

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Н. Н. Баутин

(Горький)

Методами теории бифуркаций [1], использующими свойства монотонного поворота поля направлений, дается качественное исследование одной динамической системы. Прослеживаются возможные бифуркации и поведение бифуркационных кривых в различных сечениях пространства параметров. Система рассматривалась ранее [2, 3], однако полного качественного исследования не было дано.

1. Поворот поля. Рассматривается система

$$\frac{d\varphi}{dt} = y = P, \quad \frac{dy}{dt} = \beta - \sin \varphi - 2\alpha s \frac{y}{s^2 + y^2} = Q \quad (1.1)$$

при положительных α , β и s . Разность полей направления системы (1.1) с параметрами β , α_0 , s_0 и измененной системы с параметрами β , α_1 , s_1 для $y \neq 0$ будет

$$2 [s_0 s_1 (\alpha_1 s_0 - \alpha_0 s_1) + (\alpha_1 s_1 - \alpha_0 s_0) y^2] [(s_0^2 + y^2)(s_1^2 + y^2)]^{-1} \quad (1.2)$$

При фиксированном β монотонный поворот будет осуществляться, если измененные значения параметров α_1 и s_1 выбирать так, чтобы выполнялось условие

$$(\alpha_1 s_0 - \alpha_0 s_1) (\alpha_1 s_1 - \alpha_0 s_0) \geq 0$$

В частности, монотонный поворот осуществляется при изменении α и s вдоль k -кривых ($\alpha s = k$, $0 < k < \infty$) или κ -кривых ($\alpha / s = \kappa$, $0 < \kappa < \infty$). Семейства k - и κ -кривых, каждое в отдельности, покрывают всю рассматриваемую часть плоскости αs . Кривые измененной и исходной системы на прямой $y = 0$ пересекаются с касанием по оси φ . При изменении β поле направлений на нижнем и верхнем полуцилиндрах поворачивается в противоположных направлениях. Прямая $y = 0$ в этом случае будет контактной кривой.

2. Качественные структуры на концах k -кривых. Чтобы проследить за изменением качественной структуры фазового пространства при монотонном повороте поля направлений с изменением параметров вдоль k -кривых, нужно знать структуры разбиения фазового пространства на концах k -кривых для малых и для больших s (и соответственно для больших и малых α).

В цилиндрическом фазовом пространстве (на полосе $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ с отождествленными краями) состояния равновесия будут O_1 ($\arcsin \beta$, 0) — устойчивый фокус или узел, O_2 ($\pi - \arcsin \beta$, 0) — седло.

Направления, по которым траектории системы (1.1) входят в седло, определяются уравнением

$$\zeta^2 + \frac{2\alpha}{s} \zeta - \sqrt{1 - \beta^2} = 0$$

Для $0 \leq \beta \leq 1$ один корень всегда отрицателен и соответствует направлению, по которому ω -сепаратриса входит в седло. Пусть на некоторой прямой $\varphi = \varphi_0$ в интервале $(\arcsin \beta, \pi - \arcsin \beta)$ между особыми точками отмечена координата η_0 точки пересечения прямой с ω -сепаратрисой седла. Если с убыванием s двигаться в пространстве параметров вдоль k -кривых, то векторное поле будет монотонно поворачиваться по часовой стрелке и η_0 будет расти. В то же время на нижней ветви изоклины горизонтальных наклонов на верхнем полуцилиндре (имеющей положительные значения ординаты лишь вне интервала $(\arcsin \beta, \pi - \arcsin \beta)$) максимум, равный

$$y_1 = [k - \sqrt{k^2 - s^2 (\beta + 1)^2}] (\beta + 1)^{-1}$$

при $\varphi = -\pi/2$, будет неограниченно убывать. Поэтому для любого k можно выбрать s так, чтобы неравенство $y_1 < \eta_0$ выполнялось, и тогда ω -сепаратриса будет идти в седло, скручиваясь с верхнего полуцилиндра. На верхнем полуцилиндре при $\beta > 0$ бесконечность устойчива. Действительно, если при больших $y > 0$ положим $y = 1/\rho$ и построим обычным образом функцию последования в окрестности малого $\rho = \rho_0$ [4], получим

$$\rho_1(2\pi) - \rho_0(0) = -2\pi\beta\rho_0^3 + 4\pi\alpha s\rho_0^4 + \dots$$

Отсюда следует существование, по крайней мере, одного неустойчивого предельного цикла, расположенного выше минимума верхней ветви изоклины горизонтальных наклонов, т. е. для

$$y > y_2 = [k + \sqrt{k^2 - s^2 (\beta + 1)^2}] (\beta + 1)^{-1}$$

Так как кривая $P_\varphi' + Q_y' \equiv 2k(y^2 - s^2)(y^2 + s^2)^{-2} = 0$ не пересекает для малых s верхнюю ветвь изоклины горизонтальных наклонов (для малых s всегда $y_2 > s$), то этот цикл единственный.

Для малых s кривая $P_\varphi' + Q_y' = 0$ не пересекает также и нижнюю ветвь изоклины горизонтальных наклонов, поэтому предельные циклы вокруг точки O_1 не могут существовать.

Предельные циклы на нижнем полуцилиндре также не могут существовать. Система (1.1) эквивалентна уравнению

$$y dy + \sin \varphi d\varphi = \left(\beta - 2\alpha s \frac{y}{s^2 + y^2} \right) d\varphi$$

Поэтому для замкнутого контура, охватывающего цилиндр и составленного из траекторий системы (1.1), имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\beta - 2\alpha s \frac{y}{s^2 + y^2} \right) d\varphi = 0$$

но это невозможно при $y < 0$ и положительных β , α и s .

Качественная картина фазового пространства для достаточно малых s на любой кривой $\alpha s = k$ представлена на фиг. 1 (1).

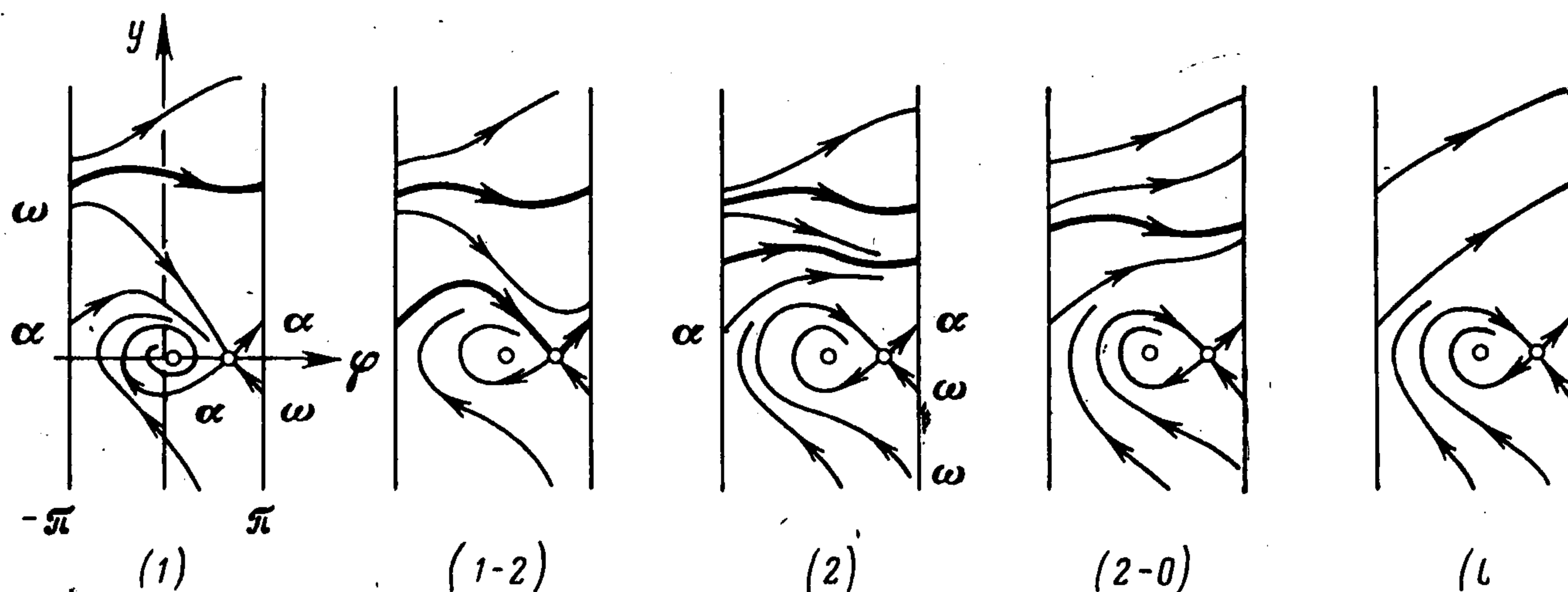
Проследим за поведением α -сепаратрис седла при больших s . Рассмотрим две консервативные системы сравнения

$$d\varphi / dt = y, \quad dy / dt = \beta - \sin \varphi \quad (2.1)$$

$$d\varphi / dt = y, \quad dy / dt = \beta - \sin \varphi - k / s \quad (2.2)$$

(условие $0 < \beta - k / s < 1$ для любых k при больших s выполняется).

Точка O_1 ($\arcsin \beta, 0$) для системы (2.1) — состояние равновесия типа центр, и сепаратрисы седла O_2 ($\pi - \arcsin \beta, 0$) образуют петлю вокруг O_1 . Поле направлений системы (1.1) повернуто по отношению к системе (2.1) по часовой стрелке. Поэтому α -сепаратриса седла системы (1.1), выходящая на нижний полуцилиндр, идет в точку O_1 .



Фиг. 1.

Траектории системы (2.2) на верхнем полуцилиндре представляют спирали, накручивающиеся на цилиндр и уходящие в бесконечность. Поле направлений системы (1.1) на верхнем полуцилиндре повернуто по отношению к системе (2.2) против часовой стрелки повсюду за исключением прямой $y = s$ (на прямой $y = s$ будет касание с пересечением). Поэтому α -сепаратриса седла системы (1.1), выходящая на верхний полуцилиндр, не может пересечь α -сепаратрису седла системы (2.2), выходящую из седла O ($\pi - \arcsin(\beta - k/s), 0$), расположенного справа от седла O_2 ($\pi - \arcsin \beta, 0$), и должна уходить в бесконечность. Предельных циклов нет. Поведение α -сепаратрис полностью определяет качественную картину разбиения фазового пространства. Качественная картина на любой кривой $\alpha s = k$ для достаточно больших s представлена на фиг. 1 (0).

3. Качественные картины фазового пространства и возможные бифуркации при $0 < \beta < 1$. Кривые k соединяют области пространства параметров, соответствующие структурам, представленным на фиг. 1 (1) и 1(0). При возрастании s вдоль k -кривых точки P_1 и P_2 на пересечении прямой $\varphi = \arcsin \beta$ с α - и ω -сепаратрисами седла на верхнем полуцилиндре монотонно сближаются, совпадают при некотором значении $s = s_0(k)$ (соответственно $\alpha = \alpha_0(k)$) и затем монотонно расходятся. Множества точек $s_0(k), \alpha_0(k)$, соответствующие негрубой бифуркационной структуре,

для которой α - и ω -сепаратрисы седла образуют петлю на верхнем полуцилиндре (P_1 и P_2 совпадают), образуют непрерывную кривую L . Каждая k -кривая пересекает в одной точке кривую L .

При переходе через значение s , соответствующее пересечению кривых L и k , возникает и затем разрушается петля сепаратрисы на верхнем полуцилиндре и при этом из петли сепаратрисы появляется устойчивый предельный цикл, так как седловая величина $(P_\varphi' + Q_y')_2 = -2\alpha / s$ отрицательна [1]. При дальнейшем возрастании параметра s вдоль k -кривых предельные циклы монотонно сближаются. Так как предельных циклов для структуры на фиг. 1 (0) нет, то существует на каждой k -кривой точка с координатами $s^+(k)$, $\alpha^+(k)$, для которой устойчивый и неустойчивый предельные циклы сливаются, образуя полуустойчивый предельный цикл.

Соответствующая негрубая бифуркационная структура представлена на фиг. 1 (2—0). Множество точек $s^+(k)$, $\alpha^+(k)$ образует непрерывную L^+ -кривую, пересекающуюся с каждой из k -кривых в одной точке. Последовательность качественных структур при возрастании s вдоль k -кривых представлена на фиг. 1 последовательностью грубых структур (1), (2), (0). Негрубые структуры, соответствующие бифуркационным значениям параметров, обозначены двумя цифрами, указывающими на грубые структуры, которые они разделяют.

Замечание. Качественные структуры, промежуточные между структурами 1(1) и 1(0), определяются лишь с точностью до дополнительного четного числа предельных циклов, охватывающих цилиндр, так как при повороте поля предельные циклы могут возникать из сгущения траекторий, пересекающих кривую $P_\varphi' + Q_y' = 0$, разделяться и затем опять попарно в других сочетаниях сливаться и исчезать. Логическая возможность такого поведения остается неустраненной. Вокруг точки O_1 подобное произойти не может. Раз возникнув, предельные циклы не могли бы исчезнуть, так как при дальнейшем повороте поля петли сепаратрисы вокруг точки O_1 не возникают и O_1 не меняет устойчивость.

4. Расположение бифуркационных кривых. Отметим, что k -кривые пересекают L и L^+ в определенной последовательности и поэтому L и L^+ не пересекаются. Покажем, что кривая L^+ целиком лежит в полосе $\beta < \alpha < \beta + 1$.

Используем систему сравнения

$$d\varphi / dt = y, \quad dy / dt = \beta - \sin \varphi - \alpha \quad (0 < \beta - \alpha < 1) \quad (4.1)$$

Повторяя рассуждения, проведенные в п. 2 по отношению к системе сравнения (2.2), находим, что для значений параметров $0 < \alpha < \beta$ система (4.1) не имеет предельных циклов.

Величина $P_\varphi' + Q_y'$ обращается в нуль на верхнем полуцилиндре только на прямой $y = s$. Если эта прямая будет на цилиндре циклом без контакта, то двойные предельные циклы не могут существовать [5]. Прямая $y = s$ будет циклом без контакта, если

$$\beta - \sin \varphi - 2\alpha s \frac{y}{s^2 + y^2} = \beta - \sin \varphi - \alpha < 0$$

для всех φ , т. е., если $\alpha > \beta + 1$.

Кривая L^+ в полосе $\beta < \alpha < \beta + 1$ пересекается с каждой из k -кривых и идет при убывании s из бесконечности в точку на оси α .

Проследим за расположением кривой L . Качественная картина фазового пространства на любой k -кривой для малых s (для $\alpha = ks < \beta$) представлена на фиг. 1(0). При возрастании s вдоль k -кривых происходит монотонный поворот поля направлений и поэтому каждая k -кривая может пересекать L не более одного раза. Рассмотрим систему сравнения

$$d\varphi / dt = y, \quad dy / dt = \beta - \sin \varphi - 2\kappa y \quad (4.2)$$

Как известно [6,7], для каждого β ($0 < \beta < 1$) существует такое κ^* (β), что при $\kappa = \kappa_1 < \kappa^*$ (β) ω -сепаратриса седла O_2 ($\pi - \arcsin \beta, 0$) системы (4.2), выходящая на верхний полуцилиндр, пересекает ось $y = 0$ и уходит на нижний полуцилиндр.

Запишем систему (1.1) в виде

$$d\varphi / dt = y, \quad dy / dt = \beta - \sin \varphi - 2\kappa y s^2 (s^2 + y^2)^{-1} \quad (4.3)$$

Поле направлений системы (4.3) повернуто по отношению к полю направлений системы (4.2) против часовой стрелки и поэтому ω -сепаратриса системы (4.3) должна идти на нижний полуцилиндр при сколь угодно больших s , если $\kappa < \kappa^*$ (β). На верхнем полуцилиндре для (4.3) при достаточно больших s и $\kappa < \kappa^*$ (β) существуют неустойчивый и устойчивый предельные циклы. Для любого κ можно выбрать такое y_1 , чтобы выражение $\beta - \sin \varphi - 2\kappa y_1$ сохраняло знак при всех φ . Поэтому при больших s и для (4.3) на прямой $y = y_1$ выполняется $dy / dt < 0$. Но так как на верхнем полуцилиндре бесконечность устойчива (см. п. 2), то вытекает существование для любого κ неустойчивого предельного цикла выше прямой $y = y_1$. Существование траекторий, накручивающихся на верхний полуцилиндр снизу вверх и, следовательно, существование устойчивого предельного цикла, следует из указанного выше расположения ω -сепаратрисы седла для $\kappa = \kappa_1 < \kappa^*$ (β). Заметим, что $0 < 2\kappa^* < 1.19$ при $0 < \beta < 1$ и $\kappa^* \rightarrow 0$ при $\beta \rightarrow 0$ [8].

Качественная картина фазового пространства для достаточно больших s на любой полупрямой $\alpha = \kappa_1 s$ представлена на фиг. 1(2). Отметим, что κ_1 -кривые не пересекают L . Так как существуют k -кривые, пересекающие L , и L уходит в бесконечность (L пересекается с каждой из k -кривых, $0 < k < \infty$), то L должна иметь одну из k -кривых асимптотой. Она не может иметь второй асимптотой другую k -кривую или какую-либо прямую, параллельную оси $s = 0$, так как не может пересекаться с k -кривыми дважды. Кривая L при убывании s либо идет к некоторой точке оси $s = 0$, либо имеет эту ось своей асимптотой. Покажем, что осуществляется первая из этих возможностей.

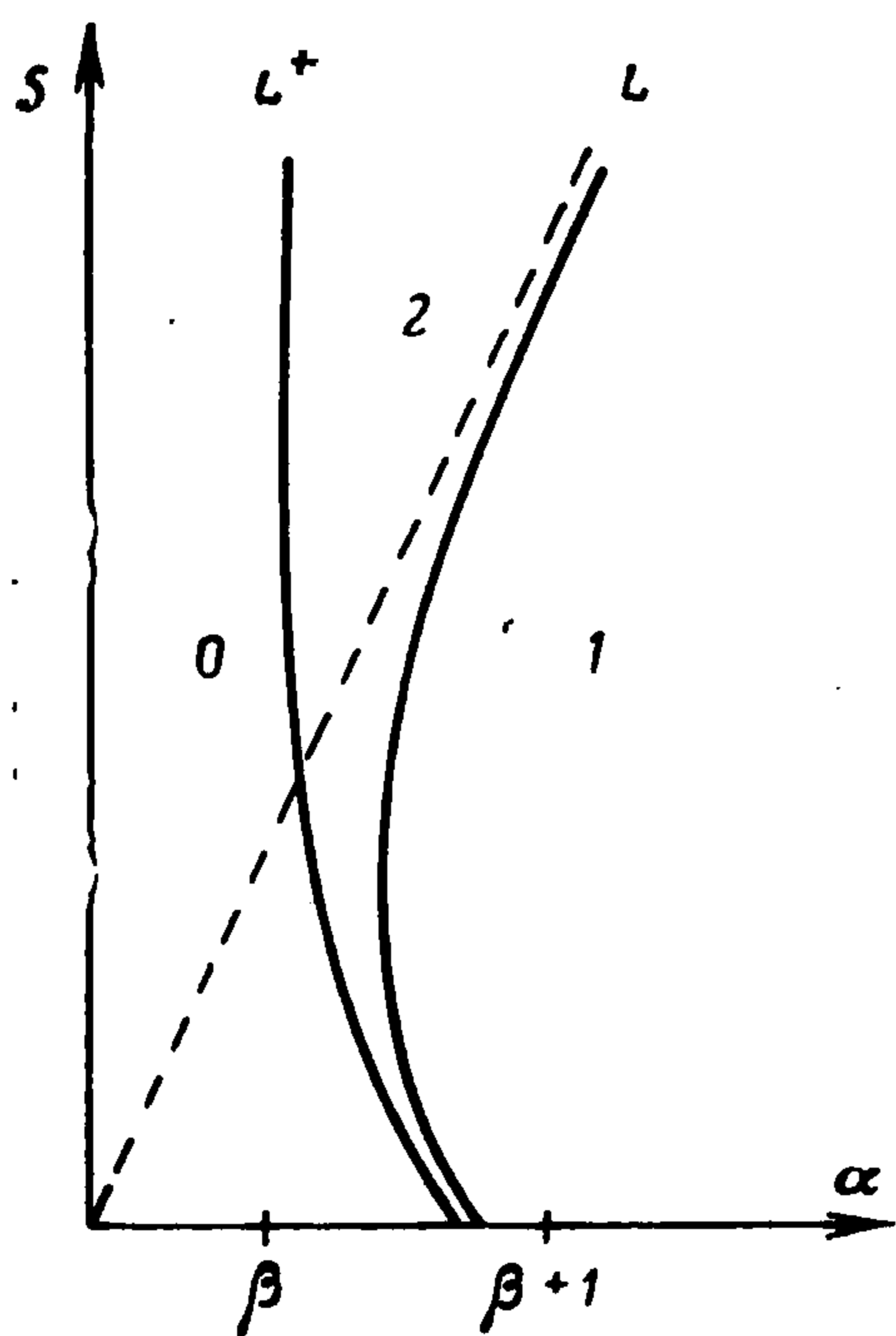
Для двух систем (0) и (1), соответствующих значениям параметров s_0 и $s_1 < s_0$ контактной кривой на верхнем полуцилиндре будет $y = \sqrt{s_0 s_1}$ (1.2). Если $\alpha > \beta + 1$, то контактная кривая располагается выше максимума $y_m = s_1 (\alpha - \sqrt{\alpha^2 - (\beta + 1)^2}) (\beta + 1)^{-1}$ нижней ветви изоклины горизонтальных наклонов.

Пусть на некоторой прямой $\varphi = \varphi_0$ слева от седла O_2 отмечены ординаты η_0 и η_1 точек пересечения прямой с ω -сепаратрисами для систем (0) и (1) соответственно. Векторное поле системы (1) в полосе $0 < y < \sqrt{s_0 s_1}$ повернуто по отношению к векторному полю системы (0) по часовой стрелке и поэтому для всех $s_1 < s_0$ будет $\eta_1 > \eta_0$. Так как при убывании s_1 максимум y_m неограниченно убывает, то для всех достаточно малых s_1 будет $y_m < \eta_1$ и ω -сепаратриса системы (1) попадает в область выше максимума изоклины и должна накручиваться на верхний полуцилиндр.

Качественная структура фазового пространства представлена на фиг. 1 (1). На верхнем полуцилиндре существует один неустойчивый предельный цикл. Такая структура будет осуществляться для любых достаточно малых s при любых $\alpha \geq \beta + 1$, следовательно, кривые L не могут иметь ось $s = 0$ своей асимптотой.

Замечание. В работах [2, 3] приведены в плоскости $s\beta$ бифуркационные кривые L и L^+ для разных значений параметра α . Для малых s кривые — результат счета и экстраполяции — дают качественно неверный результат. Кривые не могут идти в начало координат в плоскости $s\beta$, так как это эквивалентно наличию асимптоты $s = 0$ для кривых L и L^+ в плоскости αs .

Разбиение пространства параметров для $\beta = \text{const}$ ($0 < \beta < 1$) представлено на фиг. 2. Цифрами 0 — 2 отмечены области в пространстве параметров, соответствующие грубым структурам на фиг. 1, отмеченным теми же цифрами.



Фиг. 2

Негрубым структурам на фиг. 1, помеченным двумя цифрами, соответствуют бифуркационные кривые фиг. 2, разделяющие соответствующие области.

5. Качественные картины и возможные бифуркации при $\beta = 1$ и $\beta > 1$. При возрастании β до значения $\beta = 1$ состояния равновесия сливаются. Структура разбиения пространства параметров для $\beta = 1$ будет такая же, как на фиг. 2. Соответствующие структуры разбиения фазового пространства будут отличаться от структур для случая $0 < \beta < 1$ лишь тем, что на оси φ будет одно состояние равновесия типа седло—узел.

При возрастании β от значения $\beta = 1$ при α и s , взятых из области (2) фиг. 2, исчезает состояние равновесия седло—узел. При значениях α и s , взятых из области (1), происходит появление устойчивого предельного цикла из α -сепаратрисы седло—узел. На плоскости параметров при этом исчезает бифуркационная кривая L .

ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М., «Наука», 1967.
2. Горюшкин В. И. Условия синхронизации синхронного генератора с нелинейной асинхронной характеристикой. Изв. АН СССР. ОТН. Энергетика и автоматика, 1959, № 2.
3. Белюстина Л. Н., Чеснокова Р. А. Качественное исследование нелинейного уравнения синхронного генератора с асинхронной характеристикой. Уч. зап. Горьковск. ун-та. Прикл. матем. и кибернетика, 1967.
4. Баутин Н. Н. Качественное исследование одного уравнения теории фазовой автоподстройки частоты. ПММ, 1970, т. 34, вып. 5.
5. Dulac H. Recherche des cycles limites. C. R. Acad. Sci., 1937, vol. 204, No. 23.
6. Tricomi F. Integrazione di una equazione differenziale presentatasi in electrotechnica. Ann. Scuola norm. super. Pisa. Sci. fis. e mat., 1933, t. 2, p. 1—20.
7. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М., Физматгиз, 1959.
8. Giger A. Ein Grenzproblem einer technisch wichtigen nichtlinearen Differentialgleichung. Z. angew. Math. und Phys., 1956, Bd 7, F. 2.