Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 534.222.2

О РАСПРОСТРАНЕНИИ СЛАБЫХ РАЗРЫВОВ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Л. И. Рубина

(Свердловск)

Рассматривается вопрос о распространении слабых разрывов решений квазилинейных гиперболических систем, когда характеристическая поверхность удовлетворяет переопределенной системе дифференциальных уравнений первого порядка. Получена система уравнений переноса в частных производных, описывающая распространение разрыва вдоль таких характеристических поверхностей. В качестве примера приведены системы уравнений переноса для некоторого класса характеристических поверхностей уравнений магнитной газодинамики и кристаллооптики.

Для квазилинейной системы с четырьмя независимыми переменными, описывающей многие процессы механики сплошной среды, получен закон распространения слабых разрывов по области постоянного движения.

1. Рассмотрим произвольную квазилинейную систему уравнений гиперболического типа в обобщенном смысле [1]

$$L(\mathbf{U}) = \sum_{i=0}^{m} A^i \mathbf{U}_i + \mathbf{B} = 0 \tag{1.1}$$

$$\mathbf{U} = \{u_1, \ldots, u_n\}, \ \mathbf{U}_j = \partial \mathbf{U} / \partial x_j, \ U_0 = \partial \mathbf{U} / \partial t \ \ (j = 1, \ldots, m)$$

Здесь A^i — матрицы с элементами $a^i_{\psi\varkappa}(x_j, t, \mathbf{U})$, $\mathbf{B}$ — вектор с элементами $b_\psi(x_j, t, \mathbf{U})$.

Пусть $\psi = \varphi(x_j) - t = 0$ — характеристическая поверхность системы (1.1). Тогда $A = A_1\varphi_1 + \ldots + A_m\varphi_m - A_0$ — характеристическая матрица этой системы. Характеристический определитель

$$|A| = Q_1^{k_1} Q_2^{k_2} \cdots Q_\nu^{k_\nu} \qquad \left(1 \leqslant k_j \leqslant n, \ \sum_{j=1}^{\nu} k_j = n\right) \tag{1.2}$$

$$Q_\mu = \psi_0 + N_\mu(\varphi_j, x_j, t, \mathbf{U})$$

если $t = 0$ — многообразие пространственного типа. Будем считать, что N_μ — непрерывно-дифференцируемые функции по x_j, t, φ_j в некоторой области $(2m+1)$-мерного пространства G; $N_\mu \not\equiv N_\omega$ в G для $1 \leqslant \omega$, $\mu \leqslant \nu$ (полагаем здесь и в дальнейшем, что функция решения подставлена в уравнения $Q_\mu = 0$).

Пусть при переходе через характеристическую поверхность $\psi = 0$ функции решения $\mathbf{U}$ непрерывны, а нормальные производные имеют конечный разрыв (обозначим его $[\mathbf{U}_\varphi]$, $\mathbf{U}_\varphi = \partial \mathbf{U} / \partial \varphi$). Тогда [1]

$$[\mathbf{U}_\varphi] = \sum_{k=1}^{\tau} \sigma_k \mathbf{r}^k$$

Здесь σ_k — некоторые скалярные функции, r^k — правые нуль-векторы матрицы A. Их число τ в силу гиперболичности (1.1) равно $(n - \lambda)$, если λ — ранг матрицы A.

Выделим из множества характеристических поверхностей системы (1.1) пучок C поверхностей, удовлетворяющих уравнению $Q_\mu = 0$ (не уменьшая общности, можно считать, что $\mu = 1$), и разобьем все поверхности пучка C на классы, относя к одному классу все те поверхности, ранг матрицы A для которых одинаков. Тогда для поверхностей класса C_μ $(1 \leqslant \mu \leqslant \nu)$ будет $Q_1 = 0, \ldots, Q_\mu = 0$ и вследствие гиперболичности системы (1.1) на таких поверхностях $\lambda = (n - k_1 - k_2 - \ldots - k_\mu)$.

Если класс C_s (для некоторого фиксированного $\mu = s$) не пуст, то могут представиться два случая

а) для системы уравнений

$$Q_1 = 0, \ \ldots, \ Q_s = 0 \tag{1.3}$$

выполняются условия интегрируемости, т. е. скобки Пуассона, составленные из функций этой системы, равны нулю ((1.3) — полная система);

б) (1.3) — неполная система, но она может быть пополнена присоединением ненулевых скобок Пуассона так, что для характеристических поверхностей, удовлетворяющих полученной полной системе

$$Q_1 = 0, \ldots, Q_s = 0, \ P_{s+1} = 0, \ldots, P_{s+k} = 0 \tag{1.4}$$
$$Q_\mu \neq 0, \ \text{если} \ s + 1 \leqslant \mu \leqslant \nu.$$

В зависимости от того, какой из случаев имеет место, разрешим полную систему (1.3) или (1.4) относительно производных φ_a $(1 \leqslant a \leqslant l)$, полагая, что в некоторой области G_0 пространства G соответствующий якобиан отличен от нуля. Полученная система уравнений

$$\varphi_a = f(\varphi_b, \ x_j, \ t) \qquad (1 \leqslant a \leqslant l, \ l + 1 \leqslant b \leqslant m, \ l \leqslant m) \tag{1.5}$$

очевидно, будет якобиевой, так как эквивалентна некоторой полной системе. В системе (1.5) $l > s$, если имеет место случай б), и $l \leqslant s$, если выполняется а). Причем $l < s$ только тогда, когда не все $Q_1, \ldots, Q_s$ функционально независимы.

Оказывается, для каждого класса C_s картина распространения разрывов будет подобной.

Для класса C_1 она изучалась в целом ряде работ [1–6]. Известно, что разрыв, локализованный в некоторой точке поверхности из C_1, распространяется по бихарактеристическому лучу исходной системы (1.1). Величина разрыва в каждый момент времени определяется из уравнения переноса (при $k_1 = 1$) или из системы уравнений переноса (при $k_1 > 1$) [1–6].

Уравнения переноса вместе с системой уравнений бихарактеристик и с уравнениями, описывающими изменение φ_{ij} вдоль бихарактеристик $(\varphi_{ij} = \partial^2\varphi \, / \, \partial x_i \partial x_j)$, образуют систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которая в общем случае может быть решена численно, если для квазилинейной исходной системы дополнительно известно течение с одной стороны характеристической поверхности (параметры течения с этой стороны поверхности обозначим знаком «плюс»).

В п. 5 будет показано, что такая система обыкновенных дифференциальных уравнений может быть решена аналитически, когда

$$a_{\psi\varkappa} = a_{\psi\varkappa}(\mathrm{U}),\ b_\psi = b_\psi(\mathrm{U}),\ \mathrm{U}^+ = \mathrm{const},\ \mathrm{U}_\varphi{}^+ = 0,\ m = 3 \tag{1.6}$$

Закон распространения слабых разрывов при условиях (1.6), если $b_\psi = \mathrm{const}$, $k_1 = 1$ совпадает с законом распространения слабых разрывов в случае уравнений газовой динамики [3,4] с точностью до постоянных.

Если поверхность S принадлежит классу C_s $(1 < s \leqslant \nu)$, то разрыв из каждой точки такой поверхности будет распространяться по многообразию размерности l, где l — число уравнений в системе (1.5). Доказательству этого утверждения посвящены п. 2, 3 данной статьи. Закон распространения разрывов для класса C_1 получается из рассмотрения для произвольного класса C_s как частный случай, когда $l = 1$.

2. Покажем, что поверхности S, удовлетворяющие системе уравнений (1.5), могут быть заданы параметрически при помощи l параметров, т. е. что на поверхности

$$x_i = g_i(s_1, \ldots, s_l), \qquad \varphi_i = \Phi_i(s_1, \ldots, s_l), \qquad \varphi_{ij} = \Phi_{ij}(s_1, \ldots, s_l) \tag{2.1}$$

каждый параметр s_a $(1 \leqslant a \leqslant l)$ задает кривую, имеющую в каждой точке направление

$$\mathbf{Y}_a = \{y_{a1}, \ldots, y_{am}\},\ y_{aj} = \delta_{aj},\ y_{ab} = -\,\partial f_a / \partial \varphi_b\ \ (1 \leqslant a, j \leqslant l;\ l+1 \leqslant b \leqslant m) \tag{2.2}$$

Здесь δ_{aj} — символ Кронекера.

Поставим в соответствие каждому из уравнений системы (1.5) систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{ds_a} = y_{ai}, \qquad \frac{d\varphi_i}{ds_a} = \frac{\partial f_a}{\partial x_i} \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{2.3}$$

Получим l систем вида (2.3), для каждой из которых в силу полноты (1.5) функции $F_a = \varphi_a - f_a(\varphi_b, x_i, t) = \mathrm{const}$ являются первыми интегралами $(1 \leqslant a \leqslant l)$. Если из решений (2.3) выделить те, которые удовлетворяют условиям $F_a = 0$, то получим, что через любую точку поверхности S можно провести l кривых, плоскостной элемент $\{x_i, \varphi_i\}$ в каждой точке которых удовлетворяет (2.3) и является интегральным элементом системы (1.5).

Рассмотрим систему уравнений относительно функции $g_i(s_1, \ldots, s_l)$ при фиксированном i

$$\partial g_i / \partial s_a = y_{ai} \qquad (1 \leqslant a \leqslant l) \tag{2.4}$$

Будем считать, что в некоторой подобласти S_0 области X m-мерного пространства с точками $\{x_i\}$ y_{ai} — непрерывно-дифференцируемые функции. Тогда в S_0 выполняется необходимое и достаточное условие разрешимости системы (2.4). Для $1 \leqslant i \leqslant l$ это очевидно; при $i > l$ это следует из того, что скобки Пуассона $(F_a F_j) \equiv 0$ при $1 \leqslant a,\ j \leqslant l$. Из полноты системы (1.5) следует также разрешимость системы уравнений

$$\partial \Phi_i / \partial s_a = \partial f_a / \partial x_i$$

относительно функции Φ_i при каждом фиксированном i.

Положим, что

$$x_i = g_i(s_1, \ldots, s_l), \qquad \varphi_i = \Phi_i(s_1, \ldots, s_l) \tag{2.5}$$

Тогда функции (2.5) удовлетворяют системе (2.3). Следовательно, на поверхности S имеют место соотношения (2.5). Подобным образом можно доказать, что $\varphi_{ij} = \Phi_{ij}$ $(s_1, \ldots, s_l)$ на S.

Замечание. Известно [7], что при некоторых условиях, налагаемых на функции системы (1.5), существует и единственно решение этой системы в области $|x_a - \xi_a| < \varepsilon$ при $1 \leqslant a \leqslant l$ и при любых x_b $(l+1 \leqslant b \leqslant m)$, удовлетворяющее начальному значению $\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_l, x_{l+1}, \ldots, x_m) = \omega(x_{l+1}, \ldots, x_m)$. Совокупность систем (2.3), подобно системе уравнений бихарактеристик для одного уравнения первого порядка, может быть использована для нахождения решений систем вида (1.5). Решение системы уравнений в частных производных сводится к решению l систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

3. Если в случае поверхности S, принадлежащей классу C_s, провести выкладки, аналогичные [6] (п. 1), то для определения скалярных функций σ_k $(1 \leqslant k \leqslant \tau)$ получим систему

$$\sum_{k=1}^{\tau}\sum_{i=1}^{m} \mathbf{e}^j A^i \mathbf{r}^k \frac{\partial \sigma_k}{\partial x_i} + \Pi_j = 0 \qquad (j = 1, \ldots, \tau) \tag{3.1}$$

$$\Pi_j = \sum_{k=1}^{\tau} \sigma_k \mathbf{e}^j \Big[\sum_{i=1}^{m} A^i \mathbf{r}_i^k + (\nabla_{\mathbf{u}} L^{\varphi} \mathbf{r}^k) + A_{\varphi}\mathbf{r}^k + \sum_{\nu=1}^{\tau} \sigma_\nu (\nabla_{\mathbf{u}} A \mathbf{r}^\nu)\, \mathbf{r}^k\Big] \tag{3.2}$$

$$L^{\varphi} = A\mathbf{U}_{\varphi} + \sum_{i=1}^{m} A^i \mathbf{U}_i + \mathbf{B}, \qquad r^{ik} = \partial \mathbf{r}^k / \partial x_i$$

где $\mathbf{e}^j$ — левые нуль-векторы матрицы A.

Так как на S ранг A равен $\lambda = n - \tau$, некоторый минор матрицы A порядка λ отличен от нуля. Не уменьшая общности, можно считать, что

$$M_{11} = M_{11}\begin{pmatrix} 1 \ldots \lambda \\ 1 \ldots \lambda \end{pmatrix}$$

В системе (3.1), как можно проверить непосредственным вычислением

$$\mathbf{e}^j A^i \mathbf{r}^k = \frac{\partial M_{jk}}{\partial \varphi_i} M_{11}, \qquad M_{jk} = M_{jk}\begin{pmatrix} j1 \ldots \lambda \\ k1 \ldots \lambda \end{pmatrix} \quad (j, k = \lambda + 1, \ldots, n) \tag{3.3}$$

Так как $M_{jk}(f_a, \varphi_b, x_i, t) \equiv 0$, получаем

$$\frac{\partial M_{jk}}{\partial \varphi_b} + \sum_{a=1}^{l} \frac{\partial M_{jk}}{\partial \varphi_a} \frac{\partial f_a}{\partial \varphi_b} = 0 \tag{3.4}$$

Если воспользоваться соотношениями (3.3), (3.4), (2.1), систему (3.1) можно записать в виде

$$\sum_{a=1}^{l}\sum_{k=1}^{\tau} \frac{\partial M_{jk}}{\partial \varphi_a} \frac{\partial \sigma_k}{\partial s_a} + \Pi_j(s_a, \sigma_k, \mathbf{U}^+, \mathbf{U}_i^+, \mathbf{U}_{\varphi}^+) = 0 \tag{3.5}$$

Функции Π_j $(s_a, \sigma_k, U^+, U_i^+, U_\varphi^+)$ получены из (3.2) подстановкой выражений (2.1).

Система (3.5) описывает перенос слабого разрыва вдоль характеристической поверхности произвольного класса C_s и показывает, что разрыв, имевший место в некоторой точке поверхности S, распространяется по многообразию размерности l. Эта система, как и система уравнений переноса для класса C_1, не является внутренней, а позволяет определить величину разрыва только тогда, когда течение с одной стороны поверхности известно.

4. В работе [6] исследовалось распространение слабых разрывов для системы уравнений магнитной газодинамики, когда характеристическая поверхность примыкает к области покоя и принадлежит классу C_1. Если вектор магнитной напряженности $W = \{h_1, h_2, h_3\}$ параллелен нормали характеристической поверхности $\varphi(x_i) - t = 0$ и скорость звука c равна скорости Альфвена ($c^2 = \mu_l W^2 / \rho$, $W^2 = h_1^2 + h_2^2 + h_3^2$; μ_l — магнитная проницаемость, ρ — плотность), характеристическая поверхность принадлежит классу C_3, удовлетворяет системе уравнений $\varphi_i = h_i W^{-2} \rho^{1/2} \mu_l^{-1/2}$ $(i = 1, 2, 3)$ и в случае примыкания к покою ($h_i = \text{const}$, $\rho = \text{const}$, $u_i = 0$; u_i —компоненты вектора скорости) представляет собой плоскость.

Выберем систему координат так, чтобы уравнение этой плоскости имело вид $x_1 - t = 0$. Тогда распространение слабых разрывов вдоль такой характеристической поверхности будет описываться следующей системой уравнений переноса:

$$\frac{\partial\sigma_1}{\partial s_1} + \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial\sigma_i}{\partial s_i} + \sigma_i^2\right) = 0 \qquad (x_i = s_i) \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial\sigma_1}{\partial s_j} + 2\frac{\partial\sigma_j}{\partial s_1} + \sigma_1\sigma_j = 0 \qquad (j = 2, 3)$$

Система (4.1) — симметричная гиперболическая почти линейная система уравнений [1]. Плоскость $x_1 = s_1 = 0$ является для нее поверхностью пространственного типа. Поэтому решение задачи Коши для (4.1) существует и единственно в некоторой области R, примыкающей к плоскости $x_1 = 0$, если на этой плоскости σ_i $(i = 1, 2, 3)$ — достаточно гладкие функции [1].

Покажем, что в окрестности начального многообразия система (4.1) имеет решение типа простой волны при некоторых условиях, налагаемых на начальное распределение слабых разрывов. Положим $\sigma_2 = \psi_2(\sigma_1)$, $\sigma_3 = \psi_3(\sigma_1)$. Тогда для определения σ_1 получим систему уравнений

$$2\frac{\partial\sigma_1}{\partial s_1} + \psi_2^{\cdot}\frac{\partial\sigma_1}{\partial s_2} + \psi_3^{\cdot}\frac{\partial\sigma_1}{\partial s_3} + \sigma_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 = 0$$

$$\frac{\partial\sigma_1}{\partial s_j} + 2\psi_j^{\cdot}\frac{\partial\sigma_1}{\partial s_1} + \sigma_1\psi_j = 0 \qquad (j = 2, 3)$$

Эта система, если считать, что $B = \psi_2^{\cdot 2} + \psi_3^{\cdot 2} \neq 1$, может быть переписана следующим образом:

$$\frac{\partial\sigma_1}{\partial s_i} = \frac{A_i}{2(B-1)} \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{4.2}$$

$$A_1 = \sigma_1\psi_3\psi_3^{\cdot} + \sigma_1\psi_2\psi_2^{\cdot} - (\sigma_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2)$$

$$A_j = 2\,[\sigma_1\psi_j\psi_{5-j}^{\cdot} + \psi_j^{\cdot}(\sigma_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2) - \sigma_1\psi_j - \sigma_1\psi_{5-j}\psi_{5-j}^{\cdot}\psi_j^{\cdot}] \qquad (j = 2, 3)$$

точка в позиции штриха означает дифференцирование по σ_1.

Система (4.2) имеет решение, если $A_\nu^{\cdot} A_\mu - A_\nu A_\mu^{\cdot} = 0$ ($\nu, \mu = 1, 2, 3$). Эти условия выполняются тогда и только тогда, когда ψ_2, ψ_3 удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$A_1 = M_1 A_2, \qquad A_1 = M_2 A_3 \tag{4.3}$$

где M_1, M_2 — некоторые постоянные.

Так как (4.3) имеет решение, зависящее от произвольных постоянных, система (4.1) обладает решением типа простой волны при произвольном выборе постоянных.

Если выполняются условия (4.3), функция σ_1 удовлетворяет системе уравнений

$$M_1\frac{\partial\sigma_1}{\partial s_2} - \frac{\partial\sigma_1}{\partial s_1} = 0, \qquad M_2\frac{\partial\sigma_1}{\partial s_3} - \frac{\partial\sigma_1}{\partial s_1} = 0$$

Отсюда следует, что плоскости

$$t + x_2 M_1^{-1} + x_3 M_2^{-1} = \mathrm{const} \tag{4.4}$$

являются поверхностями уровня для σ_1 и, если на начальном многообразии $x_1 = 0$ слабые разрывы распределены так, что $\sigma_i = \mathrm{const}$ вдоль прямых $M_2x_2 + M_1x_3 = \mathrm{const}$, в окрестности плоскости $x_1 = 0$ будет существовать решение системы (4.1) типа простой волны. Слабый разрыв, имевший место на прямой $M_2x_2 + M_1x_3 = \mathrm{const}$, будет иметь место в каждой точке плоскости (4.4). Таким образом, в данном случае слабый разрыв заполняет двумерное многообразие. В общем случае, очевидно, из каждой точки начальной плоскости $x_1 = 0$ слабый разрыв может распространяться по трехмерному многообразию.

Аналогичный случай имеет место в кристаллооптике, когда нормаль плоской характеристической поверхности направлена по оптической оси кристалла. Характеристическая поверхность удовлетворяет системе уравнений [8]

$$\varphi_1 = \left[\frac{\mu_l\varepsilon_3(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{\rho^2(\varepsilon_1-\varepsilon_3)}\right]^{1/2}, \quad \varphi_2 = 0, \quad \varphi_3 = \left[\frac{\mu_l\varepsilon_1(\varepsilon_2-\varepsilon_3)}{\rho^2(\varepsilon_1-\varepsilon_3)}\right]^{1/2}$$
$$(\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3)$$

где ε_1, ε_2, ε_3 — диэлектрические постоянные по координатным осям.

Система уравнений переноса имеет вид

$$2\varepsilon_3\frac{\partial\sigma_1}{\partial s_1} - 2\varepsilon_2\varepsilon_3\frac{\partial\sigma_1}{\partial t} + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)\varphi_1\frac{\partial\sigma_2}{\partial s_2} = 0$$

$$(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)\frac{\partial\sigma_1}{\partial s_2} - 2\varepsilon_1\varphi_1\frac{\partial\sigma_2}{\partial s_1} - 2\varepsilon_1\varepsilon_3\frac{\partial\sigma_2}{\partial t} = 0$$

и легко приводится к волновому уравнению для каждого σ_i $(i = 1, 2)$

$$\frac{2\mu_l^2\varepsilon_2\varepsilon_3^2(\varepsilon_1-\varepsilon_3)}{c^4(\varepsilon_2-\varepsilon_3)(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2}\frac{\partial^2\sigma_1}{\partial\nu^2}+\frac{1}{2\varepsilon_1}\frac{\partial^2\sigma_1}{\partial s_2^2}-\frac{2\mu_l\varepsilon_2\varepsilon_3}{c^2(\varepsilon_2-\varepsilon_3)(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}\frac{\partial^2\sigma_1}{\partial t^2}=0$$

$$\frac{2\mu_l\varepsilon_1^3\varepsilon_2(\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2}{c^4\varepsilon_3(\varepsilon_1-\varepsilon_3)(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2}\frac{\partial^2\sigma_2}{\partial z^2}+\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_3}{2\varepsilon_3}\frac{\partial^2\sigma_2}{\partial s_2^2}-\frac{2\mu_l\varepsilon_1\varepsilon_2}{c^2(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}\frac{\partial^2\sigma_2}{\partial t^2}=0$$

Здесь

$$t=\varphi_1 s_1+\varphi_3 s_3,\qquad x_i=s_i\qquad (i=1,2,3)$$

$$\nu=\frac{\varepsilon_3(\varepsilon_2+\varepsilon_3)}{\varphi_1(\varepsilon_2-\varepsilon_3)}t-\frac{2\varepsilon_2\varepsilon_3(\varepsilon_1-\varepsilon_3)}{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)(\varepsilon_2-\varepsilon_3)}s_1$$

$$z=\frac{\varepsilon_1(\varepsilon_2+\varepsilon_3)}{\varphi_1(\varepsilon_1-\varepsilon_3)}t-\frac{2\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1-\varepsilon_2}s_1$$

Таким образом, подтверждается известный эффект, имеющий место при указанном направлении нормали характеристической поверхности, называемый «конической рефракцией».

5. Будем рассматривать систему (1.1) при условиях (1.6). Предположим, что характеристическая поверхность $\varphi(x_i)-t=0$ удовлетворяет уравнению $Q_1=0$ и что в (1.2) $k_1=1$. При этих условиях $[\mathbf{U}_\varphi]=\sigma\mathbf{r}$ ($\mathbf{r}$ — правый нуль-вектор матрицы A, σ — скалярная функция) и уравнение переноса для (1.1) будет иметь вид [6]

$$\alpha\frac{d\sigma}{dt}+\sigma\left[\mathbf{e}\sum_{i=1}^{m}A^i\mathbf{r}_i+\mathbf{e}\sum_{\varkappa=1}^{n}\mathbf{B}_\varkappa\mathbf{r}^\varkappa\right]+\sigma^2[\mathbf{e}(\nabla_\mathbf{u}A\mathbf{r})\mathbf{r}]=0 \tag{5.1}$$

Здесь

$$\alpha=A_{11}Q_2\cdots Q_n=\alpha(\mathbf{U},\varphi_i),\quad \mathbf{B}_\varkappa=\partial\mathbf{B}/\partial u_\varkappa,\quad \mathbf{r}_i=\partial\mathbf{r}/\partial x_i$$

$\mathbf{e}$ — левый нуль-вектор матрицы A, $r^\varkappa$ — компоненты вектора $\mathbf{r}$, A_{11} — алгебраическое дополнение элемента a_{11} матрицы A (предполагается, что $A_{11}\neq 0$).

Выпишем систему уравнений бихарактеристик для (1.1)

$$dx_i/dt=\partial Q_1/\partial\varphi_i,\qquad d\varphi_i/dt=0\qquad (i=1,\ldots,m) \tag{5.2}$$

Решением этой системы будут функции

$$\varphi_i=\mathrm{const},\ x_i=(\partial Q_1/\partial\varphi_i)t+M_i$$

где $\partial Q_1/\partial\varphi_i$, M_i — постоянные, т. е. бихарактеристики — прямые линии.

Так как $\varphi_i=\mathrm{const}$, в уравнении (5.1)

$$\alpha=\mathrm{const},\ \mathbf{e}\sum_{\varkappa=1}^{n}\mathbf{B}_\varkappa\mathbf{r}^\varkappa=T_1=\mathrm{const},\ \mathbf{e}(\nabla_\mathbf{u}A\mathbf{r})\mathbf{r}=T_2=\mathrm{const}$$

$$r_i=\sum_{k=1}^{n}(\partial\mathbf{r}/\partial\varphi_k)\varphi_{ki}$$

Известно, что

$$\frac{d\varphi_i}{dt}=\sum_{j=1}^{m}\frac{\varphi_{ij}\partial Q_1}{\partial\varphi_j}=0$$

Отсюда

$$\varphi_{im} = -\left(\sum_{j=1}^{m-1} \frac{\varphi_{ij}\partial Q_1}{\partial \varphi_j}\right) \Big/ \left(\frac{\partial Q_1}{\partial \varphi_m}\right) \tag{5.3}$$

Продифференцировав уравнение $Q_1 = 0$ по x_i, x_j ($i, j = 1, \ldots, m-1$) и подставив значения (5.3), для определения $\varphi_{ij}(t)$ получим систему

$$\frac{d\varphi_{ij}}{dt} = \sum_{k,\nu=1}^{m-1} \alpha_{k\nu}\varphi_{ik}\varphi_{j\nu} \tag{5.4}$$

$$\alpha_{k\nu} = -\frac{\partial^2 Q_1}{\partial\varphi_k\partial\varphi_\nu} + \frac{\partial^2 Q_1}{\partial\varphi_k\partial\varphi_m}\frac{\partial Q_1/\partial\varphi_\nu}{\partial Q_1/\partial\varphi_m} + \frac{\partial^2 Q_1}{\partial\varphi_\nu\partial\varphi_m}\frac{\partial Q_1/\partial\varphi_k}{\partial Q_1/\partial\varphi_m} -$$

$$- \frac{\partial^2 Q_1}{\partial\varphi_m{}^2}\frac{\partial Q_2/\partial\varphi_k\partial Q_1/\partial\varphi_\nu}{(\partial Q_1/\partial\varphi_m)^2} = \mathrm{const}$$

При $m = 3$ система (5.4) имеет первые интегралы

$$\frac{\alpha_{12}\varphi_{22} + \alpha_{11}\varphi_{12}}{\alpha_{12}\varphi_{11} + \alpha_{22}\varphi_{12}} = N_1, \qquad \frac{\alpha_{12}\varphi_{11} + \alpha_{22}\varphi_{12}}{\alpha_{12}(\varphi_{12}{}^2 - \varphi_{11}\varphi_{22})} = N_2 \tag{5.5}$$

которые позволяют свести эту систему к одному уравнению

$$\frac{d\varphi_{11}}{dt} = \frac{\alpha_{22}X + \beta X^{1/2}}{2N_2{}^2\alpha_{12}{}^2}$$

$$X = [\alpha_{22} - N_2\varphi_{11}(\alpha_{11} - N_1\alpha_{22})]^2 + 4N_2\alpha_{12}\varphi_{11}(N_1N_2\varphi_{11} + 1) \tag{5.6}$$

$$\beta = 2N_2\alpha_{12}{}^2\varphi_{11} + \alpha_{22}{}^2 - N_2\alpha_{22}\varphi_{11}(\alpha_{11} - N_1\alpha_{22})$$

Решение уравнения (5.6) имеет вид

$$\varphi_{11} = \frac{a_1(\alpha_{ij}) + a_2(\alpha_{ij})(t + T_3)}{a_3(\alpha_{ij}) + a_4(\alpha_{ij})(t + T_3)^2} \tag{5.7}$$

где T_3 — произвольная постоянная; значения остальных $\varphi_{ij}(t)$ определяются после подстановки (5.7) в (5.5), (5.3).

Нетрудно проверить вычислением, что в уравнении (5.1)

$$\mathbf{e}\sum_{i=1}^{m} A^i\mathbf{r}_i = -\frac{1}{2}\alpha\sum_{i,k=1}^{m}\alpha_{ik}\varphi_{ik} \tag{5.8}$$

Учитывая (5.8), подставим в (5.1) значения $\varphi_{ik}(t)$. При $m = 2$ имеем $\varphi_{ik} = a_{ik}/(b_{ik} - t)$, где a_{ik}, b_{ik} — постоянные. При $m = 3$ используем (5.7), (5.5), (5.3). Получим следующее уравнение переноса:

$$d\sigma/dt + \sigma[\Lambda_1 + {}^1/_2\Lambda(t)] + \Lambda_2\sigma^2 = 0$$

$$\Lambda_1 = \frac{T_1}{\alpha}, \quad \Lambda_2 = \frac{T_2}{\alpha}, \quad \Lambda(t) = \begin{cases} (t + T_0)^{-1} + (t + T^0)^{-1}, & m = 3 \\ (t + T_4)^{-1}, & m = 2 \end{cases} \tag{5.9}$$

$$\sigma^{-1} = e^{\Lambda_1 t}f(t)\left[M + \Lambda_2\int e^{-\Lambda_1 t}f^{-1}dt\right]$$

$$f(t) = \begin{cases} (t + T_0)^{1/2}(t + T^0)^{1/2}, & m = 3 \\ (t + T_4)^{1/2}, & m = 2 \end{cases} \tag{5.10}$$

здесь M — произвольная постоянная.

Если в системе (1.1) $b_\psi = \text{const}$, то в (5.10) $\Lambda_1 = 0$. Таким образом, закон изменения $\sigma(t)$ при $b_\psi = \text{const}$ с точностью до постоянных совпадают с законами распространения слабых разрывов в газовой динамике [3,4].

Многие системы, описывающие процессы механики сплошной среды, имеют вид (1.1) при $b_\psi = b_\psi(\mathbf{U})$, $a_{\psi\varkappa} = a_{\psi\varkappa}(\mathbf{U})$ (пластичность, газовая динамика, магнитная газодинамика и др.), поэтому законы распространения разрыва (5.10) универсальны.

Замечание. В уравнении переноса для системы уравнений газовой динамики значение коэффициента при σ совпадает со значением средней кривизны H поверхности $\varphi(x_i) = t$ [4]. Для произвольной системы (1.1) это свойство не выполняется. Например, в случае уравнений магнитной газодинамики

$$\sum_{i,k=1}^{2} \alpha_{ik}\varphi_{ik} = 4\,|\varphi|^{-3}\left\{H - 2c^2\varphi_3\varphi_{11}\,|\varphi|^{-3}\,\frac{\mu_i}{\rho}\left(3c^2\varphi_1^2\,\frac{\mu_i}{\rho} + |\varphi|^{-2}\right)\right\}$$

$$|\varphi| = \left(\sum_{i=1}^{3}\varphi_i^2\right)^{1/2}$$

Следовательно, значение коэффициента при σ (см. (5.9)) не равно H.

В заключение автор благодарит А. Ф. Сидорова за ценные советы и замечания.

Поступила 11 XI 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Курант Р., Гильберт Д. Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1964.
2. Jeffrey A. The propagation of weak discontinuities in guasi — linear symmetric hyperbolic systems. Z. angew. Math und Phys, 1963, vol. 14, Nr. 4, p. 301—314.
3. Сидоров А. Ф. О нестационарных течениях газа, примыкающих к области покоя. ПММ, 1966, т. 30, вып. 1.
4. Сидоров А. Ф. О некоторых пространственных течениях газа, примыкающих к области покоя, ПММ, 1968, т. 32, вып. 3.
5. Nitsche J. Über Unstetigrkeiten in den Ableitungen von Lösungen quasilinearer hyperbolischer Differential — gleichungsysteme. J. Rational Mech. and Analysis, 1953, vol. 2, Nr. 2, p. 291—297.
6. Рубина Л. И. О распространении слабых разрывов для систем уравнений магнитной газодинамики. ПММ, 1969, т. 33, вып. 5.
7. Kamke E. Bemerkungen zur theorie der partiellen Differentialgleichenden erster ordung. Math. Z, 1943, Bd. 49, No. 2, s. 256—284.
8. Вуд Р. Физическая оптика. Л.— М., ОНТИ, 1936.