Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 531.31

О ВОЗМОЖНЫХ ТИПАХ КРИТИЧЕСКИХ СЛУЧАЕВ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА

А. Н. Вейссенберг

(Ярославль)

Рассматриваются типы критических случаев, возникающих в общих уравнениях голономной склерономной системы в независимых координатах. Рассматривается матрица первого приближения системы и изучаются элементарные делители, отвечающие этой матрице. Доказывается теорема об устойчивости нулевого решения в одном специальном критическом случае, когда используются знакоопределенные по части переменных функции.

После работ Ляпунова [1,2] критические случаи общей задачи об устойчивости движения рассматриваются в работе [3]. В работе [4] отмечается алгебраическая неразрешимость проблемы устойчивости в достаточно сложных критических случаях.

1. Пусть даны общие уравнения движения голономной склерономной системы в независимых координатах

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_i^{\cdot}} - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_i} = Q_i \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

Кинетическая энергия системы $\mathrm{T} = (q^{\cdot})' A q^{\cdot} / 2 + (q^{\cdot})' A(q) q^{\cdot}$, где A — постоянная определенно-положительная матрица ($A > 0$). Элементы матрицы $A(q)$ аналитичны относительно компонент вектора q, $A(0) = 0$. Штрих означает транспонирование. Пусть $q = q^{\cdot} = 0$ — положение равновесия.

Полагая стационарными обобщенные силы Q_i, систему (1.1) можно переписать в виде [5]

$$dx/dt = y, \qquad dy/dt = Qx + Ly + \nu(x, y) \tag{1.2}$$

$$(q = x, \ q^{\cdot} = y)$$

где Q, L — постоянные матрицы; компоненты вектора $\nu(x, y)$ аналитичны и не ниже второго порядка.

Матрица первого приближения

$$P = \begin{Vmatrix} 0 & E \\ Q & L \end{Vmatrix} \tag{1.3}$$

где E — единичная матрица. Матрица P имеет четный порядок. Исследуется возможность появления в спектре $\sigma(P)$ матрицы P нулевых либо чисто мнимых чисел в зависимости от свойств матриц Q, L. Изучаются соответствующие типы элементарных делителей. Без ограничения общности матрица Q (либо L) считается приведенной к канонической жордановой форме.

Используя матричное равенство

$$\left\| P - \varkappa E \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} E & E \\ 0 & \varkappa E \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} -\varkappa E & 0 \\ Q & Q + \varkappa L - \varkappa^2 E \end{matrix} \right\|$$

можно получить характеристический многочлен $f(\varkappa)$ матрицы

$$f(\varkappa) = (-1)^n \det \| Q + \varkappa L - \varkappa^2 E \| \tag{1.4}$$

После элементарных преобразований [6] матрица $P - \varkappa E$ принимает вид

$$\left\| \begin{matrix} E & 0 \\ 0 & Q + \varkappa L - \varkappa^2 E \end{matrix} \right\| \tag{1.5}$$

На комплексной плоскости рассматриваются множества

$$\Theta = \{z : \operatorname{Im} z = 0, \ -\infty < \operatorname{Re} z \leqslant 0\}$$
$$\Lambda = \{z : \operatorname{Re} z \leqslant 0\}, \ \Omega = \{z : \operatorname{Re} z = 0\}$$

Теорема 1. 1°. Число нулевых собственных чисел матрицы P не меньше числа элементарных делителей матрицы $Q - \lambda E$, отвечающих нулевым собственным числам матрицы Q.

2°. Пусть $Q = 0$, $L \neq 0$ и $\lambda^l, \ldots, \lambda^k$ (g раз), $(\lambda - \lambda_1)^{p_1}, \ldots, (\lambda - \lambda_r)^{p_r}$ (r раз) — множество элементарных делителей матрицы $L - \lambda E$ ($l + \ldots + k = m$, $m + p_1 + \ldots + p_r = n$). Тогда элементарными делителями матрицы $P - \varkappa E$ будут $\varkappa, \ldots, \varkappa$ ($n - g$ раз), $\varkappa^{l+1}, \ldots, \varkappa^{k+1}$ (g раз), $(\varkappa - \lambda_1)^{p_1}, \ldots, (\varkappa - \lambda_r)^{p_r}$ (r раз).

3°. Пусть $Q \neq 0$, $L = 0$, $\sigma(Q) \cap \Theta = \Theta$ и $\lambda^l, \ldots, \lambda^k$ (g раз), $(\lambda - \lambda_1)^{p_1}, \ldots, (\lambda - \lambda_r)^{p_r}$ (r раз) — множество элементарных делителей матрицы $Q - \lambda E$ ($l + \ldots + k = m$, $m + p_1 + \ldots + p_r = n$). Тогда элементарными делителями матрицы $P - \varkappa E$ будут $\varkappa^{2l}, \ldots, \varkappa^{2k}$ (g раз), $(\varkappa + i\sqrt{+\lambda_1})^{p_1}$, $(\varkappa - i\sqrt{-\lambda_1})^{p_1}, \ldots, (\varkappa + i\sqrt{-\lambda r})^{p_r}$, $(\varkappa - i\sqrt{-\lambda_r})^{p_r}$ ($2r$ раз).

4°. Пусть $Q = L = 0$. Тогда элементарными делителями матрицы $P - \varkappa E$ будут $\varkappa^2, \ldots, \varkappa^2$ (n раз).

Доказательство. 1°. Матрица Q считается приведенной к жордановой форме. Рассматривается равенство

$$Q + \varkappa L - \varkappa^2 E = \left\| \begin{matrix} P_{11}(\varkappa) & P_{12}(\varkappa) \\ P_{21}(\varkappa) & P_{22}(\varkappa) \end{matrix} \right\| \tag{1.6}$$

где квадратные матрицы $P_{11}(\varkappa)$, $P_{22}(\varkappa)$ отвечают соответственно элементарным делителям $\lambda^l, \ldots, \lambda^k$ (g раз) и $(\lambda - \lambda_1)^{p_1}, \ldots, (\lambda - \lambda_r)^{p_r}$ (r раз) матрицы $Q - \lambda E$. Используется соотношение

$$(-1)^n f(\varkappa) = \det \| Q + \varkappa L - \varkappa^2 E \| = \sum_{\pi} (\operatorname{sgn} \pi) \alpha_{\pi(1),1}(\varkappa) \ldots \alpha_{\pi(n),n}(\varkappa) \tag{1.7}$$

где суммирование распространяется на все перестановки π множества всех перестановок из целых чисел от единицы до n, и $\alpha_{ij}(\varkappa)$ — элемент матрицы $\| Q + \varkappa L - \varkappa^2 E \|$ на пересечении i-й строки и j-го столбца. Из (1.7) и вида матриц $P_{11}(\varkappa)$, $P_{22}(\varkappa)$ следует, что многочлен $f(\varkappa)$ не содержит слагаемых с $\varkappa$ в степени ниже, чем g.

2°. Матрица L предполагается приведенной к жордановой форме. Рассматривается матрица (1.5) при условии $Q = 0$. Учитывая [7], искомое множество элементарных делителей получим после объединения элементарных делителей матриц $k \times k$ и $p_r \times p_r$ типа

$$\begin{Vmatrix} -\varkappa^2 & \varkappa & \dots & 0 \\ 0 & -\varkappa^2 & \dots & 0 \\ \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & \varkappa \\ 0 & 0 & \dots & -\varkappa^2 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} \varkappa\lambda_r-\varkappa^2 & \varkappa & \dots & 0 \\ 0 & \varkappa\lambda_r-\varkappa^2 & \dots & 0 \\ \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & \varkappa \\ 0 & 0 & \dots & \varkappa\lambda_r-\varkappa^2 \end{Vmatrix}$$

Ясно, что $\varkappa, \dots, \varkappa$ ($k-1$ раз), $\varkappa^{k+1}$ — множество элементарных делителей первой из матриц; $\varkappa, \dots, \varkappa$ (p_r раз), $(\varkappa-\lambda_r)^{p_r}$ — аналогичное множество для другой. Критический случай в системе (1.3) возможен лишь когда $\sigma(L) \in \Lambda$.

3°. Матрица Q предполагается приведенной к жордановой форме. Рассматривается матрица (1.5) при условии $L=0$. Искомое множество элементарных делителей получается после объединения элементарных делителей матриц $k \times k$ и $p_r \times p_r$ типа

$$\begin{Vmatrix} -\varkappa^2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & -\varkappa^2 & \dots & 0 \\ \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & -\varkappa^2 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} \lambda_r-\varkappa^2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_r-\varkappa^2 & \dots & 0 \\ \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_r-\varkappa^2 \end{Vmatrix}$$

где $\varkappa^{2k}$ — элементарный делитель первой матрицы. Для второй — элементарные делители получаются после разложения многочлена $(\lambda_r-\varkappa^2)^{p_r}$ на неприводимые в поле комплексных чисел сомножители. Если $\lambda_r \in \sigma(Q)$ и $\lambda_r \notin \Theta$, то простой анализ свидетельствует, что среди элементарных делителей найдется отвечающий корню с положительной вещественной частью уравнения $f(\varkappa)=0$. В этом случае решение $x \equiv 0$ неустойчиво. Если $\sigma(Q) \cap \Theta = \Theta$, то разложение многочлена на неприводимые сомножители дает $(\varkappa+i\sqrt{-\lambda_r})^{p_r}$, $(\varkappa-i\sqrt{-\lambda_r})^{p_r}$.

4°. Справедливость п. 4° очевидна.

Изучим частные случаи действия сил различных типов на склерономную систему.

Гироскопические силы вида $Q_i = \gamma_{i1}q_1^{\boldsymbol{\cdot}} + \dots + \gamma_{in}q_n^{\boldsymbol{\cdot}}$. Матрица $\Gamma = \|\gamma_{ij}\|_1^n$ необходимо кососимметрическая. Для системы (1.2) $Q=0$, $L=A^{-1}\Gamma$.

Доказывается, что $\sigma(A^{-1}\Gamma) \in \Omega$. Скалярное произведение векторов определено формулой $u \cdot v = u_1\bar{v}_1 + \dots + u_n\bar{v}_n$ (черта означает переход к сопряженной комплексной величине); $\Gamma u \cdot u + \Gamma\bar{u}\cdot\bar{u} = 0$ для любого u вследствие $\Gamma = -\Gamma'$. Если u — собственный вектор матрицы $A^{-1}\Gamma$, отвечающий собственному числу λ, то $\Gamma u = \lambda A u$. Поскольку $\lambda A u \cdot u + \bar{\lambda} A\bar{u}\cdot\bar{u} = 0$, $Au\cdot u = A\bar{u}\cdot\bar{u} \neq 0$, то $\lambda + \bar{\lambda} = 0$.

На основании п. 2° теоремы 1 $\sigma(P) \in \Omega$.

При перестановочности A^{-1} и Γ матрица $A^{-1}\Gamma$ кососимметрическая. В поле комплексных чисел она обладает линейными элементарными делителями. Элементарные делители матрицы $P-\varkappa E$ будут типов $\varkappa$, $\varkappa^2$, $(\varkappa+i\alpha)$, $(\varkappa-i\alpha)$ $(\alpha > 0)$. Если кроме того $\det\Gamma \neq 0$, матрице P отвечают линейные элементарные делители типов $\varkappa$, $(\varkappa+i\alpha)$, $(\varkappa-i\alpha)$.

Диссипативные силы $Q_i = -(b_{i1}q_1^{\boldsymbol{\cdot}} + \dots + b_{in}q_n^{\boldsymbol{\cdot}})$, $B = \|b_{ij}\|_1^n \geqslant 0$. Здесь $Q=0$, $L=-A^{-1}B$. Имеем $\sigma(-A^{-1}B) \in \Theta$. Действительно, если u — собственный вектор матрицы $-A^{-1}B$, отвечающий собственному числу λ, то

$$\lambda = -Bu \cdot u / Au \cdot u$$

Требуемое получается, так как $Au \cdot u > 0$, $Bu \cdot u \geqslant 0$. Спектр $\sigma(P)$ состоит из отрицательных и нулевых чисел.

Для перестановочных A^{-1}, B матрица $(-A^{-1}B)$ симметрическая. В поле комплексных чисел она обладает линейными элементарными делителями. Матрице P отвечают элементарные делители $\varkappa$, $\varkappa^2$, $(\varkappa + \alpha)$ $(\alpha > 0)$. Если кроме того $\det B \neq 0$, то элементарные делители $P - \varkappa E$ — простые. Потенциальные силы $Q_i = -\partial \Pi / \partial q_i$, где

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i, j}^{n} b_{ij} q_i q_j, \qquad B \geqslant 0$$

Система консервативна. Здесь $Q = -A^{-1}B$, $L = 0$. Доказанный алгебраический факт $\sigma(-A^{-1}B) \in \Theta$ получается и из механических соображений. Подбирается аналитическая (не ниже третьего порядка) функция $\psi(q)$ так, что потенциальная энергия $\Pi + \psi(q)$ достигает строго минимума, когда $q = 0$. Требуемое получается использованием теоремы Лагранжа об устойчивости и п. 3° теоремы 1. Можно утверждать, что в случае перестановочности A^{-1}, B и $\det B \neq 0$ матрице P отвечают линейные элементарные делители типа $(\varkappa + i\alpha)$, $(\varkappa - i\alpha)$.

2. В системе уравнений (1.2) полагается $Q = 0$, $\nu(x, 0) \equiv 0$. Тогда (1.2) допускает решение

$$x \equiv c, \qquad y \equiv 0 \tag{2.1}$$

где c — постоянный вектор. Вектор c называется допустимым, если его евклидова норма $|c|$ достаточно мала. Для системы (1.2)

$$\nu(x, y) = Y(x)\, y + \nu^*(x, y)$$

Компоненты вектора $\nu^*(x, y)$ не ниже второго порядка по y и $Y(0) = L$.

Теорема 2. $Q = 0$, $\nu = (x, 0) \equiv 0$ и матрица $Y(c) = \| y_{ij}(c) \|^n_1$ — матрица Гурвица, то решение (2.1) устойчиво по Ляпунову.

Доказательство. Через $\mu_i(y)$ обозначены линейные формы, удовлетворяющие уравнениям

$$\sum_{j=1}^{n} [y_{j1}(c)\, y_1 + \ldots + y_{jn}(c)\, y_n] \frac{\partial \mu_i}{\partial y_j} = y_i \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.2}$$

Так как $\det Y(c) \neq 0$, система (2.2) разрешима. После замены переменных $x = \zeta + \mu(y) + c$ исходная система будет

$$d\zeta / dt = \zeta(\zeta, y), \qquad dy / dt = Y(c)\; y + \nu^\circ(\zeta, y) \tag{2.3}$$

$$\nu^\circ(\zeta, y) = \nu^*(\zeta + \mu(y) + c, y) + [Y(\zeta + \mu(y) + c) - Y(c)] y$$

$$\zeta(\zeta, y) = -\sum_{j=1}^{n} \nu_j^0(\zeta, y) \frac{\partial \mu(y)}{\partial y_j}$$

Векторы $v^\circ(\zeta, y)$, $\zeta(\zeta, y)$ не ниже второго порядка по ζ, y. Так как $\zeta(\zeta, 0) \equiv 0$, $v^\circ(\zeta, 0) \equiv 0$ и $Y(c)$ — матрица Гурвица, то нулевое решение системы (2.3) устойчиво [1].

Теорема об устойчивости нулевого решения формулируется и для более общей системы уравнений

$$\frac{d\xi}{dt} = \xi(x, y), \qquad \xi(0, 0) = 0, \quad \xi = \left\| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\| \tag{2.4}$$

где x, y — s и n-мерные векторы. Компоненты вектора $\xi(x, y)$ аналитичны по x, y; $\xi(x, 0) \equiv 0$.

Система (2.4) допускает решение (2.1). Если решение (2.1) устойчиво, то для любого (малого) $\varepsilon > 0$ можно указать числовое множество $X_\varepsilon(c)$, обладающее свойством: пусть $\alpha \in X_\varepsilon(c)$; из $|x(0) - c| < \alpha$, $|y(0)| < \alpha$ следует $|x(t) - c| < \varepsilon$, $|y(t)| < \varepsilon$ $(t \geqslant 0)$. Множество $X_\varepsilon(c)$ содержится на отрезке $[0, \varepsilon]$; $S(x^\circ, h) = \{x\colon |x - x^\circ| = h\}$ — сфера радиуса h с центром в x°.

Лемма. Пусть для любых допустимых c решения (2.1) устойчивы. Тогда для достаточно малых h, ε можно указать такое число $\beta > 0$, что

$$\inf_{x \in S(0, h)} \sup X_\varepsilon(x) > \beta$$

Доказательство. Предполагается противное. Тогда имеется такая последовательность $\{x^e\}$ $(x^e \in S(0, h))$, что $\lim [\sup X_\varepsilon(x^e)] = 0$. Множество $S(0, h)$ замкнуто (в евклидовой метрике), поэтому $\lim x^e = x^* \in S(0, h)$ при $e \to \infty$. Решение $x \equiv x^*$, $y \equiv 0$ устойчиво; по $\varepsilon > 0$ найдется такое $\gamma > 0$, меньшее ε, что из

$$|x(0) - x^*| < \gamma, \qquad |y(0)| < \gamma$$

следует

$$|x(t) - x^*| < \varepsilon, \qquad |y(t)| < \varepsilon \qquad (\text{для } t \geqslant 0)$$

В свою очередь, для γ можно указать такое число $\eta > 0$, что из

$$|x(0) - x^*| < \eta, \qquad |y(0)| < \eta$$

следует

$$|x(t) - x^*| < \gamma, \qquad |y(t)| < \gamma \qquad (\text{для } t \geqslant 0)$$

Выбором достаточно большого номера N обеспечивается выполнение соотношений

$$|x^e - x^*| < \eta/2, \qquad S(x^e, \eta/2) \subset S(x^*, \eta)$$

$$S(x^*, \gamma) \subset S(x^e, \varepsilon), \qquad e \geqslant N$$

Поэтому для любого $e \geqslant N$ из

$$|x(0) - x^e| < \eta/2, \qquad |y(0)| < \eta/2$$

вытекает $|x(t) - x^e| < \varepsilon$, $|y(t)| < \varepsilon$ (для $t \geqslant 0$), т. е. $\sup X_\varepsilon(x^e) \geqslant \eta/2$ для $e \geqslant N$. Противоречие доказывает лемму.

Теорема 3. Пусть для всех допустимых c решение (2.1) устойчиво; существует такая y-определенно-положительная функция $V(y)$, что $\dot{V}_{(2.4)} \leqslant 0$. Тогда тривиальное решение системы (2.4) устойчиво.

Доказательство. Пусть

$$\beta = \inf_{x \in S(0, \varepsilon/2)} \sup X_{\varepsilon/2}(x)$$

На основании леммы $\beta \neq 0$. По β выбирается такое $\delta > 0$, что для всех $t \geqslant 0$, для которых $|x(t)| < \varepsilon / 2$, из условия

$$|x(0)| < \delta, \qquad |y(0)| < \delta$$

следует $|y(t)| < \beta$. Возможность выбора δ обусловлена знакоопределенностью $V(y)$ и неотрицательностью $V^{\cdot}_{(2.1)}$ (для всех x из достаточно малой окрестности нуля). Поэтому изображающая точка если и покинет сферу $S(0, \varepsilon / 2)$, то только за счет координаты x. Но тогда при некотором t^* будет $|x(t^*)| = \varepsilon / 2$ и $|y(t^*)| < \beta$. Решение $x \equiv x(t^*)$, $y \equiv 0$ устойчиво. По смыслу числа β следует $|x(t)| < \varepsilon$, $|y(t)| < \varepsilon / 2 < \varepsilon$ при $t \geqslant t^*$.

Теорему 3 можно применить для изучения устойчивости нулевого решения системы уравнений

$$dx/dt = y + \chi(x, y, z), \qquad dy/dt = \nu(x, y, z)$$
$$dz/dt = Gz + \zeta(x, y, z) \tag{2.5}$$

где x, y, $\chi(x, y, z)$, $\nu(x, y, z)$ и z, $\zeta(x, y, z)$ — векторы размерностей s и n, G — матрица Гурвица. Для $s = 1$ (2.5) подробно исследована Ляпуновым. В классе матриц первого приближения системы (2.5) легко указать примеры матриц, эквивалентных матрицам типа (1.3).

В работах [8–10] в предположении $\nu(x, 0, 0) \equiv 0$ некоторые результаты Ляпунова переносятся на случай $s > 1$. Без ограничения общности $\chi(x, 0, 0) \equiv 0$, $\zeta(x, 0, 0) \equiv 0$, $\nu(x, 0, z) \equiv 0$. Система (2.5) допускает решение $x \equiv c$, $y \equiv 0$, $z \equiv 0$. При некоторых допущениях можно сформулировать для (2.5) теоремы, аналогичные теоремам 2 и 3.

Автор благодарит В. В. Румянцева за ценные советы.

Поступила 22 IX 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.— Л., Гостехиздат, 1950.
2. Ляпунов А. М. Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения. Изд-во ЛГУ, 1963.
3. Румянцев В. В. Метод функций Ляпунова в теории устойчивости движения. В сб.: Механика в СССР за 50 лет т. 1, М., «Наука», 1968.
4. Арнольд В. И. Алгебраическая неразрешимость проблемы устойчивости и проблемы топологической классификации особых точек систем дифференциальных уравнений. Успехи матем. наук, 1970, т. 25, вып. 2.
5. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. М., «Наука», 1966.
6. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. М., «Наука, 1965.
7. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., «Наука», 1966.
8. Сагитов М. С., Филатов А. Н. Об устойчивости по Ляпунову в критическом случае, когда определяющее уравнение имеет четное число нулевых корней. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.
9. Нго Ван Вы онг. Об устойчивости движения в одном критическом случае. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.
10. Вейссенберг А. Н. Об одном преобразовании системы дифференциальных уравнений возмущенного движения в критическом случае с четным числом нулевых корней. Изв. вузов. Математика, 1968, № 11.