Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 532.516

ИССЛЕДОВАНИЕ АВТОКОЛЕБАНИЙ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНОГО РЕЖИМА

В. И. Юдович

(Ростов-на-Дону)

Теория, развитая в работе [1], применяется к одному классу обыкновенных дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве. Указаны достаточные условия возникновения автоколебания при переходе некоторого параметра через критическое значение (существование последнего устанавливается при помощи теории нормальных операторов). В качестве примера разобрано одно нелинейное параболическое уравнение.

Для общего уравнения работы [1] дается представление автоколебательных режимов в виде рядов по дробным степеням параметра надкритичности δ, а также в виде рядов по степеням амплитуды-коэффициента при нейтральном возмущении в разложении Фурье.

При помощи теории возмущений исследована устойчивость автоколебаний.

Терминология и основные обозначения в данной работе те же, что и в [1].

1. Один класс уравнений с автоколебательными решениями. В гильбертовом пространстве H рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$dv/dt + Av - \lambda Bv = K(v, \lambda) \tag{1.1}$$

при следующих предположениях:

1). Оператор A — самосопряженный, положительно определенный и коэрцитивный (отображает взаимно однозначно D_A на все H). Оператор A^{-1} вполне непрерывен.

2). Оператор B— линейный, с плотной в H областью определения, подчиненный оператору $A^{1/2}$ в том смысле, что $D_{B_r} \supset D_{A^{1/2}}$, $D_{B_i} \supset D_{A^{1/2}}$ и операторы $A^{-1/2}B_r$, $A^{-1/2}B_i$ ограничены (B_r, B_i — вещественная и мнимая части оператора B).

3). Вещественная часть B_r оператора B отлична от нуля.

4). Оператор B_i коммутирует с $A^{-1}B_r$, а оператор B_r с A^{-1}

$$B_i(A^{-1}B_r)u = (A^{-1}B_r)B_iu$$
$$B_rA^{-1}u = A^{-1}B_ru \qquad (u \in D_{A^{1/2}}) \tag{1.2}$$

Через W_p обозначим пространство вектор-функций $v(t)$ со значениями в H, определенных для $t \in [0, 2\pi]$, непрерывных и имеющих конечную норму

$$\|v\|_{W_p} = \left\{\int_0^{2\pi} \left[\left\|\frac{dv}{d\tau}\right\|_H^p + \|Av(\tau)\|_H^p\right] d\tau\right\}^{1/p} + \max_\tau \|v(\tau)\|_H$$

5). Нелинейный оператор K действует вполне непрерывно из W_2 в L_2 ((0, 2π), H) и аналитичен по совокупности (v, λ) в окрестности точки (0, λ_0) пространства $H \times R$ при любом λ_0. Кроме того, предполагается, что производная Фреше K_v (0, λ) $= 0$ для всех λ.

Будем считать, что в пространстве H задана операция комплексного сопряжения: $u \to u^*$ и операторы A, B, K вещественны: $(Au)^* = Au^*$ и т. д.

Рассмотрим задачу на собственные значения

$$A\varphi_0 - \lambda B_r \varphi_0 = 0 \tag{1.3}$$

Обращая оператор A, придем к уравнению

$$\varphi_0 = \lambda T \varphi_0, \qquad T = A^{-1}B_r \tag{1.4}$$

Оператор T самосопряжен и вполне непрерывен в энергетическом пространстве H_1 оператора A. Действительно, для любых u, $v \in H_1$ имеем

$$(Tu, v)_{H_1} = (A^{1/2}A^{-1}B_r u, A^{1/2}v)_H = (B_r u, v)_H = (u, B_r v)_H = (u, Tv)_{H_1} \tag{1.5}$$

Из условий 1 и 3 следует, что $T \neq 0$. По теореме Гильберта — Шмидта существует, по крайней мере, одно ненулевое вещественное характеристическое число λ_0 оператора T. Из условий 1 и 2 вытекает, что всякий собственный вектор φ оператора T удовлетворяет уравнению (1.3) (в частности $\varphi \in D_A$).

Из условия 4 следует, что (конечномерное) собственное подпространство H_0 оператора T, соответствующее характеристическому числу λ_0, инвариантно относительно оператора B_i.

Оператор B_i на H_0 симметричен. Предположим, что он невырожден на H_0 и имеет $\dim H_0$ собственных векторов. Пусть φ — один из них. Тогда

$$-\lambda_0 B_i \varphi = \omega_0 \varphi \tag{1.6}$$

где ω_0 — вещественное, отличное от нуля число. Применяя к этому равенству операцию комплексного сопряжения, получим, что φ^* — также собственный вектор оператора B_i и ему отвечает собственное число ω_0 / λ_0.

Итак, H_0 — четномерное подпространство, и спектр оператора B_i на нем симметричен относительно нуля. Ясно, что φ — собственный вектор оператора $A - \lambda_0 B$

$$A\varphi - \lambda_0 B\varphi = i\omega_0 \varphi \tag{1.7}$$

Теорема 1.1. Пусть выполняются условия 1—5 и λ_0 — двукратное характеристическое число оператора T; оператор B_i невырожден на соответствующем λ_0 собственном подпространстве H_0. Тогда λ_0 — точка ответвления цикла для уравнения (1.1).

Доказательство. Достаточно проверить выполнение условия (3.6) теоремы 3.1 [1]. Для этого заметим, что оператор $L = I - \lambda A^{-1}B - i\omega A^{-1} : H_1 \to H_1$ — нормальный при любых вещественных λ и ω. Действительно, простой подсчет показывает, что его вещественная часть L_r и мнимая часть L_i имеют вид

$$L_r = I - \lambda A^{-1}B_r, \qquad L_i = -\lambda A^{-1}B_i - \omega A^{-1} \tag{1.8}$$

Тот факт, что L_r и L_i коммутируют, следует из условия 4. Из нормальности оператора L следует, что $\ker L = \ker L^*$. Отсюда, с учетом условий 1 и 2, легко вывести, что единственный собственный вектор оператора $A - \lambda_0 B$, отвечающий собственному числу $-i\omega_0$, есть φ

$$A\varphi - \lambda_0 B^* \varphi = -i\omega_0 \varphi \tag{1.9}$$

Учитывая уравнение (1.7), имеем

$$\operatorname{Re}(B\varphi, \varphi)_H = \frac{1}{\lambda_0} \|\varphi\|_{H_1}^2 > 0 \tag{1.10}$$

Заметим, что теорему 2.1 нетрудно обобщить. Например, можно допустить, что у оператора A есть мнимая компонента, а оператор B подчинен A^α $(0 < \alpha < 1)$; конечно, при этом условия 4 и 5 соответственно меняются.

Причиной существования двукратного собственного числа может быть инвариантность уравнения (1.3) или (1.4) относительно некоторой группы преобразований (например относительно некоторого представления группы вращений окружности в кольце операторов). Последнее обстоятельство имеет место в следующем примере.

Пример. Пусть r, θ — полярные координаты на плоскости, Ω — кольцо: $\Omega = \{(r, \theta) : 0 < r_1 < r < r_2\}$.

Рассмотрим параболическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \lambda \left(u + \alpha \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + u^3 \tag{1.11}$$

с вещественными параметрами λ, $\alpha \neq 0$. Будем интересоваться его решениями в цилиндре $-\infty < t < \infty$; $(r, \theta) \in \Omega$, удовлетворяющими краевому условию

$$u\,|_{r=r_1, r_2} = 0 \tag{1.12}$$

Систему (1.11), (1.12) можно трактовать как обыкновенное дифференциальное уравнение в гильбертовом пространстве $H = L_2(\Omega)$. При этом следует положить

$$Au = -\Delta u, \qquad Bu = u + \alpha\, \partial u / \partial \theta, \qquad Ku = u^3 \tag{1.13}$$

Область определения оператора A — подпространство функций из $W_2^{(2)}(\Omega)$, удовлетворяющих условию (1.12); D_B — энергетическое пространство $H_1 = D(A^{1/2})$ оператора A. Далее имеем $B_r u = u$; $B_i u = i^{-1} \alpha \partial u / \partial \theta$, и условия 1—5 проверяются без труда.

Рассмотрим задачу на собственные значения

$$-\Delta u = \lambda u, \qquad u\,|_{r=r_1, r_2} = 0 \tag{1.14}$$

При помощи разложения в ряд Фурье по θ убеждаемся в том, что собственные функции

$$u_{mn} = \exp im\theta \psi_{mn}(r) \qquad (m = 0, \mp 1, \ldots;\ n = 1, 2, \ldots) \tag{1.15}$$

Здесь ψ_{mn} — собственная функция задачи Штурма—Лиувилля, отвечающая n-му по величине собственному числу λ_{mn}

$$L_m \psi_{mn} \equiv -\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2}\right)\psi_{mn} = \lambda_{mn}\psi_{mn} \tag{1.16}$$
$$\psi_{mn}(r_1) = \psi_{mn}(r_2) = 0$$

Дифференциальный оператор L_m при краевых условиях (1.16) положительно определен в пространстве L_2 с весом r на $]r_1, r_2]$; хорошо известно, что все его собственные числа λ_{mn} — простые. Кроме того, L_m строго возрастает вместе с m, а поэтому согласно минимаксимальному принципу, λ_{mn} строго возрастает вместе с m.

Покажем, что среди чисел λ_{mn} ($m = 0, 1, \ldots; n = 1, 2, \ldots$) нет одинаковых, если только величина $\varepsilon = (r_2 - r_1) / r_1$ не принимает значений из некоторого счетного множества. Фиксируем натуральные числа m, n, p, q и посмотрим, при каких ε возможно равенство $\lambda_{mn} - \lambda_{pq} = 0$. Замена $r = r_1 (1 + \varepsilon x)$ приводит систему (1.16) к виду

$$-\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\varepsilon r_1}{1+\varepsilon x}\frac{d}{dx} - \frac{m^2 r_1^2 \varepsilon^2}{(1+\varepsilon x)^2}\right]\psi_{mn} = \lambda_{mn} r_1^2 \varepsilon^2 \psi_{mn}, \quad \psi_{mn}\Big|_{x=0,1} = 0 \qquad (1.17)$$

Из теории возмущений следует, что собственное число $\lambda_{mn} r_1^2 \varepsilon^2$ — аналитическая функция параметра ε и при $\varepsilon \to 0$ стремится к $n^2\pi^2$. Отсюда следует, что $\lambda_{mn} - \lambda_{pq}$ — аналитическая функция параметра ε, отличная от тождественного нуля при $n \neq q$. Но и при $n = q$, $m \neq p$ она не может быть тождественным нулем, так как $\lambda_{mq} > \lambda_{pq}$ при $m > p$. Итак, множество Σ_{mnpq} тех ε, для которых $\lambda_{mn} = \lambda_{pq}$, не более чем счетно. Множество Σ — объединение всех Σ_{mnpq} — тоже счетно. Если $\varepsilon \overline{\in} \Sigma$, то λ_{0n} ($n = 1, 2, \ldots$) — простые собственные числа оператора A, а λ_{mn} ($m > 0$) — двукратные. Оператор B_i на собственном подпространстве оператора A, отвечающем λ_{mn} ($m > 0$), имеет собственные числа $\mp m\alpha$ и, значит, невырожден. Применяя теорему 1.1, приходим к следующему выводу.

Пусть $\varepsilon \overline{\in} \Sigma$. Тогда существует последовательность критических значений λ_{mn} ($m, n = 1, 2, \ldots$) параметра λ, которые являются точками ответвления цикла. При переходе параметра λ через значения λ_{0n} ($n = 1, 2, \ldots$), как нетрудно показать, от нуля ответвляются стационарные решения системы (1.11), (1.12).

Заметим, что автоколебательное решение уравнений Навье — Стокса, рассмотренное в [2, 3], тоже можно включить в данную схему.

2. Представление цикла в виде степенных рядов. В работе [1] дано применение метода Ляпунова — Шмидта к исследованию периодического автоколебательного режима движения вязкой жидкости, возникающего при переходе числа Рейнольдса (или иного параметра γ) через критическое значение. Рассмотрим также более общую задачу о возникновении цикла для обыкновенного дифференциального уравнения в банаховом пространстве X

$$\omega\, dv / d\tau + Av = K(v, \delta) \qquad (2.1)$$

Здесь ω — неизвестная циклическая частота, $t = \omega^{-1}\tau$ — время, A — линейный (неограниченный оператор), K — нелинейный оператор, аналитически зависящий от вектора $v \in X$ и числового параметра $\delta = \gamma - \gamma_0$ вблизи $v = 0$, $\delta = 0$

$$K(v, \delta) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} K_{mn} v^m \delta^n, \qquad K_{1n} = -B_n, \qquad K_{10} = 0 \qquad (2.2)$$

Считается, что γ_0 — критическое значение параметра γ: оператор A имеет пару чисто мнимых простых собственных значений $\mp i\omega_0 \neq 0$. Ищутся нетривиальные 2π-периодические по τ решения уравнения (2.1).

Помимо системы Навье — Стокса частным случаем уравнения (2.1) являются, например, уравнения движения вязкоупругого тела.

При решении конкретных задач обычно нет надобности составлять уравнение разветвления, а можно прямо разыскивать автоколебательный режим в виде степенного ряда. Особенность метода состоит в том, что сходимость рядов не приходится доказывать отдельно: условия разрешимости уравнений, из которых определяются коэффициенты, совпадают с условиями теорем работы [1]. Если удается построить формальные ряды (даже несколько их первых членов), удовлетворяющие исследуемым уравнениям, то они автоматически оказываются сходящимися. Рассмотрим случай теоремы 1.4 [1]. Для определенности предположим, что автоколебания возникают при $\delta > 0$.

Полагая $\delta = \varepsilon^2$, будем разыскивать решение уравнения (2.1) в виде рядов [1]

$$v(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k v_k(\tau), \qquad \omega = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \omega_k \tag{2.3}$$

Подставляя эти ряды в (2.1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε в обеих частях равенства, придем к следующей цепочке уравнений для определения неизвестных 2π-периодических функций v_k и чисел ω_k:

$$\omega_0 \frac{dv_1}{d\tau} + Av_1 = 0 \tag{2.4}$$

$$\omega_0 \frac{dv_2}{d\tau} + Av_2 = -\omega_1 \frac{dv_1}{d\tau} + K_{20} v_1^2 \tag{2.5}$$

$$\omega_0 \frac{dv_3}{d\tau} + Av_3 = -\omega_1 \frac{dv_2}{d\tau} - \omega_2 \frac{dv_1}{d\tau} - B_1 v_1 + K_{20}^\circ(v_1, v_2) + K_{30}(v_1, v_1, v_1) \tag{2.6}$$

$$K_{20}^\circ(v_1, v_2) = K_{20}(v_1, v_2) + K_{20}(v_2, v_1)$$

При $p = 2, 3, \ldots$ имеем

$$\omega_0 \frac{dv_p}{d\tau} + Av_p = -\sum_{k=1}^{p-1} \omega_k \frac{dv_{p-k}}{d\tau} - \\ - \sum_{2n+m=p} B_n v_m + \sum_{j_1+\ldots+j_m+2n=p} K_{mn}(v_{j_1}, \ldots v_{j_m}) \equiv f_p \tag{2.7}$$

$$(n = 0, 1, \ldots; j_1, j_2, \ldots j_m = 1, 2, \ldots)$$

Будем последовательно решать эти уравнения. Как показано в [1], при помощи сдвига времени $\tau \to \tau + h$ можно привести вектор-функции v_k

[1] Заранее ясно, что $\omega_{2n+1} = 0$; они оставлены в (2.1) ради большей симметрии последующих формул.

к виду

$$v_k = u_k + \alpha_k\psi \quad (\alpha_1 > 0) \quad \int\limits_0^{2\pi} (u_k(\tau), \Phi)\, e^{-i\tau} d\tau = 0$$
$$\psi = \varphi e^{i\tau} + \varphi^* e^{-i\tau}, \qquad A\varphi + i\omega_0\varphi = 0, \qquad A^*\Phi - i\omega_0\Phi = 0 \tag{2.8}$$
$$(\varphi, \Phi) = 1$$

с неизвестными постоянными α_k ($k = 1, 2, \ldots$).

Из уравнения (2.4) получаем

$$v_1(\tau) = \alpha_1\psi(\tau) \tag{2.9}$$

Условие разрешимости уравнения

$$\omega_0 \frac{du}{d\tau} + Au = f \tag{2.10}$$

с 2π-периодическими f, u имеет вид

$$\int\limits_0^{2\pi} (f(\tau), \Phi)\, e^{-i\tau}\, d\tau = 0 \tag{2.11}$$

При дополнительном условии

$$\int\limits_0^{2\pi} (u(\tau), \Phi)\, e^{-i\tau}\, d\tau = 0 \tag{2.12}$$

Заметим, что 2π-периодическое решение u уравнения (2.10) единственно. Оператор R определим, полагая $u = Rf$.

Применяя (2.12) к уравнению (2.5), получаем, что $\omega_1 = 0$; постоянная α_2 остается неизвестной, а вектор-функция u_2 определяется соотношениями (2.8) (при $k = 2$) и

$$u_2 = \alpha_1^2 u_{20}, \qquad \omega_0 \frac{du_{20}}{d\tau} + Au_{20} = K_{20}(\psi, \psi) \tag{2.13}$$

Вектор-функцию u_{20} можно представить в виде

$$u_{20} = z_0 + z_2 e^{2i\tau} + z_2^* e^{-2i\tau}$$
$$z_0 = A^{-1}K_{20}^{c}(\varphi, \varphi^*), \qquad z_2 = (A + 2i\omega_0 I)^{-1} K_{20}(\varphi, \varphi) \tag{2.14}$$

Условие разрешимости уравнения (2.6) имеет вид

$$-2\pi i\omega_2\alpha_1 + g_{030}\alpha_1^3 + g_{110}\alpha_1 = 0$$
$$g_{030} = \int\limits_0^{2\pi} (K_{030}\psi^3 + \overset{\circ}{K}_{20}(\psi, u_{20}), \Phi)\, e^{-i\tau} d\tau \tag{2.15}$$
$$g_{110} = -2\pi(B_1\varphi, \Phi)$$

Отсюда находим α_1 и ω_2

$$\alpha_1 = \left[-\frac{\operatorname{Re} g_{110}}{\operatorname{Re} g_{030}}\right]^{1/2}, \qquad 2\pi\omega_2 = \operatorname{Im} g_{110} - \operatorname{Re} g_{110}\frac{\operatorname{Im} g_{030}}{\operatorname{Re} g_{030}} \tag{2.16}$$

Если $\operatorname{Re} g_{110} \operatorname{Re} g_{030} < 0$, то цикл ответвляется при $\delta > 0$. Если же эта величина отрицательна, то цикл возникает при $\delta < 0$ [1]. Правой части уравнения (2.6) можно придать вид

$$f_3 = 2\alpha_1\alpha_2 K_{20}(\psi, \psi) + q_3$$

$$q_3 = -\omega_2\alpha_1 \frac{d\psi}{d\tau} - \alpha_1 B_1\psi + \alpha_1^3 [K_{20}^\circ(\psi, u_{20}) + K_{30}\psi^3] \tag{2.17}$$

При этом вектор-функцию q_3 можно считать известной.

В соответствии с (2.17) и (2.13) вектор-функция u_3 представится в виде

$$u_3 = 2\alpha_1\alpha_2 u_{20} + w_3, \qquad w_3 = Rq_3 \tag{2.18}$$

Из условия разрешимости уравнения (2.7) при $p = 4$ найдем ω_3 и α_2 Для этого запишем f_4 в виде

$$f_4 = \alpha_2 f_0 + \alpha_2^2 K_{20}\psi^2 + 2\alpha_1\alpha_3 K_{20}\psi^2 - \omega_3\alpha_1 \frac{d\psi}{d\tau} + f_{40} \tag{2.19}$$

$$f_0 = -\omega_2 \frac{d\psi}{d\tau} - B_1\psi + 3\alpha_1^2 [K_{20}^\circ(u_{20}, \psi) + K_{30}\psi^3] \tag{2.20}$$

$$f_{40} = -\omega_2\alpha_1^2 \frac{du_{20}}{d\tau} - \alpha_1^2 B_1 u_{20} + \alpha_1 K_{20}^\circ(\psi, w_3) + \alpha_1^4 K_{20}(u_{20}, u_{20}) +$$

$$+ \alpha_1^2 K_{21}\psi^2 + \alpha_1^4 K_{30}^\circ(\psi, \psi, u_{20}) + \alpha_1^4 K_{40}\psi^4 \tag{2.21}$$

Тригонометрический полином будем называть четным (соответственно нечетным), если он содержит лишь гармоники $\exp 2ni\,\tau$ (соответственно $\exp (2n + 1)i\tau$).

Заметим, что w_3 — нечетный тригонометрический полином, а f_{40} — четный. Поэтому подстановка f_4 в условие разрешимости (2.11) с учетом (2.15) и (2.16) дает

$$\alpha_2\left(-2\pi i\omega_2 + g_{110} - 3g_{030}\frac{\operatorname{Re} g_{110}}{\operatorname{Re} g_{030}}\right) - 2\pi i\alpha_1\omega_3 = 0 \tag{2.22}$$

Так как $\operatorname{Re} g_{110} \neq 0$, из (2.22) следует, что $\alpha_2 = \omega_3 = 0$.

Таким образом, имеем

$$v(\tau) = \varepsilon\alpha_1\psi + \varepsilon^2\alpha^2_1 u_{20} + O(\varepsilon^3), \qquad \omega = \omega_0 + \omega_2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4) \tag{2.23}$$

Опишем ход вычисления следующих членов разложения (2.23). Пусть уже известны $u_1, u_2, \ldots u_{p-2}$; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{p-3}$; $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{p-2}$ $(p \geqslant 5)$. Тогда f_{p-1} можно представить в виде

$$f_{p-1} = 2\alpha_1\alpha_{p-2}K_{20}\psi^2 + h_{p-1} \tag{2.24}$$

причем вектор-функцию h_{p-1} можно считать известной. В соответствии с (2.24) получаем

$$u_{p-1} = 2\alpha_1\alpha_{p-2}u_{20} + w_{p-1}, \qquad w_{p-1} = Rh_{p-1} \tag{2.25}$$

Подставляя (2.25) в формулу (2.7), определяющую f_p, придем к равенству

$$f_p = -\omega_{p-1}\alpha_1 d\psi/d\tau + \alpha_{p-2}f_0 + 2\alpha_1\alpha_{p-1}K_{20}\psi^2 + f_{p0} \tag{2.26}$$

с известной вектор-функцией f_{p0}. Подставляя f_p в условие разрешимости (2.11) уравнения (2.7), получим

$$-2\pi i\alpha_1\omega_{p-1} + \alpha_{p-2}\left(-2\pi i\omega_2 + g_{110} - 3g_{030}\frac{\operatorname{Re} g_{110}}{\operatorname{Re} g_{030}}\right) = r_p$$

$$r_p = \int_0^{2\pi} (f_{p0}, \Phi)\, e^{-i\tau} d\tau \tag{2.27}$$

Отсюда легко найти ω_{p-1} и α_{p-2}. После этого u_{p-1} определяется формулой (2.25). Дальше процесс продолжается аналогично. Заметим, что, как нетрудно показать индукцией по p, вектор-функция u_p при четном p есть четный, а при нечетном p — нечетный тригонометрический полином. Кроме того, из доказательства теоремы 2.2 работы [1] следует, что $\alpha_{2n} = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Иногда оказываются полезными иные разложения автоколебания в степенной ряд. Будем разыскивать решение уравнения (2.1) в виде

$$v(\tau) = \alpha\psi(\tau) + u(\tau), \qquad \int_0^{2\pi} (u(\tau), \Phi)\, e^{-i\tau} d\tau = 0 \tag{2.28}$$

а вектор-функцию u и числовые параметры ω и δ — в виде рядов по степеням амплитуды α

$$\omega = \omega_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \alpha^{2k}, \qquad \delta = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \alpha^{2k}, \qquad u = \sum_{k=2}^{\infty} \alpha^k w_k \tag{2.29}$$

Разложения (2.29) более общие, чем (2.3). Они справедливы в условиях теорем 2.1 и 3.1 работы [1] (см. доказательство теоремы 2.1) и представляют особый интерес, в частности, в том случае, когда уравнение содержит некоторый дополнительный параметр η и при некоторых значениях этого параметра подкоренное выражение в (2.16) меняет знак, а разложения (2.3) теряют силу. Заметим, что близкие амплитудные разложения были предложены Л. Д. Ландау [4] (обоснованию метода Ландау посвящена работа [5]).

Подставляя (2.28) и (2.29) в уравнение (2.1), находим

$$\begin{gathered} v(\tau) = \alpha\psi + \alpha^2 u_{20} + O(\alpha^3) \\ \delta = -\frac{\operatorname{Re} g_{030}}{\operatorname{Re} g_{110}} \alpha^2 + O(\alpha^4) \\ \omega = \omega_0 + \mu_1\alpha^2 + O(\alpha^4), \qquad \mu_1 = \operatorname{Im} g_{030} - \operatorname{Re} g_{030} \frac{\operatorname{Im} g_{110}}{\operatorname{Re} g_{110}} \end{gathered} \tag{2.30}$$

3. Устойчивость основного режима и автоколебания. Устойчивость ответвившегося автоколебательного режима при значениях параметра γ, близких к критическому, можно исследовать методом возмущений. В самом деле, соответствующее линеаризованное уравнение содержит малый параметр $\delta = \gamma - \gamma_0$ (или его дробную степень) и при $\delta = 0$ превращается в линеаризованное уравнение, отвечающее основному стационарному режиму при $\gamma = \gamma_0$. Если этот режим грубо неустойчив (спектр устойчивости содержит точки правой полуплоскости), то при малых δ он таким и остается (как и ответвившийся цикл). Поэтому нуждается в исследовании лишь тот случай, когда все точки спектра устойчивости основного режима при $\gamma = \gamma_0$ лежат внутри левой полуплоскости, за исключением $in\,\omega_0$ $(n = 0, \mp 1, \ldots)$. В итоге оказывается, что достаточно узнать, в какую сторону сдвигаются в результате возмущения эти последние. На самом деле достаточно рассмотреть то собственное число σ, которое превращается в $\sigma_0 = 0$ при $\delta = 0$; остальные имеют вид $\sigma + in\omega_0$. Собственное значение

$\sigma_0 = 0$ двукратно; в результате возмущения оно обычно распадается на два простых. Одно из них, конечно, ноль — он всегда содержится в спектре устойчивости автоколебания. Поэтому будем интересоваться ненулевым σ. Если окажется, что $\operatorname{Re}\sigma < 0$, то цикл устойчив; если $\operatorname{Re}\sigma > 0$, то имеет место неустойчивость.

Следует помнить, что теория возмущений способна описывать, вообще говоря, лишь поведение компактных кусков спектра, а не всего спектра. Поэтому нужна равномерная по малым δ априорная оценка действительных частей тех точек спектра устойчивости, которые лежат в правой полуплоскости. Иначе нельзя было бы утверждать, что в результате возмущения не возникает собственных значений в правой полуплоскости — вдали от мнимой оси. Разумеется, неустойчивость можно доказывать, не имея априорной оценки, но для заключения об устойчивости она необходима. Впрочем, в задачах, рассматриваемых в этой работе, подобные трудности не возникают: оператор монодромии вполне непрерывен и аналитически зависит от параметра ε; вне единичного круга может оказаться лишь конечное число мультипликаторов. Законность линеаризации в задаче устойчивости периодических движений жидкости доказана в [6,7].

Ограничимся случаем теорем 2.1 и 3.2 из [1]; метод можно применить и в условиях остальных теорем этой работы. Для определенности предположим, что автоколебания возникают при $\delta > 0$.

Линеаризуем уравнение (2.1) в окрестности периодического решения $v(\tau)$. Разыскивая решения вида $e^{\sigma\tau}w(\tau)$, $w(\tau)$ — 2π-периодическая вектор-функция, придем к спектральной задаче

$$\omega \frac{dw}{d\tau} + \sigma w + Aw = K_v'(v, \delta)\, w \tag{3.1}$$

В правой части стоит производная Фреше оператора K по v. Пользуясь разложениями (2.3), приведем уравнение (3.1) к виду

$$\omega_0 \frac{dw}{d\tau} + \sigma w + Aw + \sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon^k \omega_k \frac{dw}{d\tau} = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k R_k(\tau)\, w \tag{3.2}$$

Здесь $R_1, R_2, \ldots$ — линейные операторы. В частности

$$R_1 w = \mathring{K}_{20}(v_1, w), \quad R_2 w = \mathring{K}_{20}(v_2, w) + \mathring{K}_{30}(v_1, v_1, w) - B_1 w \tag{3.3}$$

Ясно, что уравнения (3.1) или (3.2) удовлетворяются, если положить $\sigma = 0$, $w = dv / d\tau$. Ненулевое собственное значение σ, исчезающее при $\varepsilon \to 0$, и соответствующий ему собственный вектор w ищем в виде

$$\sigma = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \sigma_k, \qquad w = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k w_k, \qquad w_0(\tau) = \varphi e^{i\tau} \tag{3.4}$$

Законность разложений (3.4) следует из теории возмущений.

Подставим (3.4) в (3.2) и, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε в обеих частях равенства, получим уравнения

$$\omega_0 \frac{dw_1}{d\tau} + Aw_1 = -\sigma_1 w_0 + K_{20}^{\circ}(v_1, w_0) \tag{3.5}$$

$$\omega_0 \frac{dw_2}{d\tau} + Aw_2 = -\sigma_1 w_1 - \sigma_2 w_2 - \omega_2 \frac{dw_0}{d\tau} + R_1 w_1 + R_2 w_0 \tag{3.6}$$

и аналогичные уравнения для w_3, w_4, ...

Требуя, чтобы правая часть (3.5) удовлетворяла условию разрешимости (2.11), и учитывая (3.4), (2.9), получим

$$\sigma_1 = 0, \qquad w_1 = \alpha_1 z_0 + 2\alpha_1 z e^{2i\tau} \tag{3.7}$$

где постоянная α_1 дается равенством (2.16), а векторы z_0, z — равенствами [1]

$$z_0 = A^{-1}\overset{\circ}{K}_{20}(\varphi, \varphi^*), \qquad z = (A + 2i\omega_0 I)^{-1} K_{20}(\varphi, \varphi) \tag{3.8}$$

Условие разрешимости (2.11), примененное к уравнению (3.6), приводит к равенству

$$\sigma_2 = -i\omega_2 - (B_1\varphi, \Phi) + 2\alpha_1^2 (K_{20}(\varphi, z_0) + \overset{\circ}{K}_{20}(\varphi^*, z) + \\ + \overset{\circ}{K}_{30}(\varphi, \varphi, \varphi^*), \Phi) \tag{3.9}$$

Отсюда, учитывая (2.15) и (2.16), выводим

$$\operatorname{Re}\sigma_2 = -{}^1/_2\pi \operatorname{Re} g_{110} = \operatorname{Re}(B_1\varphi, \Phi) \tag{3.10}$$

Вектор-функцию w_2 можно найти из уравнения (3.6); остальные w_k, σ_k находятся аналогично.

Для изучения устойчивости основного режима достаточно рассмотреть уравнение (3.1) при $v = 0$.

Повторяя проведенные выше выкладки, для собственного числа σ получим

$$\sigma = \sigma_2\delta + O(\delta^2), \qquad \operatorname{Re}\sigma_2 = -\operatorname{Re}(B_1\varphi, \Phi) \tag{3.11}$$

В результате приходим к следующей теореме.

Теорема 3.1. Пусть выполнены условия теоремы 3.1 (или 2.1) работы [1]. Тогда основной режим при малых δ асимптотически устойчив, если $\delta\operatorname{Re}(B_1\varphi, \Phi) > 0$, и неустойчив при $\delta\operatorname{Re}(B_1\varphi, \Phi) < 0$. Если дополнительно выполняются условия теоремы 3.2 (или 2.2) работы [1], то ответвляющийся цикл устойчив, когда выполняется неравенство $\operatorname{Re}(B_1\varphi, \Phi) < 0$, и неустойчив в случае $\operatorname{Re}(B_1\varphi, \Phi) > 0$.

Поступила 12 II 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Юдович В. И. Возникновение автоколебаний в жидкости. ПММ, 1970, т. 35, вып. 4.
2. Юдович В. И. Пример рождения вторичного стационарного или периодического течения при потере устойчивости ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости. ПММ, 1965, т. 29, вып. 3.
3. Юдович В. И. О неустойчивости параллельных течений вязкой несжимаемой жидкости относительно пространственно-периодических возмущений. В сб.: Численные методы решения задач математической физики. М., «Наука», 1966.
4. Ландау Л. Д. К проблеме турбулентности. Докл. АН СССР, 1944, т. 44, № 8.
5. Iooss G. Théory non linéaire de la stabilité des ecoulments visqueux incompres — sibles. La recherche aérospatiale, 1970, No. 1, p. 7—14.
6. Юдович В. И. Об устойчивости вынужденных колебаний жидкости. Докл. АН СССР, 1970, т. 195, № 2.
7. Юдович В. И. Об устойчивости автоколебаний жидкости. Докл. АН СССР, 1970, т. 195, № 3.