Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 532.5

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ ПОТОКОВ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Н. Н. Горбанев

(Томск)

Рассматривается в консервативном поле внешних сил нестационарный поток идеальной несжимаемой жидкости, линии тока которого стационарны (квазистационарный поток).

Получено характеристическое свойство поля направлений скорости безвихревого квазистационарного потока, найдена связь между модулями скоростей квазистационарного и стационарного потоков с одними и теми же линиями тока, исследована возможность существования вихревого и безвихревого квазистационарных потоков с общими линиями тока.

В работах [1–3] найдены условия, которым должно удовлетворять поле единичных векторов для того, чтобы оно могло служить полем направлений скорости стационарного потока идеальной несжимаемой жидкости. Аналогичная задача для квазистационарного потока решена в [4] лишь для случая прямолинейного поля направлений скорости.

1. Обозначим единичный вектор направления скорости через $\mathbf{e}$, а вектор кривизны линий тока через $\mathbf{k}$. Поле векторов $\mathbf{I} = \mathbf{k} - \mathbf{e} \operatorname{div} \mathbf{e}$ называется полем присоединенных векторов [2] поля $\mathbf{e}$. Векторное поле называется голономным [5], если существует семейство поверхностей, ортогональных полю. Величина $H = \operatorname{div} \mathbf{e}$ называется средней кривизной поля $\mathbf{e}$ [6]. Поле, средняя кривизна которого равна нулю, называется минимальным [1].

Найдем геометрические условия на поле единичных векторов $\mathbf{e}$, необходимые и достаточные для того, чтобы оно могло служить полем направлений скорости безвихревого квазистационарного потока.

Теорема 1. Поле единичных векторов $\mathbf{e}$ может служить полем направлений скорости безвихревого квазистационарного потока тогда и только тогда, когда

1) поле $\mathbf{e}$ голономно ($\mathbf{e} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{e} = 0$);

2) поле его присоединенных векторов потенциально ($\operatorname{rot} \mathbf{I} = 0$). Поля единичных векторов, удовлетворяющие этим условиям, существуют с произволом в две функции двух аргументов. Если поле направлений задано, то модуль скорости безвихревого квазистационарного потока определяется с произволом в одну функцию одного аргумента.

Условия 1) и 2) оказываются также и характеристическими свойствами полей направлений скорости безвихревого стационарного потока. Так как задание поля направлений скорости эквивалентно заданию конгруэнции линий тока, то справедлива

Теорема 2. Конгруэнция линий может служить конгруэнцией линий тока безвихревого квазистационарного потока идеальной несжимаемой жидкости тогда и только тогда, когда она может являться конгруэнцией линий тока безвихревого стационарного потока.

Замечание. Связь между модулями скоростей безвихревого квазистационарного и безвихревого стационарного потоков с общими линиями тока следующая: если W — модуль скорости безвихревого стационарного потока, то $\psi(t)\,W$, где $\psi(t)$ — произвольная функция лишь времени, будет модулем скорости безвихревого квазистационарного потока с теми же линиями тока; обратно, модуль V скорости безвихревого квазистационарного потока всегда можно представить в виде $V = \psi^*(t)\,W$, где $\psi^*(t)$ — некоторая функция времени.

Исследуем возможность существования безвихревого и вихревого квазистационарных потоков, имеющих общие линии тока.

Теорема 3. Поле $\mathbf{e}$ направлений скорости безвихревого квазистационарного потока может служить полем направлений скорости вихревого квазистационарного потока тогда и только тогда, когда кроме условий 1) и 2) теоремы 1 выполнены условия

3) поле векторов кривизны $\mathbf{k}$ голономно, т. е. $\mathbf{k}\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{k} = 0$;

4) $\mathbf{e}\cdot\mathrm{grad}\,H = H^2$.

Из результатов работы [1] следует, что поле направлений скорости безвихревого и вихревого стационарного потоков с общими линиями тока минимально ($H = 0$). В этом случае $\mathbf{I} = \mathbf{k}$ и условия 3) и 4) выполнены. Поэтому существуют и квазистационарные безвихревые и вихревые потоки с теми же линиями тока.

Обозначим модули скоростей квазистационарного и стационарного потоков через V^* и W^* соответственно, в частном случае безвихревого квазистационарного потока и безвихревого стационарного потока — через V и W. Рассмотрим связь между модулями безвихревых и вихревых квазистационарных и стационарных потоков с общими линиями тока.

Теорема 4. Если поле направлений скорости безвихревого квазистационарного потока минимально, то сумма модуля V этого потока и модуля W^* стационарного потока с теми же линиями тока является модулем V^* скорости квазистационарного потока с теми же линиями тока, т. е. имеет место соотношение

$$V^* = V + W^*$$

С учетом замечания к теореме 2 это соотношение может быть записано в виде $V^* = \psi(t)W + W^*$, причем, если W^* — модуль скорости вихревого стационарного потока, то V^* — модуль скорости также вихревого потока. Если же W^* — модуль скорости безвихревого стационарного потока, то и V^* — модуль скорости безвихревого квазистационарного потока с теми же линиями тока. Так как для заданного минимального поля направлений скорости безвихревого стационарного потока W^* определяется с произволом в одну функцию одного аргумента [1], то $V^* = \psi(t)\,W + W^*$ определяется с произволом в две функции одного аргумента.

Граничные условия для квазистационарного потока могут быть заданы в соответствии со связью квазистационарного и стационарного потоков и граничными условиями для стационарного движения.

2. Изложенные выше результаты получаются путем исследования совместности системы дифференциальных уравнений гидродинамики методом внешних форм Картана.

Пусть в некоторой трехмерной области евклидова пространства задано непрямолинейное поле единичных векторов $\mathbf{e}$, что равносильно заданию конгруэнции линий. Случай прямолинейного поля исключается, как уже рассмотренный в [4]. Присоединим к каждой точке задания поля репер Френе векторной линии поля, проходящей через эту точку. Пусть $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_1$ — единичные векторы касательной к линии, главной нормали и бинормали соответственно, а $\mathbf{M}$ — радиус-вектор точки. В каждой точке дифференциалы базисных векторов $\mathbf{e}_i$ и дифференциал радиус-вектора $\mathbf{M}$ можно разложить по базису в этой точке, получив так называемые деривационные формулы [7]

$$d\mathbf{M} = \omega^i \mathbf{e}_i, \qquad d\mathbf{e}_i = \omega_i{}^j \mathbf{e}_j \qquad (i, j = 1, 2, 3) \tag{2.1}$$

Матрица $\| \omega_i{}^j \|$ кососимметрична, т. е. $\omega_i{}^j = -\omega^i{}_j$. Поэтому среди форм $\omega_i{}^j$ — только три различные $\omega_3{}^2$, $\omega_3{}^1$, $\omega_1{}^2$. Так как область трехмерна, то формы ω^1, ω^2, ω^3 линейно независимы и через них можно выразить все остальные следующим образом

$$\omega_3{}^2 = a_1\omega^1 + a_2\omega^2 + a_3\omega^3, \qquad \omega_3{}^1 = b_1\omega^1 + b_2\omega^2$$
$$\omega_1{}^2 = c_1\omega^1 + c_2\omega^2 + c_3\omega^3 \tag{2.2}$$

Здесь $b_3 = 0$ в силу того, что $\mathbf{e}_2$ направлен по главной нормали линии. Система (2.1) вполне интегрируема, а значит, выполнены следующие уравнения структуры:

$$D\omega^i = [\omega^j \omega_j{}^i], \qquad D\omega_j{}^i = [\omega_j{}^m \omega_m{}^i] \qquad (i, j, m = 1, 2, 3) \tag{2.3}$$

где $D\omega^i$ — внешний дифференциал, $[\omega^j \omega^i{}_j]$ — внешнее произведение [7].

Пусть $\mathbf{V} = V\mathbf{e}_3$ — скорость потока идеальной несжимаемой жидкости. Тогда систему уравнений гидродинамики можно записать в виде следующей системы уравнений в полных дифференциалах:

$$dV = V_1\omega^1 + V_2\omega^2 - VH\omega^3 + V_t dt$$
$$d\varphi = a_3V^2\omega^2 + (V_t - HV^2)\,\omega^3 + \varphi_t\, dt \tag{2.4}$$

Здесь первое уравнение — уравнение неразрывности, а второе — уравнение Эйлера, где φ — потенциал ускорения.

Так как $\operatorname{rot} \mathbf{V} = (V_2 - a_3V)\,\mathbf{e}_1 - V_1\mathbf{e}_2 + V\,(a_1 - b_2)\,\mathbf{e}_3$, то для безвихревого потока имеем

$$V_1 = 0, \qquad V_2 = a_3V, \qquad a_1 - b_2 = 0 \tag{2.5}$$

Третье условие означает, что поле направлений скорости безвихревого квазистационарного потока голономно [5]. Здесь рассматриваются лишь потоки, имеющие те же линии тока, что и безвихревой квазистационарный поток, поэтому далее рассматриваются лишь голономные поля единичных векторов.

Система, определяющая безвихревой поток, имеет вид

$$dV = a_3V\omega^2 - HV\omega^3 + V_t dt, \ d\varphi = a_3V^2\omega^2 + (V_t - HV^2)\,\omega^3 + \varphi_t dt \tag{2.6}$$

Выясним, какие поля единичных векторов могут служить полями направлений скорости безвихревого квазистационарного потока, т. е. при каких условиях на коэффициенты a_i, b_i, c_i (кроме $a_1 - b_2 = 0$) из (2.2) система (2.6) будет в инволюции [7]. Дифференцируя (2.6) внешним образом, получим следующую систему внешних билинейных дифференциальных уравнений:

$$[dV_t dt] = [\omega^1\omega^3]\,(H_1 + a_3y)\,V + [\omega^2\omega^3]\,(H_2 + a_{33} - b_1a_3)\,V + [\omega^2dt]\,a_3V_t - [\omega^3dt]\,HV_t$$

$$[dV_t\omega^3] + [d\varphi_t dt] = [\omega^1\omega^3]\,(H_1 + a_3y)\,V^2 + [\omega^2\omega^3]\,\{(H_2 + a_{33} - b_1a_3)\,V^2 + a_3V_t\} + $$
$$+ [\omega^2dt]\,2a_3VV_t + [\omega^3dt]\,(-2HVV_t) \tag{2.7}$$

Здесь $y = a_1 - c_3$, а H_1, H_2, a_{33} определены равенствами

$$dH = H_1\omega^1 + H_2\omega^2 + H_3\omega^3, \quad da_3 = a_{31}\omega^1 + a_{32}\omega^2 + a_{33}\omega^3$$

Для того чтобы поле единичных векторов могло служить полем направлений скорости безвихревого квазистационарного потока, необходимо и достаточно выполнение условий

$$a_1 - b_2 = 0, \qquad H_1 + a_3y = 0, \qquad H_2 + a_{33} - b_1a_3 = 0 \tag{2.8}$$

Действительно, для существования нетривиального ($V \neq 0$) решения системы (2.7) необходимо выполнение условий (2.8). Обратно, если выполнены эти условия, то после замены $\omega^2 = \omega_0^2 + dt$ система (2.7), а следовательно, и (2.6) будут в инволюции относительно неизвестных V, φ, V_t, φ_t.

Первое условие (2.8) представляет собой условие голономности поля $\mathbf{e}_3$, а остальные два с учетом первого означают, что поле присоединенных векторов $\mathbf{l}$ поля $\mathbf{e}_3$ потенциально.

Найдем произвол существования единичных векторных полей, удовлетворяющих этим условиям. Из первого и третьего условий (2.8) и уравнений структуры следует, что $2a_1c_2 + a_{11} + a_{22} + a_{33} - b_1a_3 = a_2c_1 - b_1c_1$. Продолжив систему (2.2) с учетом этих условий, получим

$$\omega_1^2 = c_1\omega^1 + c_2\omega^2 + c_3\omega^3$$
$$db_1 = (-a_3y - a_{21})\omega^1 + (a_3b_1 - a_{33} - a_{22})\omega^2 + (a_1c_3 - a_3c_1 - a_1y - b_1^2)\omega^3$$
$$da_1 = (a_3b_1 + a_2c_1 - b_1c_1 - 2a_1c_2 - a_{22} - a_{33})\omega^1 + (a_{21} + 2a_1c_1 + a_2c_2 - b_1c_2\,\omega^2 + $$
$$+ (a_2c_3 - c_2a_3 - a_1b_1 - a_1a_2 - b_1c_3)\omega^3 \tag{2.9}$$
$$da_2 = a_{21}\omega^1 + a_{22}\omega^2 + a_{23}\omega^3, \qquad da_3 = -c_2a_3\omega^1 + (a_{23} + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + $$
$$+ 2a_1c_3)\omega^2 + a_{33}\omega^3$$

Дифференцируя внешним образом (2.9), получим билинейную систему в инволюции; решение ее существует с произволом в две функции двух аргументов, как видно из построения регулярной цепи решений способом Келера [7].

Если поле единичных векторов, удовлетворяющее полученным условиям (2.8), задано, то решение системы (2.7) существует с произволом в две функции одного аргумента. В этом можно убедиться, построив регулярную цепь решений способом Келера после замены $\omega^2 = \omega_0^2 + dt$, причем V определяется с произволом в одну функцию одного аргумента. Теорема 1 доказана.

Докажем теорему 2. Система, определяющая безвихревой ($W_1 = 0$, $W_2 = a_3W$, $a_1 - b_2 = 0$) стационарный поток с модулем скорости W, будет иметь вид

$$dW = a_3W\omega^2 - HW\omega^3, \qquad d\varphi = a_3W^2\omega^2 - HW^2\omega^3 \tag{2.10}$$

Она эквивалентна системе

$$W^{-1}dW = a_3\omega^2 - H\omega^3, \qquad \varphi = {}^1\!/_2\, W^2 + \mathrm{const} \tag{2.11}$$

Условием полной интегрируемости системы (2.11) служит $\operatorname{rot}(a_3\mathbf{e}_2 - H\mathbf{e}_3) = \operatorname{rot} I = 0$. Сравнение с условиями теоремы 1 доказывает теорему 2.

Из системы (2.6) следует, что

$$(\ln V)_{t1} = (\ln V)_{t2} = (\ln V)_{t3} = 0$$

Следовательно, $(\ln V)_t = \Phi(t)$. Интегрируя и потенцируя это соотношение получаем, что $V = \psi(t)\, W$, где $W_t = 0$. Из $(\ln V)_1 = 0$, $(\ln V)_2 = a_3$, $(\ln V)_3 = -H$, $W_t = 0$ вытекает, что $W_1 = 0$, $W_2 = a_3 W$, $W_3 = -HW$, $W_t = 0$, т. е. W удовлетворяет системе (2.10). Обратно, если W удовлетворяет (2.10), то $\psi(t) W$, где $\psi(t)$ — произвольная функция, удовлетворяет системе (2.6) (конечно, потенциал ускорения для них различный). Отсюда и следует справедливость замечания к теореме 2.

Пусть дано поле направлений безвихревого квазистационарного потока, т. е. поле единичных векторов, удовлетворяющих соответствующим условиям (2.8). Рассмотрим, при каких условиях это поле может служить полем направлений вихревого квазистационарного потока. Система, определяющая квазистационарный поток, в этом случае будет иметь вид

$$dV = V_2\omega^2 - HV\omega^3 + V_t dt, \quad d\varphi = a_3 V^2\omega^2 + (V_t - HV^2)\,\omega^3 + \varphi_t dt \tag{2.12}$$

Внешнее дифференцирование дает систему

$$\begin{gathered}
[dV_2\omega^2] + [dV_t dt] = -c_2 V_2 [\omega^1\omega^2] - (H_1 V + yV_2)[\omega^3\omega^1] + \\
+ [\omega^2\omega^3](H_2 V - Ha_3 V + HV_2 + a_2 V_2) - [\omega^3 dt]\, HV_t \\
[dV_t\omega^3] + [d\varphi_t dt] = [\omega^2\omega^3](a_3 V_t - 2Ha_3 V^2 + \\
+ 2HVV_2) + 2a_3 VV_t [\omega^2 dt] - 2HVV_t [\omega^3 dt]
\end{gathered} \tag{2.13}$$

Отсюда $H_1 V + yV_2 = 0$, но $H_1 + a_3 y = 0$, поэтому $y(V_2 - a_3 V) = 0$. Если $y = a_1 - c_3 \neq 0$, то $V_2 = a_3 V$, т. е. если поле векторов кривизны $\mathbf{k}$ неголономно, то не существует вихревого стационарного потока с теми же линиями тока, что и данный безвихревой. Если $y = 0$, то система (2.13) не в инволюции. После продолжения и внешнего дифференцирования получим

$$\begin{gathered}
[dV_{22}\omega^2] = A\,[\omega^1\omega^2] + B\,[\omega^2\omega^3] + E\,[\omega^2 dt] + [\omega^3 dt]2V(V_2 - a_3 V)(H^2 - H_3) \\
[dV_{tt} dt] = [\omega^2\omega^3]2V(V_2 - a_3 V)(H_3 - H^2) + F\,[\omega^2 dt] + G\,[\omega^3 dt] + K\,[\omega^1 dt] \\
[dV_{tt}\omega^3] + [d\varphi_{tt} dt] = L\,[\omega^2\omega^3] + P\,[\omega^3\omega^1] + N\,[\omega^2 dt] + Q\,[\omega^3 dt]
\end{gathered} \tag{2.14}$$

Вид коэффициентов $A, B, E, F, G, K, L, P, N, Q$ не имеет значения, важно только, что они отличны от нуля. Из (2.14) следует, что $2V(V_2 - a_3 V)(H^2 - H_3) = 0$, и для существования вихревого потока необходимо условие $H_3 = H^2$. Условия $H_3 = H^2$, $y = 0$ являются и достаточными, так как, если поле направлений скорости без вихревого потока удовлетворяет этим условиям, то система (2.14) оказывается в инволюции, решение ее существует с произволом в три функции одного аргумента, причем V определяется с произволом в две функции одного аргумента. В этом можно убедиться, сделав замену $\omega^2 = \omega_0^2 + dt$ и построив регулярную цепь решений по способу Келера. Условие $y = a_1 - c_3 = 0$ означает, что поле векторов кривизны $\mathbf{k} = a_3\mathbf{e}_2$ данного поля $\mathbf{e}_3$ голономно [5]. Теорема 3 доказана.

Пусть конгруенция линий тока безвихревого стационарного потока минимальна, т. е. выполнены условия $a_1 - b_2 = 0$, $H = 0$, $y = 0$, $a_{33} - b_1 a_3 = 0$. Тогда существуют вихревые и безвихревые как стационарные, так и квазистационарные потоки с этими линиями тока. В этом случае система (2.12), определяющая квазистационарный поток, имеет вид

$$dV^* = V_2^*\omega^2 + V_t^* dt, \quad d\varphi^* = a_3 (V^*)^2\omega^2 + V_t^*\omega^3 + \varphi_t^* dt \tag{2.15}$$

а стационарный поток определяет следующая система:

$$dW^* = W_2^*\omega^2, \qquad d\varphi_0 = a_3 (W^*)^2\, \omega^2 \tag{2.16}$$

Если $W_2{}^* = a_3 W^*$, то поток безвихревой, т. е. система

$$dW = a_3 W\omega^2, \qquad d\varphi = a_3 W^2 \omega^2 \tag{2.17}$$

определяет безвихревой стационарный поток.

Из (2.15) следует, что $(\ln V_t^*)_{t1} = (\ln V_t^*)_{t2} = (\ln V_t^*)_{t3} = 0$. Поэтому $(\ln V_t^*)_t = \Phi(t)$. Интегрируя, получим $V^* = \psi(t) W + W^*$, где $W_t = W_t^* = 0$. Так как $V_{t1}^* = V_{t3}^* = 0$, $V_{t2}^* = a_3 V_t^*$, то $W_1 = W_3 = 0$, $W_2 = a_3 W$, поэтому W удовлетворяет (2.17). Из $V_1^* = V_3^* = 0$, $W_1 = W_3 = 0$ следует $W_1^* = W_3^* = 0$, т.е. W^* удовлетворяет (2.16).

Напротив, пусть W удовлетворяет (2.17), W^* — системе (2.16), а $\psi(t)$ — произвольная функция от t. Подставив в (2.15) $V^* = \psi(t) W + W^*$, продифференцировав внешним образом с учетом (2.16) и (2.17), получим $[d\varphi_t{}^* dt] = L[\omega^2 dt] + K[\omega^3 dt]$, где точные выражения L и K здесь несущественны. Это уравнение в инволюции, при заданных W, W^* и $\psi(t)$ функция φ^* определяется с произволом в одну функцию одного аргумента, т. е. $\psi(t) W + W^*$ может служить модулем скорости квазистационарного потока с заданными линиями тока. Теорема 4 доказана.

3. Примеры конгруенций линий, которые могут служить конгруенциями линий тока как вихревого, так и безвихревого квазистационарного и стационарного потоков, можно получить, положив $a_2 = 0$ дополнительно к условиям $a_1 - b_2 = 0$, $a_1 - c_3 = 0$, $H = 0$, $a_{33} - b_1 a_3 = 0$. Тогда $c_2 = 0$, поэтому ω^2 является полным дифференциалом. Обозначив $\omega^2 = dU$, при $a_1 = 0$ получим конгруенцию окружностей, лежащих на прямых круговых цилиндрах с общей осью. Движение будет плоскопараллельным, причем модуль скорости потока $V = \psi(t) r^{-1} + V_0(r)$, где r — радиус цилиндра, $V_0(r)$ — произвольная функция от r.

При $a_1 \neq 0$ линиями тока будут служить винтовые линии, лежащие на соосных прямых круговых цилиндрах, причем шаг $h = Q^2 r^2$, где r — радиус цилиндра, на котором лежит винтовая линия, Q — отличная от нуля постоянная величина. В этом случае $V = \psi(t) r (1 + Q^2 r^2)^{-1/2} + V_0(r)$.

При каждом фиксированном значении Q соосные винтовые линии ортогональны минимальному геликоиду с той же осью. Для стационарного потока такие примеры были получены в работе [8].

Поступила 5 VII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Бюшгенс С. С. Геометрия стационарного потока идеальной несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1948, т. 12.
2. Бюшгенс С. С. О линиях тока. I. Докл. АН СССР, 1951, т. 78, № 5.
3. Бюшгенс С. С. О линиях тока. II. Докл. АН СССР, 1952, т. 84, № 5.
4. Бюшгенс С. С. Геометрия неустановившегося потока совершенной несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР. Сер. матем. 1960, т. 24.
5. Слухаев В. В. К геометрической теории стационарного движения жидкости. Докл. АН СССР, 1971, т. 196, № 3.
6. Бюшгенс С. С. Геометрия векторного поля. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1946, т. 10.
7. Фиников С. П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии, М., Гостехиздат, 1948.
8. Hamel G. Potentialströmungen mit konstanter Geschwindigket, Sitzber. press. Akad. Wiss. Physik. Math. Kl., 1937, Bd. 146, s. 5—20.