Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 531.31

О НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМАХ ВТОРОГО МЕТОДА ЛЯПУНОВА

А. С. Озиранер

(Москва)

Даются достаточные условия асимптотической устойчивости относительно части переменных. Исследуется вопрос об обратимости доказанных и некоторых известных теорем второго метода Ляпунова. При помощи метода функций Ляпунова даются необходимые и достаточные условия ограниченности решений относительно части переменных.

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений возмущенного движения

$$\mathbf{x}^{\cdot} = \mathbf{X}(t, \mathbf{x}) \qquad (\mathbf{X}(t, 0) \equiv 0) \tag{1.1}$$

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n), \qquad \mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$$

Будем заниматься вопросом об устойчивости невозмущенного движения $\mathbf{x} = 0$ по отношению к $x_1, \ldots, x_m$ $(0 < m \leqslant n)$. Обозначим эти переменные через $y_i = x_i$ $(i = 1, \ldots, m)$, а остальные — через $z_j = x_{m+j}$ $(j = 1, \ldots, n - m = p)$, т. е. $\mathbf{x} = (y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_p)$. Введем обозначения

$$\|\mathbf{y}\| = \left(\sum_{i=1}^{m} y_i^2\right)^{1/2}, \qquad \|\mathbf{z}\| = \left(\sum_{j=1}^{p} z_j^2\right)^{1/2}$$

$$\|\mathbf{x}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} = (\|\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{z}\|^2)^{1/2}$$

Предположим, что

а) правые части системы (1.1) в области

$$t \geqslant 0, \qquad \|\mathbf{y}\| \leqslant H > 0, \qquad 0 \leqslant \|\mathbf{z}\| < +\infty \tag{1.2}$$

непрерывны и удовлетворяют условиям единственности решения;

б) решения системы (1.1) z-продолжимы; это означает, что любое решение $\mathbf{x}(t)$ определено для всех $t \geqslant 0$, при которых $\|\mathbf{y}(t)\| \leqslant H$.

Обозначим через $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ решение системы (1.1), определенное начальными условиями $\mathbf{x}(t_0; t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$.

Теорема 1. Если существует функция $V(t, \mathbf{x})$, удовлетворяющая условиям

1) $$V(t, \mathbf{x}) \geqslant a(\|\mathbf{y}\|) \tag{1.3}$$

где $a(r)$ — непрерывная монотонно возрастающая функция, $a(0) = 0$;

2) $V^{\cdot} \leqslant 0$ в силу (1.1), и для любого $\eta > 0$ из $V(\tau, \mathbf{x}) \geqslant \eta$, $\|\mathbf{y}\| \leqslant H$ следует

$$V^{\cdot}(\tau, \mathbf{x}) \leqslant -m_\eta(\tau) \tag{1.4}$$

причем

$$\int_0^\infty m_\eta(\tau)\,d\tau = +\infty \tag{1.5}$$

то движение $x = 0$ асимптотически y-устойчиво. Если, кроме того, система (1.1) и функция V ω-периодичны по t (или не зависят от t), то асимптотическая y-устойчивость равномерна по $\{t_0, x_0\}$.

Доказательство. Выполнены условия теоремы об y-устойчивости [1], поэтому для любых $\varepsilon \in (0, H)$, $t_0 \geqslant 0$ найдется $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что из $\|x_0\| < \delta$ следует $\|y(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon$ для всех $t \geqslant t_0$. Покажем, что при $\|x_0\| < \delta$

$$\lim_{t\to\infty} V(t, x(t; t_0, x_0)) = 0 \tag{1.6}$$

В противном случае, в силу $V^\cdot \leqslant 0$, будет $V(t, x(t; t_0, x_0)) \geqslant \eta > 0$ и из

$$V(t, x(t; t_0, x_0)) = V(t_0, x_0) + \int_{t_0}^{t} V^\cdot(\tau, x(\tau; t_0, x_0))\,d\tau \tag{1.7}$$

вытекает

$$0 \leqslant V(t, x(t; t_0, x_0)) \leqslant V(t_0, x_0) - \int_{t_0}^{t} m_\eta(\tau)\,d\tau$$

что в силу (1.5) при достаточно большом t невозможно. Из (1.6) следует асимптотическая y-устойчивость движения $x = 0$. В случае, когда система (1.1) и функция V ω-периодичны по t, требуемая равномерность вытекает из теоремы 1 работы [2].

Теорема 2. Если существует функция $V(t, x)$, удовлетворяющая условиям

$$1)\quad a(\|y\|) \leqslant V(t, x) \leqslant b\left(\left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2\right)^{1/2}\right), \qquad m \leqslant k \leqslant n \tag{1.8}$$

2) для любого $\eta > 0$ из

$$\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \geqslant \eta^2, \qquad \|y\| \leqslant H$$

следуют (1.4) и (1.5), то движение $x = 0$ асимптотически y-устойчиво равномерно по x_0 из области [1]

$$\sum_{i=1}^{k} x_{i0}^2 < \delta^2, \quad -\infty < x_{j0} < +\infty \quad (j = k+1, \ldots, n), \quad \delta = \mathrm{const} > 0 \tag{1.9}$$

Доказательство. Положим $\delta = b^{-1}(a(H))$. Если выполнено (1.9), то

$$a(\|y(t; t_0, x_0)\|) \leqslant V(t, x(t; t_0, x_0)) \leqslant V(t_0, x_0) \leqslant b\left(\left(\sum_{i=1}^{k} x_{i0}^2\right)^{1/2}\right) < a(H)$$

---

[1] Это означает, что при некотором $\delta > 0$ для любых $\varepsilon > 0$, $t_0 \geqslant 0$ существует $T(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что $\|y(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon$ для всех $t \geqslant t_0 + T$, если x_0 лежит в области (1.9).

откуда $\| \mathbf{y}(t;\ t_0,\ \mathbf{x}_0) \| < H$ при $t \geqslant t_0$, и, следовательно, решение $\mathbf{x}(t;\ t_0,\ \mathbf{x}_0)$ определено для всех $t \in [t_0, \infty)$. Для всяких $\varepsilon > 0$, $t_0 \geqslant 0$ в силу (1.5) существует $T(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что при $\eta = h \equiv b^{-1}(a(\varepsilon))$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} m_h(\tau)\, d\tau = a(H) \tag{1.10}$$

Если допустить, что $V(t, \mathbf{x}(t;\ t_0,\ \mathbf{x}_0)) \geqslant a(\varepsilon)$ для всех $t \in (t_0,\ t_0 + T)$, то из (1.7), в силу (1.4) и (1.10), будет следовать

$$0 < a(\varepsilon) \leqslant V(t_0 + T,\ \mathbf{x}(t_0 + T;\ t_0,\ \mathbf{x}_0)) \leqslant V(t_0,\ \mathbf{x}_0) - \int_{t_0}^{t_0+T} m_h(\tau)\, d\tau \leqslant a(H) -$$

$$- \int_{t_0}^{t_0+T} m_h(\tau)\, d\tau = 0$$

что невозможно. Следовательно, при некотором $t_* \in (t_0,\ t_0 + T)$ будет $V(t_*,\ \mathbf{x}(t_*;\ t_0,\ \mathbf{x}_0)) < a(\varepsilon)$. Поскольку $V^\cdot \leqslant 0$, то при $t \geqslant t_*$

$$a(\| \mathbf{y}(t;\ t_0,\ \mathbf{x}_0) \|) \leqslant V(t,\ \mathbf{x}(t;\ t_0,\ \mathbf{x}_0)) \leqslant V(t_*,\ \mathbf{x}(t_*;\ t_0,\ \mathbf{x}_0)) < a(\varepsilon)$$

откуда $\| \mathbf{y}(t;\ t_0,\ \mathbf{x}_0) \| < \varepsilon$ для всех $t \geqslant t_0 + T > T_*$. Теорема доказана.

Замечание. При выполнении условий теоремы 2 необходимо имеют место тождества

$$X_i(t, 0, \ldots, 0,\ x_{k+1}, \ldots, x_n) \equiv 0 \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

которые доказываются аналогично [4].

Теоремы 1 и 2 обобщают результаты работы [3].

При $m < n$ теоремы 1 и 2 не обратимы даже в случае равномерной по $\{t_0,\ \mathbf{x}_0\}$ асимптотической у-устойчивости в автономных системах, что показывает следующий пример.

Рассмотрим систему [4]

$$x^\cdot = -x\varphi(y), \qquad y^\cdot = 0 \tag{1.11}$$

в которой $\varphi(y)$ — гладкая функция, причем $\varphi(y) > 0$ при $|y| < 1$, $\varphi(y) \equiv 0$ при $|y| \geqslant 1$. Решение $x = y = 0$ системы (1.11) асимптотически x-устойчиво равномерно по $\{t_0,\ x_0,\ y_0\}$ [4].

Покажем, что для системы (1.11) не существует функции V, удовлетворяющей условиям теоремы 1[1]. Допустим противное: пусть $V(t, x, y) \geqslant a(|x|)$, а из $V(\tau, x, y) \geqslant \eta > 0$, $|x| \leqslant H$ следует $V^\cdot(\tau, x, y) \leqslant -m_\eta(\tau)$ и имеет место (1.5). В области $|y| \geqslant 1$ $V^\cdot \equiv \partial V / \partial t$. В силу выпуклости этой области по t имеем ([5], стр. 154)

$$V(t, x, y) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} V(\tau, x, y)\, d\tau + \psi(x, y)$$

откуда при $x \neq 0$ следует

$$0 \leqslant V(t, x, y) \leqslant -\int_0^t m_{a(|x|)}(\tau)\, d\tau + \psi(x, y)$$

что для достаточно большого t невозможно.

Для случая $m = n$ в работе [3] в предположении непрерывности и ограниченности производных $\partial X_i / \partial x_j$ сформулирована теорема, обратная теореме 1. Если призвод -

1 Для теоремы 2 доказательство проводится аналогично.

ные $\partial X_i / \partial x_j$ непрерывны, но не ограничены, обратная теорема не имеет места, что показывает пример скалярного уравнения [6]

$$x^{\cdot} = -x\varphi(t, x) \tag{1.12}$$

в котором φ — гладкая функция, причем $\varphi = 1$ при $|x| \leqslant e^{-t}$, $\varphi = 0$ при $|x| \geqslant 2e^{-t}$. Решение $x = 0$ уравнения (1.12) асимптотически устойчиво [6]. Покажем, что для этого уравнения не существует функции $V(t, x)$, удовлетворяющей условиям теоремы 1. Допустим противное: пусть $V(t, x) \geqslant a(|x|)$, а из $V(\tau, x) \geqslant \eta > 0$, $|x| \leqslant H$ следует $V^{\cdot}(\tau, x) \leqslant -m_\eta(\tau)$ и имеет место (1.5). В области $2e^{-t} \leqslant |x| \leqslant H$ имеем $V^{\cdot} \equiv \partial V / \partial t$, поэтому [6]

$$a(|x|) \leqslant V(t, x) = \int_{\tau(x)}^{t} \frac{\partial V(\xi, x)}{\partial \xi} d\xi + \psi(x) \leqslant -\int_{\tau(x)}^{t} m_{a(|x|)}(\xi)\, d\xi + \psi(x)$$

$$(\tau(x) = -\ln(1/2\,|x|))$$

что в силу (1.5) для достаточно большого t невозможно.

2. *Теорема* 3. **Если правые части системы (1.1) в области**

$$t \geqslant 0, \qquad \|\mathbf{x}\| \leqslant H > 0 \tag{2.1}$$

равномерно ограничены

$$\|\mathbf{X}(t, \mathbf{x})\| \leqslant N \qquad (N = \text{const} > 0) \tag{2.2}$$

и существует функция $V(t, \mathbf{x})$ такая, что $V \geqslant 0$, а ее производная в силу системы (1.1)

$$V^{\cdot}(t, \mathbf{x}) \leqslant -c(\|\mathbf{x}\|) \tag{2.3}$$

($c(r)$ — функция типа $a(r)$), то $V(t, \mathbf{x})$ — определенно-положительная функция.

Доказательство. Из (2.2) следует, что решение $\mathbf{x}(t;\, t_0, \mathbf{x}_0)$ с начальной точкой $(t_0, \mathbf{x}_0)$ из области

$$\|\mathbf{x}\| \leqslant H_1 \equiv {}^2/_3 H, \qquad t \geqslant 0 \tag{2.4}$$

при $0 \leqslant t - t_0 \leqslant H_1 / (2N)$ определено и удовлетворяет неравенству

$$\|\mathbf{x}(t;\, t_0, \mathbf{x}_0)\| \leqslant H \tag{2.5}$$

Покажем, что V — определенно-положительная в области (2.4) функция. Допустим противное: пусть при некотором ε_0, $0 < \varepsilon_0 < H_1$, для любого сколь угодно малого $\delta > 0$ найдется точка $(t_*, \mathbf{x}_*)$, $t_* \geqslant 0$, $\varepsilon_0 \leqslant \|\mathbf{x}_*\| \leqslant H_1$, для которой $V(t_*, \mathbf{x}_*) < \delta$. Имеем

$$V(t_*, \mathbf{x}_*) < \frac{\varepsilon_0}{2N} c\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right) \quad \text{при } \delta < \frac{\varepsilon_0}{2N} c\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right) \tag{2.6}$$

Из (2.2) и неравенства $\|\mathbf{x}_*\| \geqslant \varepsilon_0$ вытекает

$$\|\mathbf{x}(t;\, t_*, \mathbf{x}_*)\| \geqslant \frac{\varepsilon_0}{2} \quad \text{при } 0 \leqslant t - t_* \leqslant \frac{\varepsilon_0}{2N} < \frac{H_1}{2N} \tag{2.7}$$

В силу (2.6) и (2.7) из (1.7) для момента $t = t_* + \varepsilon_0 / (2N)$ (при этом t ввиду (2.5) решение еще определено) следует

$$0 \leqslant V\left(t_* + \frac{\varepsilon_0}{2N},\ \mathbf{x}\left(t_* + \frac{\varepsilon_0}{2N};\ t_*, \mathbf{x}_*\right)\right) \leqslant V(t_*, \mathbf{x}_*) - \frac{\varepsilon_0}{2N} c\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right) < 0$$

что невозможно. Теорема доказана.

Замечание. Условие (2.2) будет выполнено, например, если система (1.1) периодична по t (или автономна).

Лемма. Если существует функция $V(t, \mathbf{x})$ такая, что в области (2.1) $V \geqslant 0$, а $V^{\cdot} \leqslant 0$, то в каждой точке $(t, \mathbf{x})$, в которой $V^{\cdot}(t, \mathbf{x}) < 0$, выполнено неравенство $V(t, \mathbf{x}) > 0$.

Доказательство. Если бы в некоторой точке $(t_*, \mathbf{x}_*)$ было $V^{\cdot}(t_*, \mathbf{x}_*) < 0$, а $V(t_*, \mathbf{x}_*) = 0$, то из

$$V(t_* + \varepsilon, \mathbf{x}(t_* + \varepsilon;\, t_*, \mathbf{x}_*)) = V(t_*, \mathbf{x}_*) + \int\limits_{t_*}^{t_*+\varepsilon} V^{\cdot}(\tau, \mathbf{x}(\tau;\, t_*, \mathbf{x}_*))\, d\tau = V^{\cdot}(t_*, \mathbf{x}_*)\,\varepsilon + o(\varepsilon)$$

при достаточно малом $\varepsilon > 0$ следовало $V < 0$, что невозможно.

Теорема 4. Если в области (2.1):

1) $V(t, \mathbf{x}) \geqslant 0$;

2) функция V периодична по t (или не зависит от времени);

3) из $\|\mathbf{x}\| \neq 0$ следует $V^{\cdot}(t, \mathbf{x}) < 0$, то V — определенно-положительная функция.

Доказательство. Из условий 1) и 3) в силу леммы следует, что $V(t, \mathbf{x}) > 0$ при $\|\mathbf{x}\| \neq 0$. Поэтому из условия 2) вытекает определенная положительность функции V[7].

Замечание. Условие 3) выполнено, например, если $V^{\cdot}$ — определенно-отрицательная функция.

Теорема 4 перестает быть верной, если отбросить условие 2), что показывает следующий пример: для уравнения $x^{\cdot} = -xe^t$ постоянно-положительная функция $V = x^2e^{-t}$, которая не является определенно-положительной, имеет определенно отрицательную производную.

Известна следующая

Теорема А [8-10]. Если существует функция $V(t, \mathbf{x})$, удовлетворяющая в области (1.2) условиям

$$a(\|\mathbf{y}\|) \leqslant V(t, \mathbf{x}) \leqslant b(\|\mathbf{x}\|)$$

и имеет место (2.3), то движение $\mathbf{x} = 0$ асимптотически y-устойчиво равномерно по $\{t_0, \mathbf{x}_0\}$.

Из теорем 3 и 4 следует, что если существует функция V, удовлетворяющая условиям теоремы А, и выполнено одно из двух условий: или имеет место (2.2) (в области (2.1)) или V периодична по t, то функция V необходимо определенно-положительная, и, следовательно, движение $\mathbf{x} = 0$ асимптотически устойчиво в смысле Ляпунова (равномерно по $\{t_0, \mathbf{x}_0\}$ [7]).

Таким образом, не являющаяся определенно-положительной по всем переменным функция V, удовлетворяющая условиям теоремы А (например, когда нет асимптотической устойчивости в смысле Ляпунова), может существовать лишь тогда, когда система (1.1) и функция V «существенно» зависят от времени.

Например, для системы $x^{\cdot} = -x + ye^{-t}$, $y^{\cdot} = -x - ye^{-t}$ допускающая бесконечно малый высший предел x-определенно-положительная функция $V = x^2 + y^2e^{-t}$, которая не является определенно-положительной по (x, y), имеет определенно-отрицательную производную.

3. Метод функций Ляпунова может применяться к исследованию ограниченности решений [11–14]. Аналогичные результаты имеют место в задаче об y-ограниченности.

Предполагается, что правые части системы (1.1) непрерывны и удовлетворяют условиям единственности решения в области

$$0 \leqslant \|\mathbf{x}\| < +\infty, \qquad t \geqslant 0 \tag{3.1}$$

причем не обязательно $\mathbf{X}(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$; z-продолжимость означает здесь, что любое решение $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ определено при всех $t \geqslant 0$, при которых $\|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < +\infty$.

Определение. Решения системы (1.1) называются:

а) y-ограниченными, если для любых $t_0 \geqslant 0$, $\mathbf{x}_0$ найдется $N(t_0, \mathbf{x}_0) > 0$ такое, что при $t \geqslant t_0$

$$\|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| \leqslant N \tag{3.2}$$

б) y-ограниченными равномерно по t_0, если в п. а) для любого $\mathbf{x}_0$ можно выбрать $N(\mathbf{x}_0) > 0$ не зависящим от t_0;

в) y-ограниченными равномерно по $\mathbf{x}_0$, если для любых $t_0 \geqslant 0$ и компакта K пространства $\{x_1, \ldots, x_n\}$ найдется $N(t_0, K) > 0$ такое, что из $\mathbf{x}_0 \in K$, $t \geqslant t_0$ вытекает (3.2);

г) y-ограниченными равномерно по $\{t_0, \mathbf{x}_0\}$, если в п. в) для любого компакта K можно выбрать $N(K) > 0$ не зависящим от t_0.

Теорема 5. Для того чтобы решения системы (1.1) были

1) y-ограниченными, необходимо и достаточно существование функции $V(t, \mathbf{x})$, которая в области (3.1) удовлетворяет неравенству (1.3), причем $a(\|\mathbf{y}\|) \to +\infty$ при $\|\mathbf{y}\| \to \infty$, и для любого решения $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ функция $V(t, \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0))$ не возрастает;

2) y-ограниченными равномерно по t_0, необходимо и достаточно существование функции V, которая удовлетворяет условиям п. 1) и, кроме того, неравенству

$$V(t, \mathbf{x}) \leqslant W(\mathbf{x}) \tag{3.3}$$

где $W(\mathbf{x})$ — конечная в каждой точке $\mathbf{x}$ функция (вообще говоря, разрывная);

3) y-ограниченными равномерно по $\mathbf{x}_0$, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция V, удовлетворяющая условиям п. 1), и такая, что для любого компакта K

$$V(t, \mathbf{x}) \leqslant \varphi_K(t) \quad \text{при } \mathbf{x} \in K, \ t \geqslant 0 \tag{3.4}$$

4) y-ограниченными равномерно по $\{t_0, \mathbf{x}_0\}$, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция V, удовлетворяющая условиям п. 1) и неравенству

$$V(t, \mathbf{x}) \leqslant b(\|\mathbf{x}\|) \tag{3.5}$$

где $b(r)$ — монотонно возрастающая при $r \in [0, \infty)$ функция [1].

[1] Результат, близкий к п. 3), 4) этой теоремы (в части достаточных условий) получен в работе Peiffer K. La méthode direct de Liapounoff appliquée à l'étude de la stabilité partielle (Dissertation). Université Catholique de Louvain, Faculté des sciences, 1968.

Доказательство. 1) *Достаточность.* Для $V_0 \equiv V(t_0, \mathbf{x}_0)$ существует $N(V_0) = N(t_0, \mathbf{x}_0) > 0$ такое, что из $\|\mathbf{y}\| > N$ следует $a(\|\mathbf{y}\|) > V_0$. Далее имеем

$$a(\|\mathbf{y}(t;\ t_0,\ \mathbf{x}_0)\|) \leqslant V(t,\ \mathbf{x}(t;\ t_0,\ \mathbf{x}_0)) \leqslant V_0$$

откуда $\|\mathbf{y}(t;\ t_0,\ \mathbf{x}_0)\| \leqslant N$ при $t \geqslant t_0$.

Необходимость. В силу $\mathbf{y}$-ограниченности в области (3.1) определена функция

$$V(t, \mathbf{x}) = \sup_{\tau \geqslant 0} \|\mathbf{y}(t + \tau;\ t,\ \mathbf{x})\| \tag{3.6}$$

Очевидно, $V(t,\ \mathbf{x}) \geqslant \|\mathbf{y}\|$. Если $t_1 < t_2$, то

$$V(t_1,\ \mathbf{x}(t_1;\ t_0, \mathbf{x}_0)) = \sup_{\tau\geqslant 0} \|\mathbf{y}(t_1 + \tau; t_0,\ \mathbf{x}_0)\| \geqslant \sup_{\tau\geqslant 0} \|\mathbf{y}(t_2 + \tau;\ \ t_0,\ \mathbf{x}_0)\| = V(t_2,\ \mathbf{x}(t_2;\ t_0, \mathbf{x}_0))$$

т. е. $V(t,\ \mathbf{x}(t;\ t_0,\ \mathbf{x}_0))$ не возрастает.

2) *Достаточность.* Подберем $N(\mathbf{x}_0) > 0$ так, чтобы из $\|\mathbf{y}\| > N$ следовало $a(\|\mathbf{y}\|) > W(\mathbf{x}_0)$. В этом случае (см. (3.3))

$$a(\|\mathbf{y}(t;\ t_0,\ \mathbf{x}_0)\|) \leqslant V(t,\ \mathbf{x}(t;\ t_0,\ \mathbf{x}_0)) \leqslant V(t_0,\ \mathbf{x}_0) \leqslant W(\mathbf{x}_0)$$

откуда $\|\mathbf{y}(t;\ t_0,\ \mathbf{x}_0)\| \leqslant N$ при $t \geqslant t_0$.

Необходимость. Функция V, определенная формулой (3.6), согласно п. б) определения, удовлетворяет неравенству $V(t,\ \mathbf{x}) \leqslant N(\mathbf{x})$.

3) *Достаточность.* Для всяких t_0 и компакта K существует $N(t_0,\ K) > 0$ такое, что из $\|\mathbf{y}\| > N$ следует $a(\|\mathbf{y}\|) > \varphi_K(t_0)$. При $\mathbf{x}_0 \in K,\ t \geqslant t_0$ имеем (см. (3.4))

$$a(\|\mathbf{y}(t;\ t_0,\ \mathbf{x}_0)\|) \leqslant V(t,\ \mathbf{x}(t;\ t_0,\ \mathbf{x}_0)) \leqslant V(t_0,\ \mathbf{x}_0) \leqslant \varphi_K(t_0)$$

откуда $\|\mathbf{y}(t;\ t_0,\ \mathbf{x}_0)\| \leqslant N$.

Необходимость. Функция V, определенная формулой (3.6), при $\mathbf{x} \in K$ удовлетворяет неравенству

$$V(t,\ \mathbf{x}) \leqslant N(t,\ K) \equiv \varphi_K(t)$$

4) *Достаточность.* Для каждого компакта K обозначим через

$$b_K = \sup\,[V(t,\ \mathbf{x}):\ t \geqslant 0,\ \mathbf{x} \in K] \leqslant \sup\,[b(\|\mathbf{x}\|):\ \mathbf{x} \in K] < +\infty$$

Существует $N(K) > 0$ такое, что из $\|\mathbf{y}\| > N$ следует $a(\|\mathbf{y}\|) > b_K$. Тогда

$$a(\|\mathbf{y}(t;\ t_0,\ \mathbf{x}_0)\|) \leqslant V(t,\ \mathbf{x}(t;\ t_0,\ \mathbf{x}_0)) \leqslant V(t_0,\ \mathbf{x}_0) \leqslant b_K \quad \text{при } t_0 \geqslant 0,\ \mathbf{x}_0 \in K$$

откуда $\|\mathbf{y}(t;\ t_0,\ \mathbf{x}_0)\| \leqslant N$ для всех $t \geqslant t_0$.

Необходимость. Для функции (3.6), беря в качестве компактов K шары $\|\mathbf{x}\| = r$, $r \in [0,\ \infty)$, получим, согласно г)

$$V(t,\ \mathbf{x}) \leqslant N(K) \equiv N(r) \quad \text{при } \mathbf{x} \in K$$

Функцию $N(r)$ можно считать монотонно возрастающей при $r \in [0,\ \infty)$; после этого остается положить $b(\|\mathbf{x}\|) = N(\|\mathbf{x}\|)$.

Теорема доказана.

Замечание. Условие (3.4) выполнено, если $V(t,\ x)$ непрерывна.

Пример. Для механической системы [1, 2, 9]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q_i}} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{n} g_{ij}\dot{q_j} - \frac{\partial f}{\partial \dot{q_i}} \quad (i = 1, \ldots, n;\ g_{ij} = -g_{ji}) \tag{3.7}$$

взяв в качестве функции Ляпунова $H = T + U$, получим $H^{\cdot} = -2f \leqslant 0$. Предположим, что

$$2T = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{q})\, q_i^{\cdot} q_j^{\cdot} \geqslant \alpha \sum_{i=1}^{n} q_i^{\cdot 2} \quad (\alpha > 0), \quad U \geqslant 0$$

Согласно п. 4) теоремы 5, решения системы (3.7) $\mathbf{q}^{\cdot}$-ограничены равномерно по $\{t_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{q}_0^{\cdot}\}$. Следовательно, каждое решение $\{\mathbf{q}(t), \mathbf{q}^{\cdot}(t)\}$ определено при $t \in [0, \infty)$.

К задаче y-ограниченности могут быть применены дифференциальные неравенства и принцип сравнения [15].

Предположим, что существует вектор-функция $\mathbf{V} = (V_1, \ldots, V_k)$, удовлетворяющая условиям:

1) $\mathbf{V}(t, \mathbf{x})$ и $\mathbf{V}^{\cdot}(t, \mathbf{x})$ непрерывны;

2) для некоторого l $(1 \leqslant l \leqslant k)$

$$V_1(t, \mathbf{x}) + \ldots + V_l(t, \mathbf{x}) \geqslant a(\|\mathbf{y}\|) \tag{3.8}$$

причем $a(\|\mathbf{y}\|) \to +\infty$ при $\|\mathbf{y}\| \to \infty$.

3) $\mathbf{V}^{\cdot}$ в силу (1.1) удовлетворяет неравенству

$$\mathbf{V}^{\cdot}(t, \mathbf{x}) \leqslant \mathbf{f}(t, \mathbf{V}(t, \mathbf{x}))$$

а вектор-функция $\mathbf{f}(t, \mathbf{V})$ определена и непрерывна в области

$$t \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \|\mathbf{V}\| < +\infty$$

4) каждая из функций f_s $(s = 1, \ldots, k)$ не убывает по $V_1, \ldots, V_{s-1}, V_{s+1}, \ldots, V_k$.

Обозначим $\alpha = (\omega_1, \ldots, \omega_l)$. Рассмотрим систему сравнения

$$\omega^{\cdot} = \mathbf{f}(t, \omega) \tag{3.9}$$

Теорема 6. 1) Если решения системы (3.9) α-ограничены, то решения системы (1.1) y-ограничены равномерно по $\mathbf{x}_0$;

2) Если решения системы (3.9) α-ограничены равномерно по t_0 и

$$\|\mathbf{V}(t, \mathbf{x})\| \leqslant b(\|\mathbf{x}\|)$$

то решения системы (1.1) y-ограничены равномерно по $\{t_0, \mathbf{x}_0\}$.

Доказательство. По теореме Важевского [16] существует верхний интеграл системы (3.9), удовлетворяющий неравенству

$$\mathbf{V}(t, \mathbf{x}(t;\, t_0, \mathbf{x}_0)) \leqslant \omega^{+}(t;\, t_0, \omega_0) \tag{3.10}$$

если только $\mathbf{V}(t_0, \mathbf{x}_0) \leqslant \omega_0$.

1) В силу непрерывности $\mathbf{V}$ для каждого компакта K

$$\mathbf{V}(t, \mathbf{x}) \leqslant \varphi_K(t) \equiv \max\,[\mathbf{V}(t, \mathbf{x}) \colon \mathbf{x} \in K] \quad \text{при } t \geqslant 0,\ \mathbf{x} \in K$$

Положим $\omega_0 = \varphi_K(t_0)$, тогда $\mathbf{V}(t_0, \mathbf{x}_0) \leqslant \omega_0$ при $\mathbf{x}_0 \in K$. По условию существует $A(t_0, \omega_0) = A_K(t_0)$ такое, что

$$\sum_{s=1}^{l} \omega_s^{+}(t;\, t_0, \omega_0) \leqslant A \tag{3.11}$$

Если $N(A) = N_K(t_0) > 0$ таково, что из $\| y \| > N$ следует $a(\| y \|) > A$, то из (3.8), (3.10) и (3.11) получаем

$$a(\| y(t;\ t_0,\ x_0) \|) \leqslant \sum_{s=1}^{l} V_s(t,\ x(t;\ t_0,\ x_0)) \leqslant \sum_{s=1}^{l} \omega_s^+(t;\ t_0,\ \omega_0) \leqslant A$$

откуда $\| y(t;\ t_0,\ x_0) \| \leqslant N$ при $t \geqslant t_0$.

2) Положим $b_K = \sup\, [b(\| x \|)\colon x \in K]$, $\omega_{s_0} = b_K$ $(s = 1, \ldots, k)$. Тогда числа A_K и N_K можно выбрать не зависящими от t_0.

Теорема доказана.

Автор благодарит В. В. Румянцева за внимание к работе и советы при написании статьи.

Поступила 19 VIII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Румянцев В. В. Об устойчивости движения по отношению к части переменных. Вестн. МГУ. Сер. Матем., механ., 1957, № 4.
2. Озиранер А. С. Об асимптотической устойчивости относительно части переменных. Вестн. МГУ. Сер. Матем., механ., 1972, № 1.
3. Красовский Н. Н. К теории второго метода А. М. Ляпунова исследования устойчивости движения. Докл. АН СССР, 1956, т. 109, № 3.
4. Озиранер А. С. К вопросу об устойчивости движения относительно части переменных. Вестн. МГУ. Сер. Матем., механ., 1971, № 1.
5. Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. М., «Мир», 1967.
6. Озиранер А. С. Задача обратимости теоремы Марчкова об асимптотической устойчивости. Вестн. МГУ. Сер. Матем., механ., 1971, № 3.
7. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М., «Наука», 1966.
8. Румянцев В. В. Об оптимальной стабилизации управляемых систем. ПММ, 1970, т. 34, вып. 3.
9. Rumyantsev V. V. On the stability with respect to a part of the variables, Sympos. math., vol. 6, meccanica non lineare e stabilita, 23—26 Febbrario 1970, L.—N. Y., Acad. Press, 1971.
10. Halanay A. Differential equations, stability, oscilations, time lags. N. Y., Acad. Press, 1966.
11. Yoshizawa T. Liapunov's function and boundedness of solutions, Funkcialaj Ekvacioj, 1959, No 2, p. 92—142 (Русск. перев. Сб. перев. Математика, 1965, т. 9, № 5, стр. 95 — 127).
12. Yoshizawa T. Stability theory by Liapunov's second method. J. Math. Soc. Japan, 1966.
13. Lakshmikantham V. Vector Lyapunov's functions and conditional stability. J. Math. Anal. and Appl., 1965, vol. 10, No. 2, p. 368—377.
14. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М., «Наука», 1967.
15. Матросов В. М. К теории устойчивости движения. ПММ, 1962, т. 26, вып. 6.
16. Wazewski T. Systèmes des equations et des inequalités differentielles ordinaires aux deuxièmes membres monotones et leurs applications. Ann. Soc. Polon. math., 1950, t. 23, p. 112—166.