Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 534.222.2

МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ СЛАБЫХ УДАРНЫХ ВОЛН

А. Ф. Сидоров

(Свердловск)

Предлагается метод получения точных решений некоторых смешанных задач Коши для нелинейных уравнений второго порядка гиперболического типа. Подробное рассмотрение проводится на примере уравнения для потенциала скоростей, соответствующего нестационарным плоскопараллельным течениям политропного газа, хотя метод применим к более широкому классу уравнений. Исследуются некоторые свойства построенных решений. В качестве приложения построена приближенная теория распространения криволинейных слабых ударных волн по однородному фону. В работе продолжено исследование, начатое в [1].

1. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ однородный политропный газ со скоростью звука $c = 1$ покоится внутри или вне достаточно гладкой замкнутой выпуклой цилиндрической поверхности S_0. Начиная с момента $t = 0$, в газе начинает двигаться поршень S_t с нулевой начальной нормальной скоростью V_n и ненулевым нормальным ускорением W_n, создавая сжатие или разрежение газа. На закон движения поршня S_t, занимающего при $t = 0$ положение S_0, никаких условий, кроме условий достаточной гладкости закона движения выпуклости поверхностей S_t и уже упомянутых условий на V_n и W_n, не накладывается. Требуется найти решение нелинейного уравнения для потенциала скоростей $\Phi(x_1, x_2, t)$ [2] в области, ограниченной поверхностью поршня S_t и поверхностью слабого разрыва R_t, отрывающегося в начальный момент времени от поверхности S_0 и распространяющегося с единичной нормальной скоростью по покоящемуся газу.

В условиях сформулированной задачи в [1] было построено приближенное решение в окрестности поверхности R_t, и для случая сжатия газа найдены предельные времена существования гладких потенциальных течений в зависимости от геометрии поверхности S_0 и закона движения поршня. Оказывается, что методом, использованным в [1], можно построить точное решение поставленной задачи в виде функционального ряда со специальными независимыми переменными. Однако вопрос об области сходимости этого ряда в общем случае остается открытым.

Введем вместо потенциала скоростей $\Phi(x_1, x_2, t)$ неизвестную функцию $\Psi(u_1, u_2, t)$ по формуле

$$\Psi = x_1u_1 + x_2u_2 - \Phi(x_1, x_2, t) + Mt \qquad (1.1)$$

Здесь M — постоянная уравнения Коши

$$c^2 = \frac{1}{\varkappa}\left(M - \Phi_t - \frac{1}{2}\sum \Phi_{x_i}^2\right), \qquad \varkappa = \frac{1}{\gamma - 1} \tag{1.2}$$

где c — скорость звука, u_i — компоненты вектора скорости, γ — показатель адиабаты. Уравнение для функции Ψ в переменных r, φ, t ($u_1 = r\cos\varphi$, $u_2 = r\sin\varphi$) было получено в [1].

Формулы для перехода к физическому пространству x_1, x_2, t имеют вид

$$x_1 = \Psi_r \cos\varphi - r^{-1}\Psi_\varphi \sin\varphi, \qquad x_2 = \Psi_r \sin\varphi + r^{-1}\Psi_\varphi \cos\varphi \tag{1.3}$$

Будем искать решение поставленной смешанной задачи Коши в виде

$$\Psi(r, \varphi, t) = \sum_{k=0}^{\infty} a^{(k)}(\varphi, t)\, r^k \tag{1.4}$$

В пространстве r, φ, t плоскость $r = 0$, соответствующая движению поверхности слабого разрыва R_t, является характеристическим многообразием уравнения для функции $\Psi(r, \varphi, t)$. Из условия, что при $r = 0$ формулы (1.3) определяют движение поверхности R_t со скоростью звука, равной единице, получим представления [1]

$$a^{(0)} = \mathrm{const} + \varkappa t, \qquad a^{(1)} = t + f(\varphi) \tag{1.5}$$

Здесь $f(\varphi)$ — произвольная функция, при помощи которой при $t = 0$ форма слабого разрыва R_0, совпадающего с поверхностью S_0, задается следующим образом:

$$x_1 = f(\varphi)\cos\varphi - f'(\varphi)\sin\varphi, \quad x_2 = f(\varphi)\sin\varphi + f'(\varphi)\cos\varphi \tag{1.6}$$

Подставляя ряд (1.4) в уравнение для $\Psi(r, \varphi, t)$ и приравнивая нулю коэффициенты при $r^{(s)}$, для $a^{(s+2)}(\varphi, t)$ ($s \geqslant 0$) получим уравнение

$$(s+1)(s+2)\,a^{(s+2)} - 2(s+2)(t + f + f'')\,a_t^{(s+2)} = F^{(s+2)}(\varphi, t) \tag{1.7}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
F^{(s+2)}(\varphi, t) = {} & \sum_{i,\,j=0}^{s-2} \{(2i + ij + 1)\, a_\varphi^{(i+2)} a_\varphi^{(j+2)} a_{tt}^{(s-i-j)} - \\
& - (s - 1 - i - j)(s - i - j)\, a_{\varphi t}^{(i+2)} a_{\varphi t}^{(j+2)} a^{(s-i-j)}\} - \\
& - \sum_{i,\,j=0}^{s-1} \{(j+1)(j+2)\, a_{\varphi\varphi}^{(i+1)} a^{(j+2)} a_{tt}^{(s+1-i-j)} + \\
& + (i+1)(j+1)(j+2)\, a^{(i+1)} a^{(j+2)} a_{tt}^{(s+1-i-j)} + 2j(i+1)\, a_t^{(i+1)} a_\varphi^{(j+1)} a_{\varphi t}^{(s+2-i-j)}\} + \\
& + \sum_{i,\,j=0}^{s}{}' \{(i+1)(j+1)\, a_t^{(i+1)} a_t^{(j+1)} a_{\varphi\varphi}^{(s+2-i-j)} + \\
& + (i+1)(j+1)(s + 2 - i - j)\, a_t^{(i+1)} a_t^{(j+1)} a^{(s+2-i-j)}\} + \\
& + \sum_{i=0}^{s-1} \left\{2(i+1)\, a_\varphi^{(i+1)} a_{\varphi t}^{(s+1-i)} - 2a_\varphi^{(s-1)} a_{\varphi t}^{(i+2)} - \frac{1}{\varkappa}(i+1)(i+2)\, a^{(i+2)} a_t^{(s-i)}\right\} - \\
& - \sum_{i=0}^{s} \left\{\frac{i+1}{\varkappa}\, a^{(i+1)} a_t^{(s+1-i)} + \frac{1}{\varkappa}\, a_{\varphi\varphi}^{(i+1)} a_t^{(s+1-i)} + 2(i+1)\, a_t^{(i+1)} a_{\varphi\varphi}^{(s+1-i)} + \right. \\
& \left. + 2(i+1)(s - i + 1)\, a_t^{(i+1)} a^{(s-i+1)}\right\} + \frac{1}{2\varkappa}(s-1)\, s a^{(s)} - \\
& - 2s a_t^{(1)} a_\varphi^{(s+1)} a_{\varphi t}^{(2)} + \frac{s}{2\varkappa}\, a^{(s)} + \frac{1}{2\varkappa}\, a_{\varphi\varphi}^{(s)} + a_{\varphi\varphi}^{(s)} + s a^{(s)}
\end{aligned} \tag{1.8}$$

В (1.8) $a^{(-k)} \equiv 0$ для $k > 0$, а штрих у знака суммы означает, что комбинация $(i, j) = (0, 0)$ исключается. Таким образом, в правые части уравнений (1.7) входят лишь функции $a^{(k)}$ и их производные по φ и t до второго порядка включительно для $k \leqslant s + 1$. Общее решение уравнения (1.7) имеет вид

$$a^{(s+2)} = (t + f + f'')^{s+1/2} \left[C^{(s+2)}(\varphi) + \frac{1}{2}\int_0^t F^{(s+2)}(\varphi, t)(t + f + f'')^{-s-3/2} dt\right] \tag{1.9}$$

где $C^{(s+2)}(\varphi)$ — произвольные функции. Произвольные функции вошли в коэффициенты $a^{(s)}$ в силу того, что данными Коши при $r = 0$ решение уравнения для функции $\Psi(r, \varphi, t)$ определяется неоднозначно, так как плоскость—характеристическая. Функции $C^{(s+2)}(\varphi)$ должны быть определены из заданного закона движения поверхности поршня S_t.

2. Рассмотрим вопрос об определении функций $C^{(s+2)}(\varphi)$. Пусть движение замкнутой поверхности S_t определяется уравнениями

$$x_1 = x_1(\beta, t), \qquad x_2 = x_2(\beta, t) \tag{2.1}$$

Здесь β — некоторый параметр, такой, что при $t = 0$ $\beta = \varphi$ и уравнения (2.1) переходят в соотношения (1.9). Если поверхность S_t представляет собой непроницаемую подвижную стенку, то на ней должно выполняться следующее кинематическое условие движения:

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) = V_n \tag{2.2}$$

где $\mathbf{u}$ — вектор скорости, $\mathbf{n} = (n_1(\beta, t), n_2(\beta, t))$ — единичный нормальный вектор к поверхности S_t, $V_n = V_n(\beta, t)$ — нормальная скорость движения поверхности S_t.

Запишем (2.2) в развернутом виде

$$r_*(\beta, t)(\cos\varphi_*(\beta, t) n_1(\beta, t) + \sin\varphi_*(\beta, t) n_2(\beta, t)) = V_n(\beta, t) \tag{2.3}$$

Здесь $r_*(\beta, t)$ и $\varphi_*(\beta, t)$ — некоторые неизвестные заранее функции такие, что $u_1{}^* = r_* \cos\varphi$, $u_2{}^* = r_* \sin\varphi_*$ определяют компоненты вектора скорости на поршне ($\varphi_*(\varphi, 0) = \varphi$, $r_*(\varphi, 0) = 0$). Функции $r_*(\beta, t)$ и $\varphi_*(\beta, t)$ находим из системы уравнений

$$x_1(\beta, t) = \cos\varphi_* \sum_{k=0}^{\infty}(k+1) a^{(k+1)}(\varphi_*, t) r_*{}^k - \sin\varphi \sum_{k=0}^{\infty} a_\varphi^{(k+1)}(\varphi_*, t) r_*{}^k$$

$$x_2(\beta, t) = \sin\varphi_* \sum_{k=0}^{\infty}(k+1) a^{(k+1)}(\varphi_*, t) r_*{}^k + \cos\varphi_* \sum_{k=0}^{\infty} a_\varphi^{(k+1)}(\varphi_*, t) r_*{}^k \tag{2.4}$$

которая получается после подстановки r_*, φ_* и Ψ из (1.4) в (1.3), а левые части берутся из (2.1). Функцию $V_n(\beta, t)$ вычисляем по формуле

$$V_n(\beta, t) = \frac{D(x_1, x_2)}{D(\beta, t)} \left[\left(\frac{\partial x_1}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \beta}\right)^2\right]^{-1/2} \tag{2.5}$$

Соотношение (2.3) представляет собой тождество по переменным β и t. Будем дифференцировать тождество (2.3) по t и полагать $t = 0$, предполагая, что все функции, входящие в (2.3) и (2.4), бесконечно дифференцируемы. Соответствующие частные производные от функций r_* и φ_* находятся после дифференцирования равенств (2.4). В результате проведения этой процедуры получим цепочку уравнений, из которой последовательно находятся все функции $C^{(s+2)}(\varphi)$ для $s \geqslant 0$ при условиях, что нормальное ускорение поршня $W_n(\varphi, 0) \neq 0$ при $t = 0$ и $f + f'' \neq 0$.

После первого дифференцирования (2.3), (2.4) получим для определения $C^{(2)}(\varphi)$ уравнение

$$\frac{\partial x_1}{\partial t}(\varphi, 0)\cos\varphi + \frac{\partial x_2}{\partial t}(\varphi, 0)\sin\varphi = V_n(\varphi, 0) = a_t^{(1)}(\varphi, 0) + $$
$$+ 2a^{(2)}(\varphi, 0)\frac{\partial r_*}{\partial t}(\varphi, 0) = 0$$
$$\frac{\partial r_*}{\partial t}(\varphi, 0) = W_n(\varphi, 0) \tag{2.6}$$

Из (2.6) функция $C^{(2)}(\varphi)$ однозначно выражается через функции $W_n(\varphi, 0)$ и $f(\varphi)$. На следующем шаге для нахождения $C^{(3)}(\varphi)$, составляя линейные комбинации из продифференцированных дважды по t соотношений (2.4), получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2}\cos\varphi + \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2}\sin\varphi = 4a_t^{(2)} + 6a^{(3)}\left(\frac{\partial r_*}{\partial t}\right)^2 + 2a^{(2)}\frac{\partial^2 r_*}{\partial t^2} -$$
$$-\left(\frac{\partial \varphi_*}{\partial t}\right)^2\left(a^{(1)} + a_{\varphi\varphi}^{(1)}\right) + 2a_\varphi^{(2)}\frac{\partial r_*}{\partial t}\frac{\partial \varphi_*}{\partial t} \tag{2.7}$$

Здесь

$$\frac{\partial \varphi_*}{\partial t} = (f + f'')^{-1}\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial t} - 2a_\varphi^{(2)}\frac{\partial r_*}{\partial t}\right), \qquad \frac{\partial^2 r_*}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 V_n}{\partial t^2}(\varphi, 0) \tag{2.8}$$
$$\Gamma = -x_1\sin\varphi + x_2\cos\varphi, \qquad t = 0 \tag{2.9}$$

Ясно, что эту процедуру можно продолжить и дальше. Условия

$$\partial r_*/\partial t\,(\varphi, 0) \neq 0, \qquad f + f'' \neq 0$$

выполняющиеся для выпуклых поверхностей S_0, обеспечивают возможность однозначного нахождения произвольных функций $C^{(s)}(\varphi)$. Ввиду громоздкости уравнения для определения $C^{(s)}(\varphi)$ для $s \neq 3$ не приводим.

3. Построенный ряд (1.4), коэффициенты которого, как показано выше, однозначно определяются по заданному закону движения поршня S_t, дает точное формальное решение поставленной задачи. Установление области сходимости этого ряда и рядов для соответствующих производных, входящих в уравнение (1.3), представляется чрезвычайно трудной задачей.

Для случая линейных гиперболических систем разработан [3] метод решения задачи Коши при помощи сходящихся разложений на бегущие волны, когда члены рядов имеют в качестве множителей обобщенные функции, содержащие при увеличении номера члена ряда все более слабые особенности, а коэффициенты при обобщенных функциях определяются из обыкновенных дифференциальных уравнений. Доказательство сходимости таких рядов сведено к теореме существования Коши — Ковалевской [4]. Однако не видно, как можно перенести эти результаты на случай нелинейных уравнений гиперболического типа.

Предположив, что функция Ψ имеет непрерывные частные производные $m + 2$-го порядка, содержащие дифференцирование по каждой из переменных t, r, φ не выше порядка m, и оставив в ряде (1.4) $m + 1$ слагаемое, получим приближенное решение уравнения для функции $\Psi(r, \varphi, t)$. У функций (2.1) предполагается существование производных до порядка m. Для различных m сделанные предположения выполняются в ряде конкретных течений [5].

Установим область сходимости ряда, аналогичного ряду (1.4), в случае решения смешанной задачи Коши предлагаемым методом в простейшей модельной ситуации — для одномерного волнового уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \tag{3.2}$$

Пусть начальные и краевые условия имеют вид

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \qquad x \geqslant 0, \qquad u_x(0, t) = F(t), \qquad t \geqslant 0 \tag{3.2}$$

Вводя новую неизвестную функцию $\Psi(r, t)$ по формуле $\Psi = xu_x - u$ $(r = u_x)$, для $\Psi(r, t)$ получим уравнение Монжа — Ампера

$$\Psi_{rt}^2 - \Psi_{rr}\Psi_{tt} = 1, \qquad x = \Psi_r \tag{3.3}$$

Разыскивая решение поставленной задачи в виде

$$\Psi(r, t) = \sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}(t)\, r^k \tag{3.4}$$

получим, что $A^{(0)}(t) = 0$, $A^{(1)}(t) = t$, так как линия $r = 0$ соответствует слабому, распространяющемуся с единичной скоростью разрыву. Для $s \geqslant 2$ коэффициенты $A^{(s)}(t)$ определяются из уравнений $(k \geqslant 1)$

$$\sum_{i=0}^{k} (i + 1)\left[(k - i + 1)\, A_t^{(i+1)} A_t^{(k-i+1)} - (i + 2)\, A^{(i+2)} A_{tt}^{(k-i)}\right] = 0 \tag{3.5}$$

Из (3.5) по индукции получим, что все $A^{(s)}(t) = C_s$ $(s \geqslant 2)$, где C_s — произвольные постоянные. Таким образом, ряд (3.4) имеет вид

$$\Psi(r, t) = tr + \sum_{s=2}^{\infty} C_s r^s \tag{3.6}$$

Для определения постоянных C_s из условий (3.2) имеем уравнение

$$t + \sum_{s=2}^{\infty} sC_s\, [F(t)]^{s-1} = 0 \tag{3.7}$$

Положим $F(t) = \omega$ и пусть функция $F(t)$ такова, что в окрестности точки $t = 0$ существует однозначная обратная функция F^{-1} $(F^{-1}(0) = 0)$

$$t = F^{-1}(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \omega^k \tag{3.8}$$

и ряд (3.8) абсолютно сходится в некоторой области $|\omega| < \omega_0$.

Тогда из (3.7) и (3.8) следует, что $C_{s+1} = -\alpha_s / s+1$ и сходимость ряда (3.6) и рядов для производных имеет место во всяком случае там же, где сходится ряд для $F^{-1}(\omega)$.

Кроме установления сходимости рассматриваемых рядов необходимо еще установить возможность перехода в физическое пространство x_1, x_2, t, т. е. разрешимость уравнений (1.3) относительно функций $r = r(x_1, x_2, t)$, $\varphi = \varphi(x_1, x_2, t)$. Для этого в каждом конкретном решении достаточно проверить, что якобиан $I = \partial(x_1, x_2) / \partial(r, \varphi)$ для рассматриваемого интервала времени $0 < t < T$ не обращается в нуль. Вычислив I для фиксированного t, получим

$$I = r^{-1}(\Psi_{r\varphi} - r^{-1}\Psi_\varphi)^2 - \Psi_{rr}(\Psi_r + r^{-1}\Psi_{\varphi\varphi}) \tag{3.9}$$

Непосредственно из вида I (3.9) следует, что если течение не слишком сильно отличается от одномерного ($\Psi_{r\varphi}$, Ψ_φ, $\Psi_{\varphi\varphi}$ малы), то в окрестности поверхности R_t, так как $\Psi_{rr}(0, t)$, $\Psi_r(0, t) \neq 0$ возможен переход в физическое пространство x_1, x_2, t.

4. Используем построенное в п. 2 представление функции для изучения распространения слабых ударных волн, образующихся после разрушения потенциальных течений непосредственно на поверхности слабого разрыва R_t для случая течений сжатия (поршень S_t вдвигается в газ).

Из формул (1.3) следует, что бесконечные градиенты газодинамических величин появляются на поверхности R_t, если $\Psi_{rr}(0, \varphi, t)$ обращается в нуль. Таким образом, определив из уравнения $a^{(2)}(\varphi, t) = 0$ кривую $t = t(\varphi)$, в пространстве x_1, x_2, t на поверхности R_t получаем некоторую пространственную кривую Г, от которой с нулевой начальной интенсивностью начинает формироваться ударная волна.

Для нахождения закона движения образующейся ударной волны по постоянному фону используем отрезок ряда (1.4)

$$\Delta = a^{(0)} + a^{(1)}r + a^{(2)}r^2 + a^{(3)}r^3 \tag{4.1}$$

где $a^{(i)}(\varphi, t)$ определяется по формулам (1.9). Будем предполагать, что ударная волна слабая, течение за волной изэнтропическое, потенциальное и описывается соотношением (4.1). Как уже отмечалось в [1], учет слагаемого $a^{(3)}r^3$ необходим, чтобы передать профили величин за ударной волной.

Движение фронта ударной волны в плоскости x_1, x_2 будем описывать формулами (1.3), где вместо Ψ взято Δ из (4.1) и положено $r = R(\varphi, t)$, а R — функция, подлежащая определению. Уравнение для функции $R(\varphi, t)$ получим, вычислив нормальную скорость $D^*(\varphi, t)$ движения ударной волны, описываемой формулами $x_1 = x_1(\varphi, t)$, $x_2 = x_2(\varphi, t)$ следующими из (1.3), и приравняв ее выражению

$$D(\varphi, t) = 1 + \frac{\gamma+1}{4}R + \frac{(\gamma+1)^2}{32}R^2 \tag{4.2}$$

Здесь $D(\varphi, t)$ — нормальная скорость движения ударной волны, выраженная из условий Гюгонио [6].

Производя вычисления, из соотношения $D^{*2} = D^2$ получим для функции $R(s,t)$ нелинейное уравнение в частных производных первого порядка

$$D^2 [(\Delta_{rr} R_\varphi + AR)^2 + (B + AR_\varphi)^2] =$$
$$= \left[\left(\Delta_{rt} A - \Delta_{rr} \frac{\Delta_{\varphi t}}{R}\right) R_\varphi + (\Delta_{rr} B - RA^2) R_t + (\Delta_{rt} B - \Delta_{\varphi t} A)\right]^2 \qquad (4.3)$$
$$\Delta_{r\varphi} - \frac{\Delta_\varphi}{R} = RA, \qquad \Delta_r + \frac{\Delta_{\varphi\varphi}}{R} = B$$

Для уравнения (4.3) имеем начальное условие $R = 0$ вдоль линии l [1]

$$t = \frac{1}{(\gamma + 1)^2 W(\varphi)} \left[\frac{1}{W(\varphi)(f + f'')} - 2(\gamma + 1)\right] \qquad (4.4)$$

где $-W(\varphi) > 0$ — нормальное ускорение поршня S_t при $t = 0$ и предполагается, что на поверхности R_t не происходит фокусировок (не обращаются в нуль радиусы кривизны поверхности R_t).

Свободный член левой части уравнения (4.3), не содержащий R, равен B^2 и равен свободному члену правой части (4.3), так как $\Delta_{rt} = 1 + O(r)$. Поэтому уравнение (4.3) имеет решение $R \equiv 0$, удовлетворяющее начальному условию $R = 0$ вдоль кривой l.

Вычислив вдоль кривой l возможные значения производной по нормали от функции R и сведя обычным образом решение поставленной задачи для уравнения (4.3) к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений, можно показать, что при некоторых ограничениях на классы течений, кроме нулевого решения в окрестности кривой l, существует лишь одно ненулевое решение уравнения (4.3), удовлетворяющее всем необходимым условиям и имеющее физический смысл.

5. Рассмотрим более подробно одномерный случай и исследуем распространение слабых цилиндрических ударных волн по покоящемуся газу.

Пусть в однородный газ со скоростью звука $c = 1$, находящийся в начальный момент времени вне цилиндрической трубы радиусом R_0, начинает вдвигаться с нулевой начальной скоростью и ненулевым ускорением $-W > 0$ цилиндрический поршень. Момент разрушения t^* потенциального течения на поверхности слабого разрыва определяется по формуле (4.4).

Вводя переменную $x = t + R_0$, из уравнения (4.3) после вычисления $a^{(2)}(\varphi, t)$ и $a^{(3)}(\varphi, t)$ получим для функции $R = R(x)$ обыкновенное дифференциальное уравнение

$$R' \{C_2 x^{1/2} + (\gamma + 1) x + R [Ax - {}^1/_2 (\gamma + 1)(\gamma + 4) x \ln x + {}^{11}/_8 C_2^2 +$$
$$+ {}^1/_4 C_2 (15\gamma + 27) x^{1/2}]\} + R [{}^1/_2 C_2 x^{-1/2} + {}^3/_4 (\gamma + 1)] +$$
$$+ {}^1/_2 R^2 [A - {}^1/_2 (\gamma + 1)(\gamma + 4)(\ln x + 1) + {}^1/_8 C_2 (15\gamma +$$
$$+ 27) x^{-1/2} - (\gamma + 1)^2/16] = 0 \qquad (5.1)$$

где постоянная C_2 находится из соотношения (2.6)

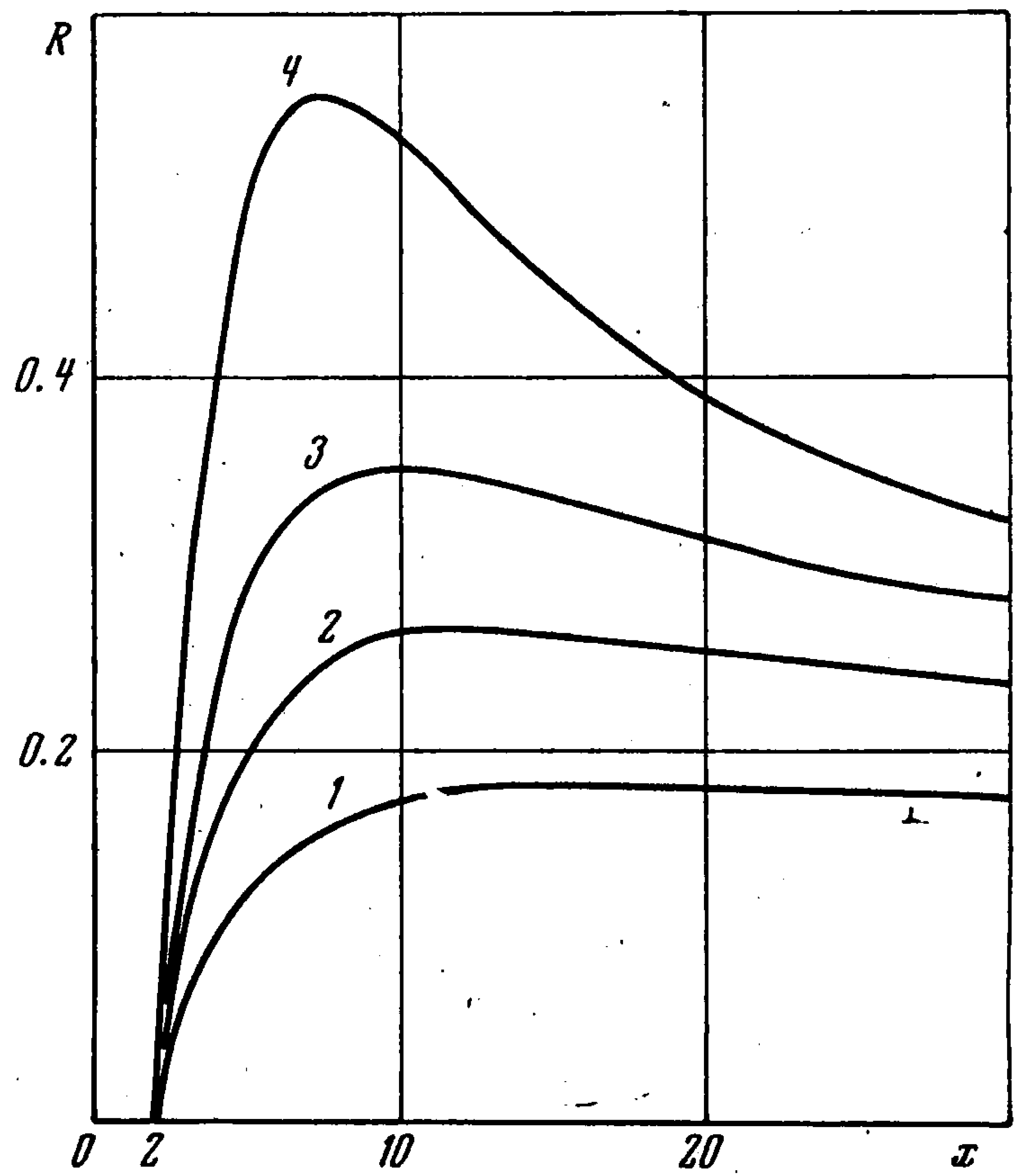
$$C_2 = R_0^{-1/2} W^{-1} (1 - (\gamma + 1) R_0 W) < 0 \qquad (\partial r_* / \partial t = -W) \qquad (5.2)$$

а постоянная $A = {}^1/_6 C_3$ определяется из (2.7) по заданной величине производной от ускорения при $t = 0$.

Начальная точка $(R, x) = (0, x^*) = (0, t^* + R_0)$ для уравнения (5.1) — седло. Через нее проходит две интегральные кривые: одна $R \equiv 0$, а наклон второй в точке $(0, x^*)$ положителен, если постоянные C_2, A, x^* удовлетворяют неравенству

$$Ax^* - {}^1/_2(\gamma+1)(\gamma+4)x^*\ln x^* + {}^{11}/_8C_2{}^2 + {}^1/_4C_2(15\gamma+27)x^{*^{1/2}} < 0 \quad (5.3)$$

Для фиксированных значений постоянных W, R_0, A, γ ненулевое решение уравнения (5.1), проходящее через точку $(0, x^*)$, можно построить численно. При выполнении условия (5.3) интегральные кривые на промежутке $[x^*, \infty)$ имеют один максимум и убывают до нуля при $x \to \infty$.



На фигуре приведены результаты численных расчетов для $\gamma = 1.4$, $W = -1$, $R_0 = 1$ и четырех значений A, равных 15, 19, 21, 23, соответствующих кривым *1—4*. Значения максимальных R и соответствующих значений x следующие: (0.182, 18.3), (0.263, 12.8), (0.344, 10.1), (0.547, 7.3). При критическом значении $A = A^* \approx 25.4$ неравенство (5.3) нарушается.

Рассмотрим в заключение вопрос об асимптотическом законе затухания слабых цилиндрических ударных волн при больших временах (на большом удалении от места образования волны). Предполагая, что $R \to 0$ при $x \to \infty$, и оценивая порядки слагаемых в (5.1), в первом приближении, оставив старшие по порядку члены, получим уравнение

$$R'x + {}^3/_4R = 0 \quad (5.4)$$

Из (5.4) получаем асимптотический закон затухания слабых ударных волн, установленный Ландау [7] $R = O(x^{-3/4})$.

Представив далее $R(x)$ в виде

$$R(x) = Cx^{-3/4} + Q(x), \qquad C = \text{const} \quad (5.5)$$

и оценив порядки слагаемых в полученном из (5.1) уравнении для $Q(x)$, во втором приближении получим уравнение (предполагаем, что $\lim Q(x) \cdot x^{3/4} = 0$ при $x \to \infty$)

$$(\gamma+1)xQ' + {}^3/_4(\gamma+1)Q - {}^1/_4CC_2x^{-5/4} = 0 \quad (5.6)$$

При помощи (5.6) получаем следующий закон затухания слабых цилиндрических ударных волн при больших t:

$$R \sim C\left[(t+R_0)^{-3/4} - \frac{C_2}{2(\gamma+1)}(t+R_0)^{-5/4}\right]$$

Поступила 27 IX 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Сидоров А. Ф. О разрушении потенциальных течений газа, примыкающих к области покоя. ПММ, 1971, т. 35, вып. 3.
2. Мизес Р. Математическая теория течений сжимаемой жидкости. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
3. Курант Р. Уравнения с частными производными, М., «Мир», 1964.
4. Ludwig D. Exaxt and asymptotic solutions of the Cauchy problem. Communs. Pure and Appl. Math., 1960, vol. 13, No. 3.
5. Сидоров А. Ф. О некоторых пространственных течениях газа, примыкающих к области покоя. ПММ, 1968, т. 32, вып. 3.
6. Курант Р., Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны. М., Изд-во иностр. лит., 1950.
7. Ландау Л. Д. Об ударных волнах на далеких расстояниях от места их возникновения. ПММ, 1945, т. 9, вып. 4.