Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 531.31

СВЯЗЬ МЕЖДУ ПЕРВЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ НЕГОЛОНОМНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ И СООТВЕТСТВУЮЩЕЙ СИСТЕМЫ, ОСВОБОЖДЕННОЙ ОТ СВЯЗЕЙ

Ил. Илиев, Хр. Семерджиев

(Пловдив)

Выводятся необходимые и достаточные условия возможности получения первого интеграла неголономной системы с линейными однородными связями из первого интеграла соответствующей системы, освобожденной от связей. Приводятся примеры.

1. Рассмотрим неголономную склерономную механическую систему с обобщенными координатами $q^1, q^2, \ldots, q^n$, удвоенной кинетической энергией $2T = g_{\lambda\mu} q^{\cdot\lambda} q^{\cdot\mu}$ и силовой функцией $U = U(q^\varkappa)$. Система подчинена $n - k$ линейным однородным связям $\omega^p{}_\varkappa q^{\cdot\varkappa} = 0$. В дальнейшем греческие индексы $\lambda, \mu, \nu, \ldots, \sigma$ принимают значения $1, 2, \ldots, n$, а латинские a, b, c, d — $1, 2, \ldots, k$ и p, q, r — $k + 1, \ldots, n$.

Вводя новые переменные

$$q^{\cdot\varkappa} = \alpha_a{}^\varkappa s^{\cdot a} \tag{1.1}$$

уравнения движения запишем в форме [1]

$$Ds^{\cdot d} / dt = F^d, \qquad Ds^{\cdot d} = ds^{\cdot d} + \Gamma^d_{bc} ds^b s^{\cdot c}$$

$$F^d = G^{da} F_a = G^{da} \alpha_a{}^\varkappa Q_\varkappa = G^{da} \alpha_a{}^\varkappa \partial u / \partial q\varkappa$$

$$\Gamma^d_{cb} = G^{da} \Gamma_{a,\,cb}$$

$$\Gamma_{a,\,cb} = \Gamma_{\varkappa,\,\nu,\,\mu} \alpha_a{}^\varkappa \alpha_b{}^\mu \alpha_c{}^\nu + g_{\lambda\varkappa} \alpha_a{}^\varkappa \partial \alpha_b{}^\lambda / \partial q^\sigma \alpha_c{}^\sigma$$

Векторы α_a $(\alpha_a{}^\varkappa)$ называются допустимыми векторами системы и удовлетворяют условию

$$\omega_\varkappa{}^p \alpha_a{}^\varkappa = 0 \tag{1.2}$$

Матрица G^{ad} обратна для матрицы $G_{ab} = g_{\lambda\mu} \alpha_a{}^\lambda \alpha_b{}^\mu$.

Через $\Gamma_{\varkappa,\,\mu\nu}$ обозначены символы Кристофеля первого рода, определенные метрическим тензором $g_{\lambda\mu}$.

Рассмотрим случай, когда система движется по инерции, т. е. $U = \mathrm{const}$.

Как показано в [2], для того чтобы $\lambda_a s^{\cdot a} = c$ было линейным интегралом неголономной системы, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\nabla_c \lambda_a + \nabla_a \lambda_c = 0 \tag{1.3}$$

Пусть линейный интеграл неголономной системы получен из $\xi_\varkappa q^{\cdot\varkappa}$ после замены (1.1), поэтому $\lambda_a = \xi_\varkappa \alpha_a{}^\varkappa$. Вектор $\xi_\varkappa$ может быть определен бесчисленным числом способов.

Действительно, рассмотрим две системы векторов

$$\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^k, \omega^{k+1}, \ldots, \omega^n; \qquad \omega_\varkappa{}^a = g_{\varkappa\nu}\alpha_a{}^\nu$$
$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n; \qquad \alpha_p{}^\varkappa = g^{\varkappa\nu}\omega_\nu{}^p$$

Здесь ω^p — векторы, полученные из неголономных связей, α_a — допустимые векторы, матрица $g^{\lambda\mu}$ обратна матрице $g_{\lambda\mu}$. Из условия (1.2) находим, что $\alpha_p{}^\varkappa\omega_\varkappa{}^a = 0$. Пусть $\eta_\varkappa = \xi_\varkappa + \rho_p\omega_\varkappa{}^p$, где ρ_p — произвольные функции q^λ. Очевидно, что $\xi_\varkappa\alpha_a{}^\varkappa = \eta_\varkappa\alpha_a{}^\varkappa$. Подставляя $\lambda_a = \xi_\varkappa\alpha_a{}^\varkappa$ в условие (1.3), получаем

$$\alpha_c{}^\nu\alpha_a{}^\varkappa(\nabla_\nu\xi_\varkappa + \nabla_\varkappa\xi_\nu) + \xi_\varkappa(\nabla_c\alpha_a{}^\varkappa + \nabla_a\alpha_c{}^\varkappa) = 0 \tag{1.4}$$
$$\nabla_c\alpha_a{}^\varkappa = \frac{\partial\alpha_a{}^\varkappa}{\partial q_\nu}\alpha_c{}^\nu + \Gamma^\varkappa_{\lambda\mu}\alpha_c{}^\lambda\alpha_a{}^\mu - \Gamma^b_{ca}\alpha_b{}^\varkappa$$
$$\Gamma^\varkappa_{\lambda\mu} = g^{\varkappa\rho}\Gamma_{\rho,\lambda\mu}$$

где $\Gamma^\varkappa_{\lambda\mu}$ — символы Кристофеля второго рода.

Если $\xi_\varkappa\dot{q}^\varkappa = c$ — линейный интеграл системы, освобожденной от связей (для краткости в дальнейшем будем писать *СОС*), то известно [3], что

$$\nabla_\nu\xi_\varkappa + \nabla_\varkappa\xi_\nu = 0 \tag{1.5}$$

Из условия (1.4), учитывая (1.5), найдем

$$\xi_\varkappa(\nabla_c\alpha_a{}^\varkappa + \nabla_a\alpha_c{}^\varkappa) = 0 \tag{1.6}$$

Условия (1.6) являются необходимыми и достаточными, чтобы линейный интеграл $\lambda_a\dot{s}^a = c$ неголономной системы мог быть получен из линейного интеграла $\xi_\varkappa\dot{q}^\varkappa = c$ соответствующей *СОС*. Предположим, что интеграл $\xi_\varkappa\dot{q}^\varkappa = c$ порождает интеграл $\lambda_a\dot{s}^a = c$.

Из способа определения объектов $\Gamma_{a,bc}$ следует, что

$$g_{\lambda\mu}\alpha_b{}^\lambda\nabla_c\alpha_a{}^\mu = 0 \tag{1.7}$$

Соотношение (1.7) можно записать в виде

$$\nabla_c\alpha_a{}^\varkappa = B^p_{ca}\alpha_p{}^\varkappa \tag{1.8}$$

где $B_{ca}{}^p$ — функции q^λ. Учитывая (1.8), условия (1.6) получаем в форме

$$\xi_\varkappa\alpha_p{}^\varkappa(B^p_{ca} + B^p_{ac}) = 0 \tag{1.9}$$

Условие

$$\xi_\varkappa\alpha_p{}^\varkappa = 0 \tag{1.10}$$

является только достаточным. Вопреки утверждениям в [4], оно не является необходимым. Действительно, если рассматривать $\xi_\varkappa\alpha_p{}^\varkappa$ как неизвестные, то (1.9) есть линейная однородная система не более $^1/_2\,k\,(k+1)$ уравнений с $n-k$ неизвестными. Очевидно, что при больших n число неизвестных больше числа уравнений. Если механическая система удовлетворяет требованию

$$B^p_{ca} + B^p_{ac} = 0 \tag{1.11}$$

то условие (1.9) удовлетворяется тождественно. Следовательно, каждый линейный интеграл *СОС* порождает линейный интеграл неголономной системы.

Пример 1. Рассмотрим следующую задачу [5]. Два колеса радиусом в соединенных между собой шарнирно осью длиной $2l$ катятся по плоскости и могут свободно вращаться вокруг оси. Выберем в качестве обобщенных координат $q^1 = \varphi$, $q^2 = x$, $q^3 = y$, $q^4 = \psi$, $q^5 = \psi'$, где x, y — координаты центра тяжести системы, φ — угол между осью x и осью O_1O_2, ψ и ψ' — углы поворота колес, отсчитываемые от вертикального радиуса. Условие качения без скольжения дает

$$x^{\cdot}\cos\varphi + y^{\cdot}\sin\varphi = 0$$
$$-x^{\cdot}\sin\varphi + y^{\cdot}\cos\varphi - l\varphi^{\cdot} - b\psi^{\cdot\prime} = 0$$
$$-x^{\cdot}\sin\varphi + y^{\cdot}\cos\varphi + l\varphi^{\cdot} - b\psi^{\cdot} = 0$$

Вводя новые переменные

$$q^{\cdot 1} = \varphi^{\cdot}, \qquad q^{\cdot 2} = -s^{\cdot}\sin\varphi, \qquad q^{\cdot 3} = s^{\cdot}\cos\varphi$$
$$q^{\cdot 4} = \frac{l}{b}\varphi^{\cdot} + \frac{s^{\cdot}}{b}, \qquad q^{\cdot 5} = \frac{s^{\cdot}}{b} - \frac{l}{b}\varphi^{\cdot}$$

находим

$$\alpha_1\,(1,\ 0,\ 0,\ l\,/\,b,\ -l\,/\,b), \qquad \alpha_2\,(0,\ -\sin\varphi,\ \cos\varphi,\ 1\,/\,b,\ 1\,/\,b)$$

Из уравнения связей получаем

$$\omega^3\,(0,\ \cos\varphi,\ \sin\varphi,\ 0,\ 0), \quad \omega^4\,(-l,\ -\sin\varphi,\ \cos\varphi,\ 0,\ -b) \quad \omega^5\,(l,\ -\sin\varphi,\ \cos\varphi,\ -b,\ 0)$$

Имея в виду, что

$$g_{11} = 2ml^2 = A,\ g_{22} = g_{33} = 2m + m' = B,\ g_{44} = g_{55} = I + I'b\,/\,4l^2 = C$$

где I — момент инерции колеса относительно центра, I' — момент инерции оси относительно центра тяжести, m — масса колеса, m' — масса оси, находим

$$\alpha_3\left(0,\ \frac{\cos\varphi}{B},\ \frac{\sin\varphi}{B},\ 0,\ 0\right)$$
$$\alpha_4\left(-\frac{l}{A},\ -\frac{\sin\varphi}{B},\ \frac{\cos\varphi}{B},\ \frac{bD}{C^2-D^2},\ -\frac{bC}{C^2-D^2}\right)$$
$$\alpha_5\left(\frac{l}{A},\ -\frac{\sin\varphi}{B},\ \frac{\cos\varphi}{B},\ -\frac{bC}{C^2-D^2},\ \frac{bD}{C^2-D^2}\right)$$

При помощи соотношений (1.8) получаем, что $B_{12}{}^3 = -B$ и все остальные $B^p_{ab} = 0$. Условие (1.9) дает $\xi_\varkappa\alpha_3{}^\varkappa = 0$ или $\xi^\varkappa\omega_\varkappa{}^3 = 0$. В развернутом виде получаем $\xi_2\cos\varphi + \xi_3\sin\varphi$ или $\xi^2\cos\varphi + \xi^3\sin\varphi = 0$.

Если линейный интеграл соответствующей *СОС* удовлетворяет написанному выше условию, то он порождает линейный интеграл неголономной системы. Учитывая вид $g_{\lambda\mu}$, заключаем, что все координаты *СОС* циклические. Отсюда следует, что интегралы *СОС*

$$\partial T\,/\,\partial\varphi^{\cdot} = C_1, \qquad \partial T\,/\,\partial\psi^{\cdot} = C_2, \qquad \partial T\,/\,\partial\psi^{\cdot\prime} = C_3$$

порождают интегралы неголономной системы

$$\varphi^{\cdot} = C_1, \quad \frac{C-D}{b}\,l\varphi^{\cdot} + \frac{C+D}{b}\,s^{\cdot} = C_2, \quad \frac{D-C}{b}\,l\varphi^{\cdot} + \frac{C+D}{b}\,s^{\cdot} = C_3$$

Непосредственно проверяется, что эти интегралы неголономной механической системы не удовлетворяют условию (1.10).

Условие (1.10) геометрическое, т. е. оно не изменяется при замене координат $q^{\varkappa'} = q^{\varkappa'}(q^\varkappa)$ и при преобразовании векторов $\alpha^\varkappa_{p'} = \gamma^p_{p'}\,\alpha^\varkappa_p$, когда $\det\|\gamma^p_{p'}\| \neq 0$.

Действительно

$$\xi_{\varkappa'}\alpha_{p'}^{\varkappa'} = \xi_\varkappa A_{\varkappa'}^{\varkappa} A_\nu^{\varkappa'} \alpha_p^\nu \gamma_{p'}^p = \xi_\varkappa \alpha_p^\varkappa \gamma_{p'}^p = 0$$

Есть разные определения понятия циклической координаты [4,6]. Если и следовать определению, данному в [4], то указанные линейные интегралы не отвечают циклическим координатам. Согласно этому определению, в уравнении Рауса для $q^{\varkappa_0}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q^{\cdot \varkappa_0}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^{\varkappa_0}} = \lambda_p \omega_{\varkappa_0}^p$$

должны быть $\partial T / \partial q^{\varkappa_0} = 0$ и $\omega_{\varkappa_0}^p = 0$ [4]. Легко проверяется, что интегралы удовлетворяют первому условию. Следовательно, $q^{\varkappa_0}$ — циклическая координата; другими словами, $\xi_{\varkappa_0}^\varkappa = \delta_{\varkappa_0}^\varkappa$, где $\delta_{\varkappa_0}^\varkappa$ — символ Кронекера. Так как $\xi_{\varkappa_0}^\varkappa \omega_\varkappa^p = \delta_{\varkappa_0}^\varkappa \omega_\varkappa^p = \omega_{\varkappa_0}^p = 0$, то второе условие не выполняется. Следовательно, рассматриваемые линейные однородные по отношению к скоростям первые интегралы неголономной системы не отвечают циклическим координатам в [4].

Пример 2. Рассмотрим свободное движение однородного шара массой $m = 1$, радиусом a и радиусом инерции k на горизонтальной шероховатой плоскости [6]. Движение определяется координатами $q^1 = \varphi$, $q^2 = \psi$, $q^3 = \theta$, $q^4 = x$, $q^5 = y$. Удвоенная кинетическая энергия имеет вид

$$2T = x^{\cdot 2} + y^{\cdot 2} + k^2(\theta^{\cdot 2} + \psi^{\cdot 2} + \varphi^{\cdot 2} + 2\varphi^\cdot \psi^\cdot \cos\theta)$$

Неголономные связи запишем в виде

$$x^\cdot = a \sin\psi\theta^\cdot - a\sin\theta\cos\psi\varphi^\cdot$$
$$y^\cdot = -a\cos\psi\theta^\cdot - a\sin\theta\sin\psi\varphi^\cdot$$

Аналогично примеру 1 находим

$$\alpha_1\ (1,\ 0,\ 0,\ -a\sin\theta\cos\psi,\ -a\sin\theta\sin\psi)$$
$$\alpha_2\ (0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0)$$
$$\alpha_3\ (0,\ 0,\ 1,\ a\sin\psi,\ -a\cos\psi)$$
$$\alpha_4\left(\frac{a\cos\psi}{k^2\sin\theta},\ -\frac{a\cos\theta\cos\psi}{k^2\sin\theta},\ -\frac{a\sin\psi}{k^2},1,0\right)$$
$$\alpha_5\left(\frac{a\sin\psi}{k^2\sin\theta},\ -\frac{a\cos\theta\sin\psi}{k^2\sin\theta},\ \frac{a\cos\psi}{k^2},0,1\right)$$

$$B_{21}^4 = -B_{12}^4 = B^\circ\sin\theta\sin\psi,\quad B_{12}^5 = -B_{21}^5 = B^\circ\sin\theta\cos\psi$$
$$B_{13}^4 = -B_{31}^4 = B^\circ\cos\theta\cos\psi,\qquad B_{13}^5 = -B_{31}^5 = B^\circ\cos\theta\sin\psi$$
$$B_{32}^4 = -B_{23}^4 = B^\circ\cos\psi,\qquad B_{23}^5 = -B_{32}^5 = B^\circ\sin\psi$$
$$B_{11}^4 = B_{22}^4 = B_{33}^4 = B_{11}^5 = B_{22}^5 = B_{33}^4 = 0,\qquad B^\circ = {}^1/_2 ak^2 / (a^2 + k^2)$$

Из условия (1.11) следует, что каждый линейный интеграл *СОС* порождает линейный интеграл неголономной системы.

До сих пор рассматривалась задача, когда линейный интеграл *СОС* порождает линейный интеграл неголономной системы. Обратная задача формулируется следующим образом. Пусть дан линейный интеграл $\lambda_a s^{\cdot a} = C$ неголономной системы. Необходимо установить, порожден ли он линейным интегралом *СОС*, т. е. можно ли λ_a представить в виде

$$\lambda_a = \eta_\varkappa \alpha_a^{\ \varkappa} \tag{1.12}$$

где $\eta_\varkappa q^{\cdot\varkappa} = C$ — линейный интеграл *СОС*. Следовательно, необходимо проверить, существует вектор $\xi_\varkappa = \eta_\varkappa + \rho_p \omega_\varkappa^{\ q}$, удовлетворяющий уравнению Киллинга [3], а $\eta_\varkappa$ определяется из (1.12). На примере покажем, что не каждый интеграл неголономной системы порожден интегралом соответствующей *СОС*.

Пример 3. Рассмотрим сани Чаплыгина на горизонтальной плоскости, когда направление лезвия перпендикулярно отрезку, соединяющему центр тяжести и режущую точку [7]. Как показано в [8], $x^\cdot / \cos\varphi = C$ — линейный интеграл неголономной системы. Другими словами, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1 / \cos\varphi$ дает вектор, определяющий линейный интеграл системы. Находим, что $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = \cos\varphi$, $\eta_3 = \sin\varphi$. Отсюда получаем

$$\xi_1 = 0, \qquad \xi_2 = \cos\varphi - \rho\,\mathrm{tg}\,\varphi, \qquad \xi_3 = \sin\varphi + \rho$$

Непосредственно проверяется, что не существует ρ, для которого $\xi_\varkappa$ удовлетворяет уравнению Киллинга.

В случае $U \neq \mathrm{const}$ (система не двигается по инерции) условиями существования линейного интеграла неголономной системы вида $\lambda_a s^{\cdot a} = C$ являются условия (1.3) и

$$\lambda_a F^a = 0 \tag{1.13}$$

Чтобы линейный интеграл $\xi_\varkappa q^{\cdot\varkappa} = C$ *СОС* порождал линейный интеграл неголономной системы, кроме условия (1.9), должно быть выполнено еще условие [1,2]

$$\xi_\varkappa \alpha_a{}^\varkappa G^{ab} Q_\nu \alpha_b{}^\nu = 0 \tag{1.14}$$

Условие (1.14) существенно. Каждой системе с $U \neq \mathrm{const}$ можно сопоставить систему, движущуюся по инерции. Если $\eta_\varkappa q^{\cdot\varkappa} = C$ — линейный интеграл *СОС*, который порождает линейный интеграл неголономной системы, движущейся по инерции и если он продолжает быть линейным интегралом *СОС*, которая не движется по инерции, то отсюда не следует, что он останется интегралом неголономной системы, не движущейся по инерции.

Рассмотрим систему из примера 1. Пусть $U = U(\varphi)$. Интеграл $\partial T / \partial\psi' = C_3$ продолжает быть интегралом *СОС*, так как $\xi^\varkappa \partial U / \partial q^\varkappa = 0$. С другой стороны, условие (1.14) не удовлетворяется тождественно. Действительно

$$2\theta = G_{11}\varphi^{\cdot 2} + G_{22}s^{\cdot 2}$$

$$G_{11} = \frac{1}{G^{11}} = A + 2\frac{l^2}{b^2}(C - D), \qquad G_{22} = \frac{1}{G^{22}} = B + \frac{2}{b^2}(C + D)$$

$$G^{12} = G^{21} = 0, \qquad Q_\varkappa \alpha_1{}^\varkappa = \partial U / \partial\varphi, \qquad Q_\varkappa \alpha_2{}^\varkappa = 0$$

Левая часть (1.14) имеет вид

$$\frac{l}{b}\frac{D - C}{G_{11}}\frac{\partial U}{\partial\varphi} \neq 0$$

Следовательно,

$$\frac{D - C}{b} l\varphi^\cdot + \frac{D + C}{b} s^\cdot = C_3$$

не является интегралом неголономной системы с $U = U(\varphi)$.

В общем случае имея в виду, что

$$g^{\lambda\mu} = G^{ab}\alpha_a{}^\lambda \alpha_b{}^\mu + G^{pq}\alpha_p{}^\lambda \alpha_q{}^\mu \tag{1.15}$$

где матрица G^{pq} обратна матрице $G_{pq} = g_{\lambda\mu}\alpha_p{}^\lambda\alpha_q{}^\mu$, условие (1.14) запишем в виде

$$\xi_\varkappa Q^\varkappa - G^{pq}\alpha_p{}^\varkappa\alpha_q{}^\nu Q_\varkappa\xi_\nu = 0$$

Если $\xi_\varkappa q^{\cdot\varkappa} = C$ — интеграл COC, то $\xi_\varkappa Q^\varkappa = 0$. Для того чтобы отпала необходимость рассматривать (1.14), должно выполняться условие

$$G^{pq}\alpha_p{}^\varkappa\alpha_q{}^\nu Q_\varkappa\xi_\nu = 0 \text{ или } G^{pq}F_p\lambda_q = 0$$
$$\lambda_q = \xi_\varkappa\alpha_q{}^\varkappa, \qquad F_p = Q_\nu\alpha_p{}^\nu \tag{1.16}$$

Соотношение (1.16) показывает, что перпендикулярность векторов F_p и λ_q в метрике, определенной объектом G_{pq}, является необходимым и достаточным условием, чтобы отпала необходимость рассматривать (1.14).

2. Перейдем к рассмотрению квадратичных интегралов неголономной склерономной механической системы, движущейся по инерции.

Общий вид такого интеграла

$$b_{ac}s^{\cdot a}s^{\cdot c} = C \tag{2.1}$$

Для того чтобы (2.1) был интегралом неголономной механической системы, необходимо и достаточно [2] выполнения следующего условия:

$$\nabla_a b_{dc} + \nabla_d b_{cd} + \nabla_c b_{ad} = 0 \tag{2.2}$$

Пусть квадратичный интеграл получен из выражения $a_{\lambda\mu}q^{\cdot\lambda}q^{\cdot\mu}$ после замены (1.1), тогда $b_{ac} = a_{\lambda\mu}\alpha_a{}^\lambda\alpha_c{}^\mu$.

Подставляя эти выражения в условие (2.2), находим

$$\alpha_a{}^\varkappa\alpha_d{}^\lambda\alpha_c{}^\mu(\nabla_\varkappa a_{\lambda\mu} + \nabla_\lambda a_{\mu\varkappa} + \nabla_\mu a_{\varkappa\lambda}) +$$
$$+ a_{\lambda\mu}\alpha_p{}^\lambda[(B^p_{ad} + B^p_{da})\alpha^\mu_c + (B^p_{dc} + B^p_{ca})\alpha^\mu_a + (B^p_{ca} + B^p_{ac})\alpha^\mu_d] = 0 \tag{2.3}$$

Если $a_{\lambda\mu}q^{\cdot\lambda}q^{\cdot\mu} = C$ — квадратичный интеграл COC, то имеем [9]

$$\nabla_\varkappa a_{\lambda\mu} + \nabla_\lambda a_{\mu\varkappa} + \nabla_\mu a_{\varkappa\lambda} = 0 \tag{2.4}$$

Тогда из (2.3), учитывая (2.4), получаем

$$a_{\lambda\mu}\alpha^\lambda_p[(B^p_{ad} + B^p_{da})\alpha^\mu_c + (B^p_{dc} + B^p_{cd})\alpha^\mu_a + (B^p_{ca} + B^p_{ac})\alpha^\mu_d] = 0 \tag{2.5}$$

Условие (2.5) необходимо и достаточно, чтобы интеграл COC порождал квадратичный интеграл неголономной системы. Так же, как и в случае линейных интегралов, видно, что условие

$$a_{\lambda\mu}\alpha_p{}^\lambda\alpha_a{}^\mu = 0 \tag{2.6}$$

является достаточным, чтобы квадратичный интеграл COC порождал квадратичный интеграл неголономной системы.

Общее решение системы уравнений (2.6) дается в виде

$$a_{\lambda\mu} = \rho_{ab}\omega_\lambda{}^a\omega_\mu{}^b + \rho_{pq}\omega_\lambda{}^p\omega_\mu{}^q \tag{2.7}$$

где ρ_{ab}, ρ_{pq} — симметрические объекты. Формула (2.7) в общем случае не дает все решения системы (2.5).

Рассмотрим пример 2. Условие (1.11) выполняется, поэтому условие (2.5) удовлетворяется тождественно и, следовательно, каждый квадратичный интеграл *СОС* порождает квадратичный интеграл неголономной системы.

Эти результаты естественные, если иметь в виду теорему А. С. Сумбатова [10]. Непосредственно устанавливается, что связи являются линейными первыми интегралами *СОС*, движущейся по инерции. Следовательно, в обозначениях, принятых в [10], получаем $R_{2j=0}$. Так как $Q_\varkappa = 0$, то имеем $R_{0j} = 0$. Тогда $\varphi = 0$ удовлетворяет требованиям теоремы. Следовательно, уравнения Гамильтона — Якоби для *СОС* и неголономной системы совпадают. Таким образом, заключаем, что фазовые траектории неголономной системы являются частью фазовых траекторий *СОС*. Каждый интеграл *СОС*, сохраняющий постоянное значение на фазовых траекториях этой системы, сохраняет то же самое постоянное значение и на траекториях неголономной системы. Так что каждый интеграл *СОС* порождает интеграл неголономной системы.

Когда механическая система не двигается по инерции, она допускает кроме интеграла вида (2.1), квадратичный интеграл вида

$$b_{ac}s^{\cdot a}s^{\cdot c} + V = C \tag{2.8}$$

где V — функция $q^\varkappa$. Условиями того, что механическая система допускает интегралы вида (2.1), являются [2] условие (2.2) и

$$b_{bc}F^c = 0 \tag{2.9}$$

а для интегралов вида (2.8) — условие (2.2) и

$$2b_{bc}F^b + \frac{\partial V}{\partial q^\varkappa}\alpha_c{}^\varkappa = 0 \tag{2.10}$$

В обоих случаях условие (2.2) переходит в (2.5). Условия (2.9) и (2.10) налагают дополнительные ограничения. Имея в виду (1.15), для (2.9) получаем

$$a_{\lambda\mu}\alpha_b{}^\lambda\alpha_c{}^\mu G^{cd}Q_\varkappa\alpha_d{}^\varkappa = a_{\lambda\mu}\alpha_b{}^\lambda Q_\varkappa(g^{\mu\varkappa} - G^{pq}\alpha_p{}^\mu\alpha_q{}^\varkappa) = a_{\lambda\mu}\alpha_b{}^\lambda Q^\mu = b_{bp}F^p = 0$$

Если $a_{\lambda\mu}q^{\cdot\lambda}q^{\cdot\mu} = C$ — интеграл *СОС*, то первое слагаемое [9] равно нулю и (2.9) принимает вид

$$b_{bp}F^p = 0 \tag{2.11}$$

Таким же способом для (2.10) находим

$$(2a_{\varkappa\mu}Q^\mu + \partial V / \partial q^\varkappa)\alpha_c^\varkappa - b_{cp}F^p = 0$$

Если $\alpha_{\lambda\mu}q^{\cdot\lambda}q^{\cdot\mu} + V = C$ — интеграл *СОС*, тогда [9] первое слагаемое равно нулю, так что условие (2.10) переходит в (2.11) и, следовательно, совпадает с (2.9).

Рассмотрим снова сани Чаплыгина (пример 3). Для этой системы удвоенная кинетическая энергия и неголономная связь

$$2T = (x^\cdot + l\cos\varphi\varphi^\cdot)^2 + (y^\cdot + l\sin\varphi\varphi^\cdot)^2 + k^2\varphi^{\cdot 2}, \quad dy = \operatorname{tg}\varphi dx$$

Тогда квадратичный интеграл *СОС*

$$(x^\cdot + l\cos\varphi\varphi^\cdot)^2 + (y^\cdot + l\sin\varphi\varphi^\cdot)^2 = C \tag{2.12}$$

С другой стороны, можно выбрать в качестве допустимых векторов α_1 (1, 0,0), α_2 (0, 1, tg φ). Если опустить индексы α_1 и α_2 и использовать неголономную связь, находим

$$\omega^1 (k^2 + l^2,\ l \cos\varphi,\ l \sin\varphi), \qquad \omega^2 (l / \cos\varphi,\ 1,\ \mathrm{tg}\,\varphi)$$
$$\omega^3 (0,\ -\mathrm{tg}\,\varphi,\ 1)$$

Непосредственно устанавливается, что

$$a_{\lambda\mu} = \cos^2\varphi\omega_\lambda{}^2\omega_\mu{}^2 + \cos^2\varphi\omega_\lambda{}^3\omega_\mu{}^3$$

Из формулы (2.7) следует, что, если подставить $y^\cdot = \mathrm{tg}\,\varphi\, x^\cdot$ в (2.12), получим квадратичный интеграл неголономной системы

$$\cos^{-2}\varphi\,(x^\cdot + l\cos\varphi\varphi^\cdot)^2 = C$$

3. Предлагаемый метод, используя [1], можно распространить на первые интегралы неголономной системы, движущейся по инерции, которые имеют вид

$$b_{ac\ldots d}s^{\cdot a}s^{\cdot c}\ldots s^{\cdot d} = C \tag{3.1}$$

Можно показать, что это наиболее общий вид первого интеграла, представляющего собой целую рациональную функцию обобщенных скоростей.

Поступая так же, как и в п. 1 и 2, получим необходимые и достаточные условия, чтобы первый интеграл COC вида

$$a_{\lambda\mu\ldots\nu}q^{\cdot\lambda}q^{\cdot\mu}\ldots q^{\cdot\nu} = C \tag{3.2}$$

порождал первый интеграл неголономной системы. После замены (1.1) в (3.2) получаем

$$b_{ac\ldots d} = a_{\lambda\mu\ldots\nu}\alpha_a{}^\lambda\alpha_c{}^\mu\ldots\alpha_d{}^\nu$$

Все рассуждения, которые содержатся в п. 1 и 2, распространяются на общий случай. Полученные выражения имеют громоздкий вид. Для случая, когда механическая система не двигается по инерции, сделанные замечания остаются в силе.

Поступила 9.XII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Илиев Ил. Друга форма на уравненията в допустими вектори. Науч. тр. на Высш. пед. ин-та, Пловдив, 1970, т. 8, кн. 2.
2. Илиев Ил. Едно приложение на уравненията в допустими вектори. Науч. тр. Высш. пед. ин-та, Пловдив, 1970, т. 8, кн. 3.
3. Илиев Ил. О линейных интегралах голономной механической системы. ПММ, 1970, т. 34, вып. 4.
4. Назиев Э. Х. О механических системах с интегралами, линейными относительно импульсов. Вестн. МГУ. Сер. Матем., механ., 1969, № 2.
5. Добронравов В. В. Основы механики неголономных систем. М., «Высшая школа», 1970.
6. Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Динамика неголономных систем. М., «Наука», 1967.
7. Илиев Ил. Геометрично разглеждане на метода на кинематичесните характеристики. Науч. тр. Высш. пед. н-та, Пловдив, 1969, т. 7, кн. 1.
8. Iliev Il. Sur les coordonne'es cucliques «cache'es» des systemes nonholonomiques scleronomiques. Natura, ENS — Plovdiv, 1970, t. 3, S. 1.
9. Iliev Il. Certaines premieres integrales quadratiques des systemes holonomiques scleronomiques. Natura, ENS — Plovdiv, 1970, t. 3, S. 1.
10. Сумбатов А. С. Об одной теореме типа Гамильтона — Якоби для уравнений движения со множителями связей. Вестн. МГУ. Сер. Матем., механ., 1971, № 1.