sigma = [-\ln \mu (1 - u / U)]^{1/2}$, K_i, μ — некоторые положительные постоянные, $0 < \mu < 1$, $X_2 > 0$ зависит от U, r, v_0.

Эта теорема является следствием теоремы 1.

В заключение заметим, что требования на исходные данные задачи (1), (2), сформулированные в лемме 4 и в теоремах 1 и 2, несколько слабее соответствующих ограничений, наложенных в работе [1]. Проведенные рассуждения позволяют несколько улучшить результат, полученный в [1], и получить доказательство теоремы существования для задачи Коши при требованиях на внешнее течение, сформулированных в теоремах 1 и 2.

Автор благодарит научного руководителя О. А. Олейник за помощь и внимание к работе.

Поступила 30 VII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Олейник О. А. Математические задачи теории пограничного слоя. Успехи матем. наук, 1968, т. 23, вып. 3.
2. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. М., «Наука», 1965, стр. 291.