Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 62—50

УСЛОВИЯ УКЛОНЕНИЯ В ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В. С. Пацко

(Свердловск)

Приводятся необходимые и достаточные условия уклонения в линейной дифференциальной игре второго порядка. Данная статья примыкает к работам [1-4].

1. Рассмотрим систему второго порядка

$$dx/dt = Ax + u - v \tag{1.1}$$

Здесь x — двумерный фазовый вектор, A — постоянная матрица 2×2, u и v — управляющие воздействия первого и второго игроков соответственно. Предположим, что в любой момент времени t

$$u(t) \in U, \qquad v(t) \in V \tag{1.2}$$

где U — отрезок на плоскости, не сводящийся к точке, а V — выпуклое, ограниченное, замкнутое множество.

Под окончанием игры будем понимать попадание системы (1.1) в некоторую заранее заданную точку m.

Определим понятие уклонения. Пусть «реализация $u(\cdot)$» — измеримая функция времени $u(t)$, $t_0 \leqslant t < \infty$, удовлетворяющая при любом t ограничению (1.2) и формируемая первым игроком в процессе игры каким-либо способом. Будем считать, что второй игрок при $t \geqslant t_0$ может столкнуться с любой реализацией $u(\cdot)$. Свое управление второй игрок обязан строить по принципу обратной связи при помощи дискретной схемы $\{v[x], \Delta[x]\}$. Дискрет времени $\Delta[x] > 0$ определяет величину полуинтервала $t^* \leqslant t < t^* + \Delta[x[t^*]]$, в течение которого управление v держится постоянным и зависит от позиции $x[t^*]$, где выбирается по $v[x]$.

Дискретную схему $\{v[x], \Delta[x]\}$ назовем допустимой, если при любой начальной позиции x_0 и при любой реализации $u(\cdot)$ моменты переключения управления v не могут стремиться слева к пределу t_*, не совпадающему с моментом попадания системы (1.1) в точку m.

Обозначим через $T[x_0; v[x], \Delta[x], u(\cdot)]$ время перевода системы (1.1) из начальной позиции x_0 в точку m при допустимой дискретной схеме $\{v[x], \Delta[x]\}$ и реализации $u(\cdot)$. Пусть

$$T[x_0; v[x], \Delta[x]] = \inf_{u(\cdot)} T[x_0; v[x], \Delta[x], u(\cdot)]$$

где точная нижняя грань берется по всем реализациям $u(\cdot)$.

Определение. В игре возможно уклонение, если существует допустимая дискретная схема $\{v^\circ[x], \Delta^\circ[x]\}$, при которой для любой начальной позиции $x_0 \neq m$ время $T[x_0; v^\circ[x], \Delta^\circ[x]] = \infty$.

Исключим из рассмотрения случай, когда множество V — отрезок, лежащий на прямой, проходящей через отрезок U. Необходимые и достаточные условия уклонения для этого случая вытекают из известных результатов теории дифференциальных игр [1,3,5].

Для удобства в дальнейшем будем считать, что точка m совпадает с началом координат, а отрезок U лежит на оси x_2.

2. Предположим, что множество V не пересекается осью x_2 и для определенности лежит от оси x_2 строго справа. Выберем окрестность O точки m так, чтобы для любого $x \in O$ множество $-Ax + V$ лежало строго справа от оси x_2. Пусть ξ — произвольный луч, выходящий из точки m и направленный вправо от оси x_2. Полосой $P(\xi)$ и $(Q(x, \xi))$ назовем максимальную совокупность прямых, параллельных лучу ξ и проходящих через множество U $(-Ax + V)$.

Для любого $x \in O$ определим секторы $k_1(x)$, $k_2(x)$, $k(x)$, $s(x)$

$$\begin{aligned}
&k_1(x) = \{\xi\colon P(\xi) = Q(x, \xi)\} \\
&k_2(x) = \{\xi\colon P(\xi) \supset Q(x, \xi), \qquad P(\xi) \neq Q(x, \xi)\} \\
&k(x) = k_1(x) \cup k_2(x) \\
&s(x) = \{\xi\colon P(\xi) \subset Q(x, \xi), \qquad P(\xi) \neq Q(x, \xi)\}
\end{aligned}$$

Отметим, что из условия непустоты сектора $k_2(x)$ $(s(x))$ в произвольной точке $x \in O$ следует, что он не вырождается в луч в этой точке. Напротив, если сектор $k_1(x)$ не пуст при некотором $x \in O$, то он состоит в этой точке из одного луча.

Теорема 2.1. Пусть множество V лежит строго справа от оси x_2. Для того чтобы уклонение было возможно, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из следующих двух условий: 1) $s(m) \neq \varnothing$, 2) $k_1(m) \neq \varnothing$ и существует окрестность $L \subset O$ точки m такая, что $s(x) \neq \varnothing$ при любом $x \in (L \setminus \{m\}) \cap k_1(m)$.

Доказательство теоремы вытекает из лемм и следствия, формулировки которых приводятся ниже.

Допустим, что $k_1(m) \neq \varnothing$. Прямую, на которой лежит луч $k_1(m)$, обозначим через β.

Пусть прямая β не инвариантна относительно преобразования A, соответствующего матрице A. Тогда множество $\gamma = \{x\colon Ax \in \beta\}$ есть прямая, проходящая через точку m. Прямая делит плоскость X на две полуплоскости. Ту из них, что содержит луч $k_1(m) \setminus \{m\}$, назовем Γ. Прямую γ не будем включать в полуплоскость Γ.

Через $C(r)$ обозначим круг радиуса r с центром в точке m, вложенный в O. Если $k_1(m) \neq \varnothing$ и прямая β не инвариантна, положим $D(r) = C(r) \cap \cap \Gamma$. Если $k_1(m) \neq \varnothing$ и прямая β инвариантна, то $D(r) = C(r) \cap \beta$. При $k_1(m) = \varnothing$ положим $D(r) = C(r)$.

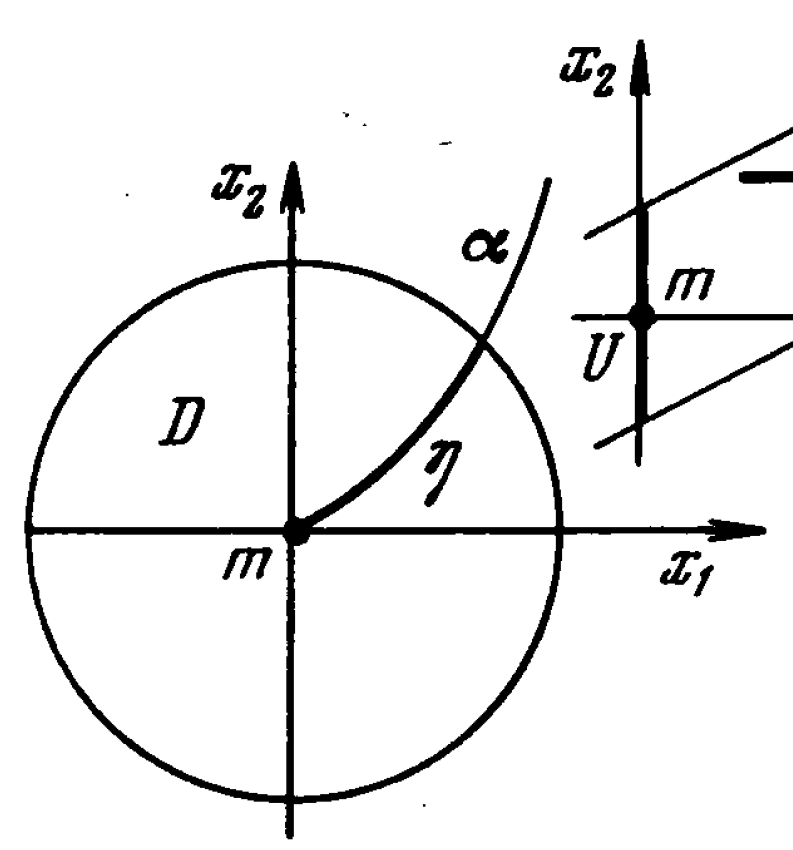
Лемма 2.1. Пусть $k_1(m) \neq \varnothing$. Тогда существует такое число $r^* > 0$, что либо $k(x) \neq \varnothing$ при любом $x \in D(r^*)$, либо $s(x) \neq \varnothing$ при любом $x \in D(r^*)$.

Следствие 2.1. Пусть $k_1(m) \neq \varnothing$. Тогда эквивалентны следующие два условия: 1) существует окрестность $L \subset O$ точки m такая, что $k(x) \neq \varnothing$ ($s(x) \neq \varnothing$) при любом $x \in (L \setminus \{m\}) \cap k_1(m)$; 2) существует число $r^* > 0$ такое, что $k_1(x) \neq \varnothing$ ($s(x) \neq \varnothing$) при любом $x \in D(r^*)$.

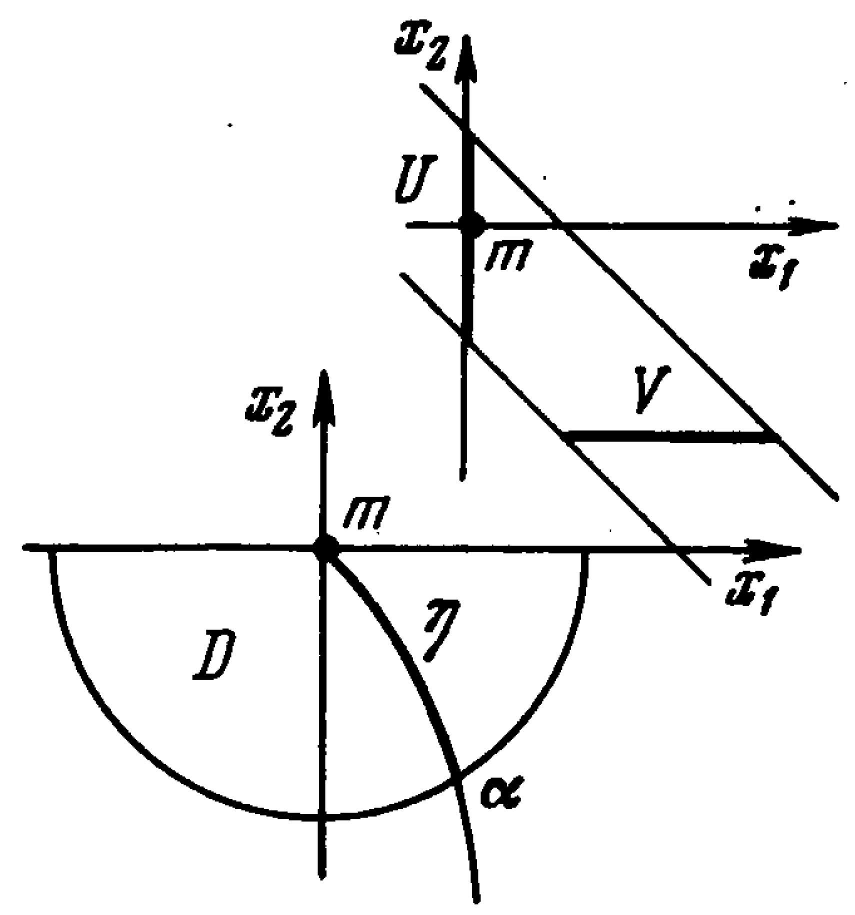
Лемма 2.2. Пусть $k_2(m) \neq \varnothing$ ($s(m) \neq \varnothing$). Тогда существует число $r^* > 0$ такое, что $k_2(x) \neq \varnothing$ ($s(x) \neq \varnothing$) при любом $x \in D(r^*)$.

Лемма 2.3. Если существует число $r^* > 0$ такое, что $k(x) \neq \varnothing$ при любом $x \in D(r^*)$, то уклонение невозможно.

Лемма 2.4. Если существует число $r^* > 0$ такое, что $s(x) \neq \varnothing$ при любом $x \in D(r^*)$, то уклонение возможно.



Фиг. 1



Фиг. 2

Отметим, что доказательства лемм 2.2, 2.3 носят конструктивный характер. А именно, при доказательстве леммы 2.2 вначале строится некоторое, отличное от $\{m\}$, множество η начальных позиций x_0. Затем указывается способ формирования по любому $x_0 \in \eta$ и по любой дискретной схеме $\{v[x],\ \Delta[x]\}$ реализации $u(\cdot)$, при которой время $T[x_0;\ v[x],\ \Delta[x],\ u(\cdot)] < \vartheta$. Здесь число $\vartheta < \infty$ не зависит ни от $x_0 \in \eta$, ни от $\{v[x],\ \Delta[x]\}$. Доказательство леммы 2.3 основано на построении дискретной схемы $\{v^\circ[x],\ \Delta^\circ[x]\}$, при которой $T[x_0;\ v^\circ[x],\ \Delta^\circ[x]] = \infty$ для любого $x_0 \neq m$.

В качестве примера к теореме 2.1 рассмотрим систему

$$dx_1 / dt = x_2 + u_1 - v_1, \qquad dx_2/dt = u_2 - v_2 \tag{2.1}$$

с ограничениями

$$U = \{u : u_1 = 0,\ |u_2| \leqslant 1\}$$
$$V = \{v : 1 \leqslant v_1 \leqslant 3,\ v_2 = \mathrm{const}\}$$

Пусть O — открытый круг радиуса $^1/_2$ с центром в точке m.

Выделим четыре случая: 1) $|v_2| < 2$, 2) $v_2 = -2$, 3) $v_2 = 2$, 4) $|v_2| > 2$. Эти случаи показаны соответственно на фиг. 1—4. В первом из них $k_2(m) \neq \varnothing$, во втором и третьем $k_1(m) \neq \varnothing$, в четвертом $s(m) \neq \varnothing$. При $v_2 = -2$ ($v_2 = 2$) луч $k_1(m)$ направлен вниз (вверх) от оси x_1. В этом случае $k_2(x) \neq \varnothing$ ($s(x) \neq \varnothing$) для любого $x \in (O \setminus \{m\}) \cap k_1(m)$.

Из теоремы 2.1 следует, что в случаях 1), 2), уклонение невозможно, а в случаях 3), 4) возможно. Покажем непосредственно, каким образом в случаях 1), 2) формируется реализация $u(\cdot)$, препятствующая уклонению, и как в случаях 3) 4) строится дискретная схема $\{v^\circ[x],\ \Delta^\circ[x]\}$, обеспечивающая уклонение.

1°. Рассмотрим случаи 1) 2). В случае 1) через D обозначим открытый круг радиусом $^1/_4(2 - |v_2|)$ с центром в точке m (фиг. 1). В случае 2) положим $D = O \cap \{x : x_2 < 0\}$ (фиг. 2).

Если $v_2 \geqslant 1$, примем $v_1^* = 1$. Если $v_2 < 1$, возьмем $v_1^* = 3$. Выпустим из точки m в обратном времени $\tau = -t$ движение системы (2.1) в силу постоянных $u_2 = 1$ и $v_1 = v_1^*$. Траекторию этого движения обозначим через α. Пусть $\eta = (\alpha \cap D) \cup \{m\}$. Кривая η удовлетворяет уравнению

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{v_2 - 1}{v_1^* - x_2} \tag{2.2}$$

Определим на произведении $O \times V$ функцию

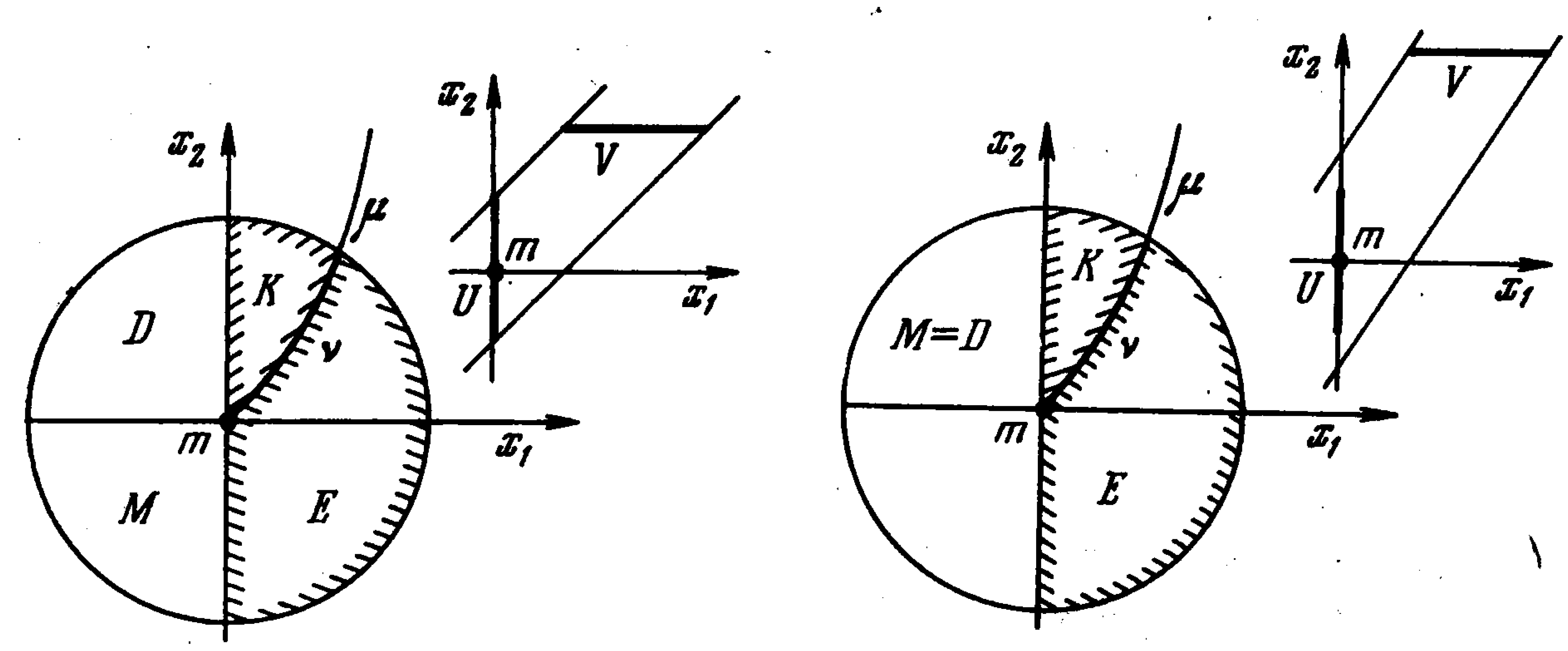
$$u_2[x, v_1] = (x_2 - v_1)\frac{|v_2 - 1|}{v_1^* - x_2} + v_2$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что в множестве $(D \cup \{m\}) \times V$, $|u_2[x, v]| \leqslant 1$

Введем систему

$$dx_1 / dt = x_2 - v_1(t), \qquad dx_2 / dt = u_2[x, v_1(t)] - v_2 \tag{2.3}$$

Здесь $v_1(t)$ — произвольная измеримая функция, удовлетворяющая при любом t условию $1 \leqslant v_1(t) \leqslant 3$. В множестве O траектория движения этой системы описы-



Фиг. 3 Фиг. 4

вается уравнением (2.2). Поэтому если $x_0 = x(t_0) \in \eta \setminus \{m\}$, то при $t \geqslant t_0$ система (2.3) пойдет влево по кривой η и дойдет до точки m за время

$$\Delta t \leqslant \max \frac{x_{10}}{|x_2 - v_1|} < 1, \quad x_{10} < 1/2, \quad |x_2| < 1/2, \quad 1 \leqslant v_1 \leqslant 3$$

Так как $\eta \subset D \cup \{m\}$, то при любом t из отрезка времени перехода измеримая функция $u_2(t) = u_2[x(t), v_1(t)]$ будет удовлетворять условию $|u_2(t)| \leqslant 1$. Следовательно, для любого $x_0 \in \eta$ и для любой допустимой дискретной схемы $\{v[x], \Delta[x]\}$ реализация $u(\cdot)$, формируемая при помощи функции $u_2[x, v_1]$, дает результат $T[x_0; v[x], \Delta[x], u(\cdot)] < 1$. Следовательно, такая реализация препятствует уклонению.

2°. Рассмотрим случаи 3), 4). В случае 3) положим $D = O \cap \{x : x_2 > 0\}$ (фиг. 3). В случае 4) через D обозначим окрытый круг радиусом $r = \min\{1/2, 1/2(|v_2| - 2)\}$ с центром в точке m (фиг. 4). Заметим, что $s(x) \neq \varnothing$ для любого $x \in D$.

Если $v_2 \geqslant 2$, примем $v_1^* = 1$ $(v_{1*} = 3)$. Если $v_2 < -2$, возьмем $v_1^* = 3$ $(v_{1*} = 1)$. Выпустим из точки m в обратном времени $\tau = -t$ движение системы (2.1) в силу постоянных $u_2 = 1$ и $v_1 = v_1^*$. Траекторию этого движения обозначим через μ. Пусть $\nu = \mu \cap D$. Через M обозначим наименьший открытый круг с центром в точке m, содержащий в себе множество D. Положим $H = M \cap \{x : x_1 > 0\}$ и пусть (K) — часть множества H, лежащая ниже (выше) кривой ν. Кривую ν включим в K.

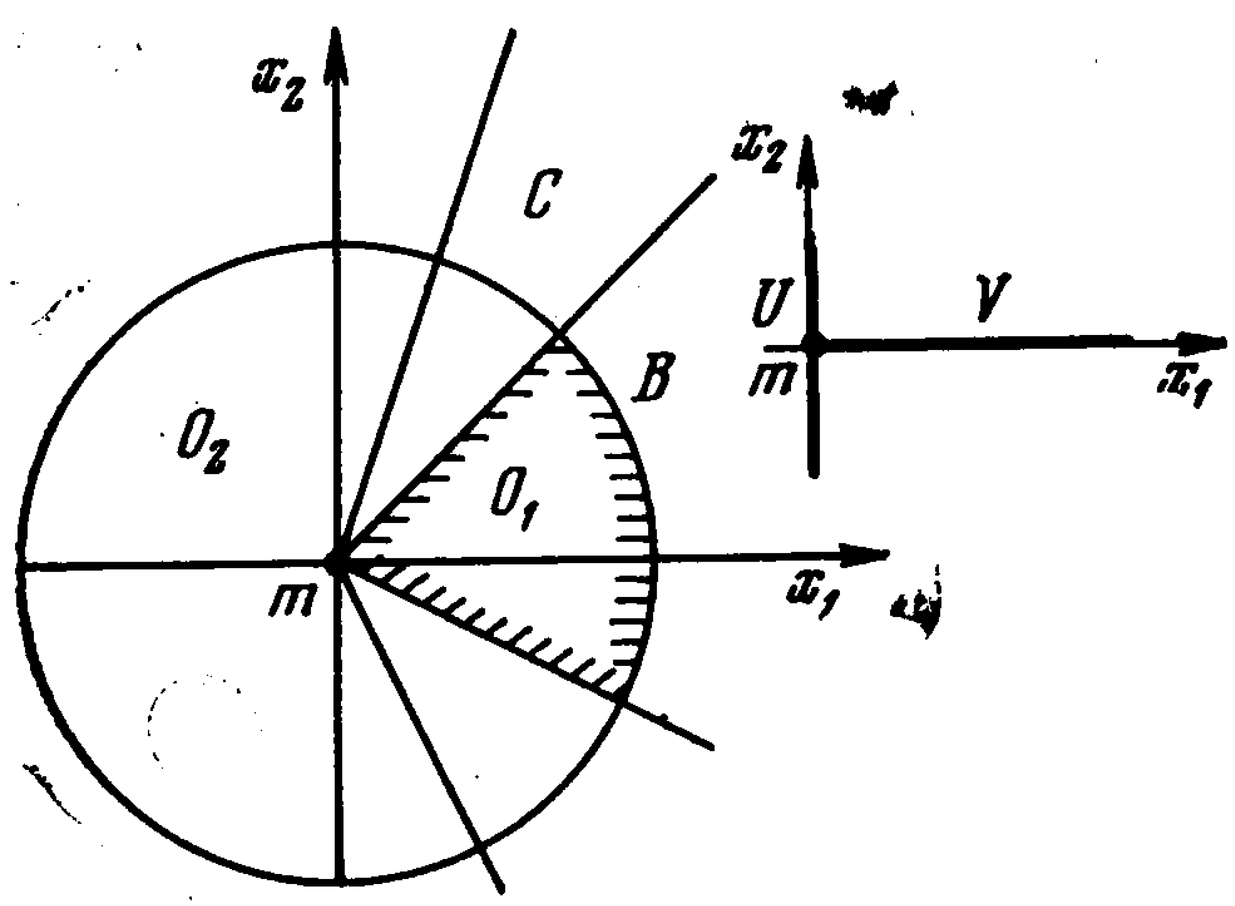
Пусть x_0—произвольная точка из E (K). Выпустим из x_0 движение системы (2.1) в силу постоянных $u_2 = 1$ $(u_2 = -1)$ и $v_1 = v_1^*$ $(v_1 = v_{1*})$. Пересечение траектории этого движения с множеством H обозначим через $\chi(x_0)$ $(\lambda(x_0))$. Очевидно, что кривая $\chi(x_0) \subset E$. Так как $s(x) \neq \varnothing$ в D и $\nu \subset D$, то при любом $x_0 \in K \setminus \nu$ $(x_0 \in \nu)$ кривая $\lambda(x_0)$ $(\lambda(x_0) \setminus \{x_0\})$ вместе с некоторой своей достаточно малой окрестностью лежит в K строго выше кривой ν.

Определим дискретную схему $\{v^\circ[x],\ \Delta^\circ[x]\}$

$$v^\circ[x] = \begin{cases} \begin{pmatrix} v_1^* \\ v_2 \end{pmatrix}, & x \in E \\ \begin{pmatrix} v_{1*} \\ v_2 \end{pmatrix}, & x \in K \qquad (\Delta^\circ[x] \equiv \Delta) \\ v \in V, & x \in X \setminus H \end{cases}$$

Здесь v — любой элемент V. Число $\Delta > 0$ выберем так, чтобы при любом постоянном $v \in V$ и при любой реализации $u(\cdot)$ система (2.1) не могла за время $\Delta t \leqslant \Delta$ перейти из множества $X \setminus M$ в точку m.

Предположим, что второй игрок применяет дискретную схему $\{v^\circ[x],\ \Delta^\circ[x]\}$.



Фиг. 5

Пусть $x_0 = x(t_0) \in (M \setminus \{m\}) \setminus H$. Составляющая $\dot{x_1} = x_2 - v_1$ вектора скорости системы (2.1) по оси x_1 отрицательна на $O \times V$, то какова бы ни была реализация $u(\cdot)$, фазовая точка при $t \geqslant t_0$ будет двигаться влево и, не попадая в точку m, выйдет за конечное время на границу круга M.

Пусть $x_0 = x(t_0) \in E$ (K). Так как $u_2 \leqslant 1$ $(u_2 \geqslant -1)$, то фазовая точка при $t \geqslant t_0$ до первого момента выхода на границу множества H будет идти не выше (не ниже) кривой $\chi(x_0)$ $(\lambda(x_0))$, какова бы ни была реализация $u(\cdot)$. Следовательно, точка первого выхода на границу множества H будет отлична от m и будет принадлежать либо той части границы множества H, что лежит на границе круга M, либо той части, что находится на оси x_2. В последнем случае в дальнейшем, в силу сказанного ранее, система (2.1), минуя точку m, выйдет на границу круга M.

Таким образом, при любом $x_0 \in M \setminus \{m\}$ и при любой реализации $u(\cdot)$ система (2.1) не может попасть в точку m, не выходя предварительно на границу круга M. Отсюда и из определения числа Δ вытекает, что для любого $x_0 \in X \setminus \{m\}$ время T $[x_0;$ $v^\circ[x],\ \Delta^\circ[x]] = \infty$.

3. *Теорема* 3.1. Если множество V пересекается осью x_2, то уклонение возможно.

Доказательство теоремы опустим. Отметим лишь, что оно сводится к построению дискретной схемы $\{v^\circ[x],\ \Delta^\circ[x]\}$, при которой $T[x_0;\ v^\circ[x],$ $\Delta^\circ[x]] = \infty$ для любого $x_0 \neq m$. Ниже на примере продемонстрируем построение такой дискретной схемы.

Рассмотрим систему (2.1) с ограничениями

$$U = \{u : u_1 = 0,\ |u_2| \leqslant 1\}, \qquad V = \{v : 0 \leqslant v_1 \leqslant 3,\ v_2 = 0\} \tag{3.1}$$

Обозначим через v^* правый конец отрезка V. Построим замкнутый остроугольный сектор B с вершиной в точке m, содержащий строго внутри себя отрезок $-U + v^*$. Сектор B поместим в сектор C (фиг. 5). Через l обозначим максимальный модуль углового коэффициента образующих сектора C.

Пусть O — открытый круг с центром в точке m, для любой точки x которого множество

$$-\begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix} - U + v^*$$

лежит строго внутри сектора B. Положим $O_1 = O \cap B$ и $O_2 = O \setminus O_1$.

Определим дискретную схему $\{v^\circ[x],\ \Delta^\circ[x]\}$.

Примем

$$v^\circ[x] = \begin{cases} 0, & x \in O_1 \\ v^*, & x \in O_2 \\ v \in V, & x \in X \setminus O \end{cases}$$

В множестве $X \setminus O_1$ пусть $\Delta^\circ[x] \equiv \Delta$. Число $\Delta > 0$ выберем так, чтобы система (2.1) при любом постоянном $v \in V$ и при любой реализации $u(\cdot)$ не могла за время $\Delta t \leqslant \Delta$ перейти из множества $X \setminus O$ в точку m. При $x \in O_1 \setminus \{m\}$ положим $\Delta^\circ[x] = \min\{\Delta,\ q(x)\}$, где $q(x)$ — наименьшее по $u(\cdot)$ время перевода системы при постоянном $v = 0$ из точки x на границу сектора C.

Видно, что дискретная схема $\{v^\circ[x],\ \Delta^\circ[x]\}$ допустима.

Предположим, что второй игрок применяет дискретную схему $\{v^\circ[x],\ \Delta^\circ[x]\}$.

Из определения круга O следует, что при $v = v^*$ и любых $x \in O_2$, $u \in U$ вектор скорости системы (2.1) направлен во внешность сектора B и имеет отрицательную составляющую по оси x_1, ограниченную по модулю. Поэтому если $x_0 = x(t_0) \in O_2$, то, какова бы ни была реализация $u(\cdot)$, фазовая точка при $t \geqslant t_0$ будет идти в множестве O_2 вплоть до первого момента выхода на границу круга O, и, следовательно, до этого момента не попадет в точку m.

Пусть $x_0 = x(t_0) \in O_1 \setminus \{m\}$. Фиксируем произвольную реализацию $u(\cdot)$ и обозначим через t^* момент первого выхода фазовой точки $x(t)$ на границу множества $O \cap C$. Предположим, что момент t^* конечен. Тогда в этот момент фазовая точка будет находиться либо на границе круга O, либо внутри O, но на границе сектора C.

Рассмотрим вторую возможность. Покажем вначале, что $x(t^*) \neq m$. Предположим противное. Тогда из определения дискретной схемы $\{v^\circ[x],\ \Delta^\circ[x]\}$ в множестве O_1 и из сказанного выше о поведении фазовой точки при $x_0 \in O_2$ заключаем, что на полуинтервале времени $[t_0,\ t^*)$ реализуется управление $v(t) \equiv 0$. Так как $x(t) \subset O \cap C$ при любом $t \in [t_0,\ t^*)$, то получаем, что модуль составляющей вектора скорости системы (2.1) по оси x_1 удовлетворяет оценке

$$|\dot{x}_1(t)| = |x_2(t)| < l x_1(t), \qquad t \in [t_0,\ t^*)$$

и, значит, $x_1(t^*) > 0$. Последнее противоречит предположению, что $x(t^*) = m$.

Таким образом, точка $x(t^*)$ лежит в O на границе сектора C и не совпадает с m. Учитывая, что t^* — первый момент выхода на границу множества $O \cap C$, из определения функции $\Delta^\circ[x]$ в O_1 получаем, что на отрезке $[t_0,\ t^*]$ найдется момент t_*, при котором $x(t_*) \in (O \cap C) \setminus O_1 \subset O_2$ и в который произойдет переключение управления v с $v = 0$ на $v = v^*$. При $t \geqslant t_*$ фазовая точка будет идти в множестве O_2 до момента выхода на границу круга O.

Итак, при любом $x_0 \in O \setminus \{m\}$ и при любой реализации $u(\cdot)$ система (2.1) с ограничениями (3.1) не может попасть за конечное время в точку m, не выходя предварительно на границу открытого круга O. Перейти же из $X \setminus O$ в точку m так, чтобы на отрезке времени перехода не было ни одного момента t_*, при котором $x(t_*) \in O \setminus \{m\}$ и где управление v могло бы переключиться, система не может. Это следует из определения функции $\Delta^\circ[x]$. Следовательно, для любого $x_0 \in X \setminus \{m\}$ время $T[x_0;\ v^\circ[x],\ \Delta^\circ[x]] = \infty$.

Поступила 18.I.1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. М., «Наука», 1970.
2. Понтрягин Л. С., Мищенко Е. Ф. Задача об убегании одного управляемого объекта от другого. Докл. АН СССР, 1969, т. 189, № 4.
3. Понтрягин Л. С. Линейная дифференциальная игра убегания. Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова, М., «Наука», 1971, вып. 112.
4. Пацко В. С. Об одной дифференциальной игре второго порядка. ПММ, 1971, т. 35, вып. 4.
5. Понтрягин Л. С. О линейных дифференциальных играх, ч. 1. Докл. АН СССР, 1967, т. 174, № 6.