Приведем результаты численного счета. При $m_0 = 1$, $u_0 = 2$, $T = 3$ и при k, принимающем последовательно значения 1, 2, 3, 4, ∞, точные значения максимальной накопленной ошибки ε_∞: 5.30, 4.85, 4.71, 4.65, 4.54, а оценки, приведенные в [1], соответственно дают 6,84, 5,84, 5,50, 5,34, 4.84. Результаты счета для других значений параметров дают точные значения ε_∞, лежащие в пределах от 50 до 95% оценок, приведенных в [1].

4. Рассмотрим систему, в которой закон управления линеен: $v(\varepsilon) = k\varepsilon$. Для такой системы показано [3], что

$$\varepsilon_\infty = \frac{m_0}{k} \qquad \left(k < \frac{1}{4T}\right) \tag{4.1}$$

$$\varepsilon_\infty = \zeta(m_0, k, T), \qquad \zeta = \frac{m_0}{k} + 2\sqrt{\frac{T}{k}}\, m_0 \exp\left(-\frac{\pi - \psi}{2T\nu}\right)\left[1 - \exp\left(-\frac{\pi}{2T\nu}\right)\right]^{-1}$$

$$\psi = \operatorname{arctg}(2T\nu) \qquad \left(k \geqslant \frac{1}{4T}\right)$$

Разберем случай $k < 1/(4T)$. Здесь $|k\varepsilon| \leqslant m_0 < u_0$, т. е. добавление нелинейного ограничения (1.2) не влияет на работу системы. Отсюда для исходной нелинейной системы, описываемой (1.1), (1.2), при $k < 1/(4T)$ справедливо $\varepsilon_\infty = m_0 / k$ (4.1).

Разберем случай $k \geqslant 1/(4T)$. Здесь при $\zeta \leqslant u_0 / k$ по-прежнему $|k\varepsilon| \leqslant u_0$, и ε_∞ исходной нелинейной системы рассчитывается по формулам (4.1) для линейных систем, откуда видно, что ε_∞ монотонно уменьшается с ростом k. При $\zeta > u_0 / k$ система выходит на участок насыщения характеристики (1.2), и ε_∞ рассчитывается по указанному выше алгоритму. Просчитанные для разных значений k примеры позволяют и здесь надеяться на монотонное уменьшение ε_∞ с ростом k, хотя доказать это не удалось.

Поступила 26 V 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Гноенский Л. С. О точности некоторых нелинейных управляемых систем с ограничениями и запаздыванием. ПММ, 1970, т. 34, вып. 6.
2. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М., Физматгиз, 1959.
3. Гноенский Л. С., Каменский Г. А., Эльсгольц Л. Э. Математические основы теории управляемых систем. М., «Наука», 1969.

УДК 531.391.5

МЕТОД ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА В ЗАДАЧЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ

А. С. Озиранер, В. В. Румянцев

(Москва)

Постановка задачи об устойчивости движения по отношению к части переменных дана А. М. Ляпуновым ([1], стр. 370).

И. Г. Малкин [2] в примечаниях к теоремам Ляпунова указал (без доказательства) некоторые условия переноса теорем Ляпунова на случай устойчивости по части переменных.

В работе [3] введено понятие функции $V(t, x_1, \ldots, x_n)$, знакоопределенной относительно $x_1, \ldots, x_m$ $(m \leqslant n)$, и доказаны теоремы об устойчивости и асимптотической устойчивости по отношению к части переменных, обобщающие теоремы Ляпунова [1].

В последующем появился ряд работ [4–15], в которых обосновывалась возможность применения теорем второго метода Ляпунова (и их модификаций и обобщений) для задачи устойчивости по части переменных.

В литературе имеется ряд обзоров [16–19] по теории устойчивости движения, однако отсутствуют обзоры исследований устойчивости по отношению к части переменных. Попыткой восполнить этот пробел является предлагаемая работа, в которой дается обзор полученных к настоящему времени основных результатов в этой области. В работе введены единые обозначения и единообразные формулировки, которые не всегда совпадают по форме с авторскими, но полностью отражают их содержание.

§ 1. **Основные определения.** Рассмотрим систему дифференциальных уравнений возмущенного движения

$$x_i^{\cdot} = X_i(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

или в векторном виде

$$\mathrm{x}^{\cdot} = \mathrm{X}(t, \mathrm{x}), \qquad \mathrm{X}(t, 0) \equiv 0 \tag{1.1}$$

Будем заниматься вопросом об устойчивости невозмущенного движения $\mathrm{x} = 0$ по отношению к части переменных, для определенности,— по отношению к $x_1, \ldots, x_m$ ($m > 0$, $n = m + p$, $p \geqslant 0$). Для краткости обозначим эти переменные через $y_i = x_i$ ($i = 1, \ldots, m$), а остальные — через $z_j = x_{m+j}$ ($j = 1, \ldots, n - m = p$), т. е. $\mathrm{x} = (y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_p)$. Введем обозначения

$$\|y\| = \left(\sum_{i=1}^{m} y_i^2\right)^{1/2}, \quad \|\mathrm{z}\| = \left(\sum_{j=1}^{p} z_j^2\right)^{1/2}, \quad \|\mathrm{x}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} = (\|\mathrm{y}\|^2 + \|\mathrm{z}\|^2)^{1/2}$$

Предположим, что

а) правые части системы (1.1) в области

$$t \geqslant 0, \qquad \|y\| \leqslant H > 0, \qquad 0 \leqslant \|\mathrm{z}\| < +\infty \tag{1.2}$$

непрерывны и удовлетворяют условиям единственности решения;

б) решения системы (1.1) z-продолжимы; это означает [6], что любое решение $\mathrm{x}(t)$ определено для всех $t \geqslant 0$, при которых $\|\mathrm{y}(t)\| \leqslant H$.

Обозначим через $\mathrm{x} = \mathrm{x}(t; t_0, \mathrm{x}_0)$ решение системы (1.1), определенное начальными условиями $\mathrm{x}(t_0; t_0, \mathrm{x}_0) = \mathrm{x}_0$.

Определение 1. Движение $\mathrm{x} = 0$ называется:

а) устойчивым относительно $x_1, \ldots, x_m$ [1], или y-устойчивым, если для любых $\varepsilon > 0$, $t_0 \geqslant 0$, как бы мало ε ни было, найдется $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что из $\|\mathrm{x}_0\| < \delta$ следует $\|\mathrm{y}(t; t_0, \mathrm{x}_0)\| < \varepsilon$ при всяком $t \geqslant t_0$;

б) y-устойчивым равномерно по t_0 [5, 6, 9], если в определении 1 — а) для каждого $\varepsilon > 0$ можно выбрать $\delta(\varepsilon)$ не зависящим от t_0;

в) асимптотически y-устойчивым [3, 5, 6, 9], если оно y-устойчиво, и для каждого $t_0 \geqslant 0$ существует $\Delta(t_0) > 0$ такое, что решение $\mathrm{x}(t; t_0, \mathrm{x}_0)$ с $\|\mathrm{x}_0\| < \Delta$ удовлетворяет условию

$$\lim_{t \to \infty} \|y(t; t_0, \mathrm{x}_0)\| = 0 \tag{1.3}$$

(при этом будем говорить, что область $\|\mathrm{x}\| < \Delta$ лежит в области y-притяжения точки $\mathrm{x} = 0$ для начального момента t_0);

г) асимптотически y-устойчивым равномерно по $\{t_0, \mathrm{x}_0\}$ [5, 6, 9], если оно y-устойчиво равномерно по t_0 и существует не зависящее от t_0 число $\Delta_0 > 0$ такое, что условие (1.3) выполняется равномерно по $\{t_0, \mathrm{x}_0\}$ из области

$$t_0 \geqslant 0, \qquad \|\mathrm{x}_0\| < \Delta_0$$

т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется $T(\varepsilon) > 0$ такое, что из $t_0 \geqslant 0$, $\|\mathrm{x}_0\| < \Delta_0$ следует $\|\mathrm{y}(t; t_0, \mathrm{x}_0)\| < \varepsilon$ для всех $t \geqslant t_0 + T$;

д) асимптотически y-устойчивым в целом [9], если оно y-устойчиво и условие (1.3) выполняется для любых $t_0 \geqslant 0$ и x_0, т. е. если областью y-притяжения точки $x = 0$ является все пространство; при этом предполагается, что правые части системы (1.1) удовлетворяют указанным для них условиям а) и б) в области

$$t \geqslant 0, \qquad 0 \leqslant \|x\| < +\infty \tag{1.4}$$

е) экспоненциально-асимптотически y-устойчивым [11], если существуют постоянные $M > 0$ и $\alpha > 0$ такие, что

$$\|y(t;\ t_0,\ x_0)\| \leqslant M(\|y_0\| + \|z_0\|)\exp[-\alpha(t - t_0)], \qquad t \geqslant t_0 \geqslant 0 \tag{1.5}$$

Будем рассматривать некоторые вещественные однозначные функции $V(t,\ x)$, непрерывные и обладающие непрерывными частными производными $\partial V / \partial t$, $\partial V / \partial x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ в области (1.2), удовлетворяющие условию $V(t, 0) \equiv 0$, а также их полные производные по времени $V^{\cdot}(t, x)$, взятые в силу системы (1.1)

$$V^{\cdot}(t,\ x) = \frac{\partial V(t,\ x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(t,\ x)}{\partial x_i} X_i(t,\ x)$$

Определение 2. Функция $W(y_1, \ldots, y_m) \equiv W(y)$, не зависящая явно от времени, называется определенно-положительной [1], если в области $\|y\| \leqslant H$ она неотрицательна и обращается в нуль тогда и только тогда, когда $y = 0$. Функция $V(t,\ x)$ называется y-определенно-положительной [3], если существует такая не зависящая явно от t определенно-положительная функция $W(y)$, что в области (1.2)

$$V(t,\ x) \geqslant W(y) \tag{1.6}$$

Лемма 1. Функция $V(t,\ x)$ является y-определенно-положительной тогда и только тогда, когда существует непрерывная монотонно-возрастающая при $r \in [0,\ H]$ функция $a(r)$, $a(0) = 0$ такая, что в области (1.2) [5, 6, 9]

$$V(t,\ x) \geqslant a(\|y\|) \tag{1.7}$$

Доказательство. Достаточность неравенства (1.7) очевидна. Докажем необходимость. Положим $b(r) = \min[W(y):\ \|y\| = r]$. Тогда $V(t,\ x) \geqslant b(\|y\|)$, причем $b(r)$ непрерывна в силу непрерывности W. Если $b(r)$ монотонно возрастает на $[0,\ H]$, то примем $a(r) = b(r)$, в противном случае можно взять $a(r) = \varphi(r)\min[b(s):\ r \leqslant s \leqslant H]$, где $\varphi(r)$ — монотонно возрастающая на $[0,\ H]$ функция, причем $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$.

Из леммы 1 следует, что неравенства (1.6) и (1.7) эквивалентны.

Определение 3. Функция $V(t,\ x)$ называется y-определенно-положительной в области (1.4), если неравенство (1.6) выполнено во всей этой области, и для любого $\varepsilon > 0$

$$\inf[W(y):\ \varepsilon \leqslant \|y\| < \infty] > 0$$

Это определение эквивалентно неравенству (1.7) с монотонно возрастающей при $r \in [0,\ \infty)$ функцией $a(r)$, что доказывается аналогично лемме 1.

Определение 4. Функция $V(t,\ x)$ называется определенно-положительной по $x_1, \ldots, x_k$, $m \leqslant k \leqslant n$, (для задачи об y-устойчивости), если в области (1.2) $V(t,\ x) \geqslant W(x_1, \ldots, x_k)$, причем $W(0, \ldots, 0) = 0$ и для любого $\varepsilon > 0$

$$\inf\left[W(x_1, \ldots, x_k):\quad \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \geqslant \varepsilon^2, \quad \|y\| \leqslant H\right] > 0$$

Нетрудно показать, что справедлива

Лемма 2. Определение 4 эквивалентно выполнению в области (1.2) неравенства

$$V(t,\ x) \geqslant a\left(\left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2\right)^{1/2}\right)$$

с монотонно возрастающей при $r \in [0,\ \infty)$ непрерывной функцией $a(r)$, $a(0) = 0$.

Определение 5. Функция $V(t, \mathbf{x})$ допускает бесконечно малый высший предел по $x_1, \ldots, x_k$, $m \leqslant k \leqslant n$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$, такое, что из

$$t \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{k} x_i^2 < \delta^2, \quad -\infty < x_{k+1}, \ldots, x_n < +\infty$$

следует $|V(t, \mathbf{x})| < \varepsilon$.

Это означает, что

$$V(t, \mathbf{x}) \to 0 \qquad \text{при } \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \to 0$$

равномерно по $t \geqslant 0$ и $-\infty < x_{k+1}, \ldots, x_n < +\infty$.

Лемма 3. Функция $V(t, \mathbf{x})$ допускает бесконечно малый высший предел по $\mathbf{y}$ (по $x_1, \ldots, x_k$, $m \leqslant k \leqslant n$) тогда и только тогда, когда существует функция $b(r)$ того же типа, что и $a(r)$ в лемме 1, для которой в области (1.2) [20]

$$|V(t, \mathbf{x})| \leqslant b(\|\mathbf{y}\|) \tag{1.8}$$

соответственно

$$|V(t, \mathbf{x})| \leqslant b\left(\left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2\right)^{1/2}\right) \tag{1.9}$$

В частности, $V(t, \mathbf{x})$ допускает бесконечно малый высший предел по $\mathbf{x}$ тогда и только тогда, когда

$$|V(t, \mathbf{x})| \leqslant b(\|\mathbf{x}\|) \tag{1.10}$$

§ 2. **Устойчивость и неустойчивость.** 1. *Теорема* 1. 1) Если система (1.1) такова, что существует функция $V(t, \mathbf{x})$, удовлетворяющая неравенству (1.7), а $V^{\cdot} \leqslant 0$, то движение $\mathbf{x} = 0$ $\mathbf{y}$-устойчиво [3].

2) Если, кроме того, V удовлетворяет неравенству (1.10) то $\mathbf{y}$-устойчивость равномерна по t_0 [5].

3) Если выполнены условия п.1) и V удовлетворяет неравенству (1.8), то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\eta(\varepsilon) > 0$ такое, что из $t_0 \geqslant 0$, $\|\mathbf{y}_0\| < \eta$ $(0 \leqslant \|\mathbf{z}_0\| < \infty)$ следует $\|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$ для всех $t \geqslant t_0$ [8]; при этом необходимо выполняются тождества [12]

$$X_i(t, 0, \mathbf{z}) \equiv 0 \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{2.1}$$

Доказательство. 1) Для всяких $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < H)$, $t_0 \geqslant 0$ можно найти $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что из $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$ следует $V(t_0, \mathbf{x}_0) < a(\varepsilon)$. Для решения $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ с $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$ в силу $V^{\cdot} \leqslant 0$ из соотношения

$$V(t, \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)) = V(t_0, \mathbf{x}_0) + \int_{t_0}^{t} V^{\cdot}(\tau, \mathbf{x}(\tau; t_0, \mathbf{x}_0))\, d\tau \tag{2.2}$$

получаем $V(t, \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)) \leqslant V(t_0, \mathbf{x}_0)$ для $t \geqslant t_0$. Итак

$$a(\|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\|) \leqslant V(t, \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)) \leqslant V(t_0, \mathbf{x}_0) < a(\varepsilon) \tag{2.3}$$

откуда $\|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$ при всех $t \geqslant t_0$.

2) При выполнении неравенства (1.10) можно выбрать $\delta(\varepsilon) = b^{-1}(a(\varepsilon))$, не зависящим от t_0 (b^{-1} — функция, обратная к b). Если $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$, то

$$V(t_0, \mathbf{x}_0) \leqslant b(\|\mathbf{x}_0\|) < b(b^{-1}(a(\varepsilon))) = a(\varepsilon)$$

3) Для каждого $\varepsilon > 0$ положим $\eta(\varepsilon) = b^{-1}(a(\varepsilon))$. Если $t_0 \geqslant 0$, $\|\mathbf{y}_0\| < \eta$, то $V(t_0, \mathbf{x}_0) < a(\varepsilon)$, и имеет место (2.3), откуда $\|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$ при $t \geqslant t_0$.

Докажем тождества (2.1). Рассмотрим решение $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t;\ t_0, 0, \mathbf{z}_0)$ при произвольных $t_0 \geqslant 0$ и $\mathbf{z}_0$. В силу (1.8) $V(t_0, 0, \mathbf{z}_0) = 0$. Поскольку $V \geqslant 0$, а $V^{\cdot} \leqslant 0$, из (2.2) следует $V(t, \mathbf{x}(t;\ t_0, 0, \mathbf{z}_0)) \equiv 0$, откуда

$$\| \mathbf{y}(t;\ t_0,\ 0,\ \mathbf{z}_0) \| \equiv 0 \qquad (2.4)$$

Равенство (2.4) эквивалентно тождествам (2.1) [1]. Теорема доказана.

Замечание. Требование бесконечно малого высшего предела функции V влечет за собой, как и в классическом случае [20], равномерность у-устойчивости. Аналогичный вывод имеет место и в случае асимптотической у-устойчивости.

В работе [3] показана возможность применения для задачи у-устойчивости метода Четаева [21] построения функции V в виде связки интегралов системы (1.1).

Теорема 2. [9] Если существует функция $V(t, \mathbf{x})$, удовлетворяющая неравенству (1.7), а ее производная

$$V^{\cdot}(t, \mathbf{x}) \leqslant -c(\| \mathbf{y} \|) \qquad (2.5)$$

$c(r)$ — функция типа $a(r)$, то для любых $\varepsilon \in (0, H)$, $t_0 \geqslant 0$ найдутся $\delta(t_0) > 0$ и $T(t_0, \varepsilon) > 0$ такие, что при всяком $\mathbf{x}_0$ с $\| \mathbf{x}_0 \| < \delta$ существует момент $t_* \in (t_0, t_0 + T)$, для которого $\| \mathbf{y}(t_*;\ t_0, \mathbf{x}_0) \| < \varepsilon$.

Доказательство. Согласно п.1) теоремы 1, для каждого $t_0 \geqslant 0$ существует $\delta(t_0) > 0$ такое, что из $\| \mathbf{x}_0 \| < \delta$ следует $\| \mathbf{y}(t;\ t_0, \mathbf{x}_0) \| < H$ при всех $t \geqslant t_0$. Пусть $\lambda(t_0) = \sup [V(t_0, \mathbf{x}): \| \mathbf{x} \| < \delta]$. Положим $T(t_0, \varepsilon) = \lambda(t_0) / c(\varepsilon)$. Если $\varepsilon \leqslant \| \mathbf{y}(t;\ t_0, \mathbf{x}_0) \| < H$ при $t \in (t_0, t_0 + T)$, то из (2.2) вытекает

$$0 < a(\varepsilon) \leqslant V(t_0 + T, \mathbf{x}(t_0 + T;\ t_0, \mathbf{x}_0)) \leqslant V(t_0, \mathbf{x}_0) - c(\varepsilon) T \leqslant 0$$

что невозможно. Теорема доказана.

Рассмотрим некоторые обобщения изложенных результатов.

2. *Теорема* 3. [5]. 1) Если существует функция $V(t, \mathbf{x})$, обладающая свойствами

а) $V(t, 0) \equiv 0$, $V(t, \mathbf{x})$ непрерывна в точке $\mathbf{x} = 0$;

б) V удовлетворяет неравенству (1.7);

в) $V(t, \mathbf{x}(t;\ t_0\, \mathbf{x}_0))$ не возрастает на любом решении $\mathbf{x}(t;\ t_0, \mathbf{x}_0)$, пока $\| \mathbf{y}(t;\ t_0, \mathbf{x}_0) \| \leqslant H$, то движение $\mathbf{x} = 0$ у-устойчиво.

2) Если, кроме того, V удовлетворяет неравенству (1.10), то у-устойчивость равномерна по t_0.

Для доказательства заметим, что из условия в) следует $V(t, \mathbf{x}(t;\ t_0, \mathbf{x}_0)) \leqslant V(t_0, \mathbf{x}_0)$. В остальном доказательство совпадает с доказательством п.1), 2) теоремы 1.

Для второй части теоремы справедливо обратное утверждение

Теорема 4 [5]. Если движение $\mathbf{x} = 0$ у-устойчиво равномерно по t_0, то существует функция $V(t, \mathbf{x})$, удовлетворяющая условиям п.2) теоремы 3.

Доказательство. Положим $V(t, \mathbf{x}) = \sup [\| \mathbf{y}(t + \sigma;\ t, \mathbf{x}) \|: \sigma \geqslant 0]$. Очевидно, $V(t, \mathbf{x}) \geqslant \| \mathbf{y} \|$ и $V(t, \mathbf{x}) \leqslant \varepsilon(\| \mathbf{x} \|)$ (ε взято из определения равномерной у-устойчивости). Далее имеем

$$V(t, \mathbf{x}(t;\ t_0, \mathbf{x}_0)) = \sup_{\sigma \geqslant 0} \| \mathbf{y}(t + \sigma;\ t, \mathbf{x}(t;\ t_0, \mathbf{x}_0)) \| = \sup_{\sigma \geqslant 0} \| \mathbf{y}(t + \sigma;\ t_0, \mathbf{x}_0) \|$$

Здесь использована единственность решения

$$\mathbf{x}(t;\ \tau, \mathbf{x}(\tau;\ t_0, \mathbf{x}_0)) = \mathbf{x}(t;\ t_0, \mathbf{x}_0) \qquad (2.6)$$

Пусть $t_1 > t_2 \geqslant t_0$, тогда

$$V(t_1, \mathbf{x}(t_1;\ t_0, \mathbf{x}_0)) = \sup [\| \mathbf{y}(t_1 + \sigma;\ t_0, \mathbf{x}_0) \|: \sigma \geqslant 0] \leqslant$$
$$\leqslant \sup [\| \mathbf{y}(t_2 + \sigma;\ t_0, \mathbf{x}_0) \|: \sigma \geqslant 0] = V(t_2, \mathbf{x}(t_2;\ t_0, \mathbf{x}_0))$$

Итак, $V(t, \mathbf{x}(t;\ t_0, \mathbf{x}_0))$ не возрастает. Теорема доказана.

[1] Подставляя решение $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t;\ t_0, 0, \mathbf{z}_0)$ в систему (1.1), учитывая (2.4) и произвольность $t_0 \geqslant 0$ и $\mathbf{z}_0$, получаем (2.1). Обратное вытекает из единственности решения.

3. Несколько иной подход к изучению y-устойчивости предложен В. И. Зубовым [4]. Пусть заранее известны оценки (сколь угодно грубые)

$$|z_j(t;\,t_0,\,x_0)| \leqslant \eta_j(t;\,t_0,\,x_0)\,A_j(t) \qquad (j=1,\ldots,p) \tag{2.7}$$

причем $\eta_j \to 0$ при $\|x_0\| \to 0$ равномерно по $t \in [t_0, \infty)$, а $A_j(t)$ — непрерывно дифференцируемые при $t \geqslant 0$ положительные функции. Сделаем в системе (1.1) замену переменных

$$\xi_i = x_i, \quad \xi_j A_j = x_j \quad (i=1,\ldots,m;\; j=m+1,\ldots,n) \tag{2.8}$$

при этом ξ_i будут удовлетворять системе уравнений

$$\xi_i^{\boldsymbol\cdot} = X_i(t,\,\xi_1,\ldots,\xi_m,\,\xi_{m+1}A_{m+1},\ldots,\xi_nA_n) \qquad (i=1,\ldots,m) \tag{2.9}$$

$$\xi_j^{\boldsymbol\cdot} = [-A_j^{\boldsymbol\cdot}\xi_j + X_j(t,\,\xi_1,\ldots,\xi_m,\,\xi_{m+1}A_{m+1},\ldots,\xi_nA_n)]\,/\,A_j \qquad (j=m+1,\ldots,n)$$

Очевидна следующая

Лемма 4. y-устойчивость движения $x = 0$ системы (1.1) эквивалентна устойчивости по Ляпунову движения $\xi = 0$ системы (2.9).

Теорема 5. [4]. Для равномерной по t_0 y-устойчивости движения $x = 0$ системы (1.1) необходимо и достаточно существование функции $V(t, x)$, удовлетворяющей условиям:

а) $V(t, x)$ определена в области

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^2 + \sum_{j=m+1}^{n} (x_j\,/\,A_j)^2 \leqslant r^2 > 0, \qquad t \geqslant 0$$

б) для любого $C_1 > 0$ найдется $C_2 > 0$ такое, что из

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^2 > C_1^2, \qquad \sum_{j=m+1}^{n} (x_j\,/\,A_j)^2 > C_1^2$$

следует $V(t, x) > C_2$ $(C_1^2 < r^2\,/\,2)$;

в) для любого $\gamma_1 > 0$ найдется $\gamma_2 > 0$ такое, что $V(t, x) < \gamma_1$, если только

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^2 < \gamma_2^2, \qquad \sum_{j=m+1}^{n} (x_j\,/\,A_j)^2 < \gamma_2^2$$

г) функция V не возрастает вдоль решений системы (1.1), на которых она еще определена.

Доказательство. 1) *Достаточность.* При замене аргументов функции $V(t, x)$ по формулам (2.8) получается функция $V(t, \xi)$, удовлетворяющая условиям теоремы В. И. Зубова ([4], стр. 29), поэтому движение $\xi = 0$ системы (2.9) устойчиво равномерно по t_0. В силу леммы 4 движение $x = 0$ системы (1.1) y-устойчиво равномерно по t_0.

2) *Необходимость.* Из равномерной по t_0 y-устойчивости движения $x = 0$ системы (1.1) вытекает, согласно лемме 4, что движение $\xi = 0$ системы (2.9) устойчиво равномерно по t_0. Взяв для системы (2.9) функцию $V(t, \xi)$, согласно теореме ([4], стр. 29) и заменив ее аргументы по формулам (2.8), получим требуемую функцию $V(t, x)$. Теорема доказана.

Следствие [4]. Если оценки (2.7) заранее не известны, но существует функция V, удовлетворяющая условиям теоремы 5 (в которой теперь $A_j(t)$ — какие-то непрерывно дифференцируемые положительные при $t \geqslant 0$ функции), то движение $x = 0$ системы (1.1) y-устойчиво равномерно по t_0, и имеют место оценки (2.7).

4. Пусть $V(t, x)$ удовлетворяет дифференциальному неравенству [6, 22]

$$V^{\boldsymbol\cdot}(t, x) \leqslant \omega(t,\, V(t, x)) \tag{2.10}$$

в котором $\omega(t, v)$ — непрерывная при $t \geqslant 0$, $v \geqslant 0$ функция, причем уравнение сравнения

$$v^{\cdot} = \omega(t, v) \qquad (\omega(t, 0) \equiv 0) \tag{2.11}$$

имеет единственное решение $v = v(t;\ t_0,\ v_0)$, удовлетворяющее начальному условию $v(t_0; t_0, v_0) = v_0$ для каждой точки (t_0, v_0) области определения.

Теорема 6 [6]. Если существует функция $V(t, \mathrm{x})$, удовлетворяющая неравенствам (1.7) и (2.10), и, кроме того

1) решение $v = 0$ уравнения (2.11) устойчиво, то движение $\mathrm{x} = 0$ системы (1.1) y-устойчиво;

2) V удовлетворяет неравенству (1.10), и решение $v = 0$ уравнения (2.11) устойчиво равномерно по t_0, то движение $\mathrm{x} = 0$ y-устойчиво равномерно по t_0.

Доказательство. Из (2.10) следует [23], что при $V(t_0, \mathrm{x}_0) \leqslant v_0$

$$V(t, \mathrm{x}(t;\ t_0, \mathrm{x}_0)) \leqslant v(t;\ t_0, v_0), \qquad t \geqslant t_0 \tag{2.12}$$

1) Для любых $\varepsilon > 0$, $t_0 \geqslant 0$ в силу устойчивости решения $v = 0$ существует $\eta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что из $v_0 < \eta$ следует $v(t;\ t_0,\ v_0) < a(\varepsilon)$ для всех $t \geqslant t_0$. Пусть $\delta(\eta, t_0) = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ таково, что $V(t_0, \mathrm{x}_0) < \eta$, если $\|\mathrm{x}_0\| < \delta$. Тогда из (2.12) и (1.7) следует при $t \geqslant t_0$, $\|\mathrm{x}_0\| < \delta$

$$a(\|\mathrm{y}(t;\ t_0, \mathrm{x}_0)\|) \leqslant V(t, \mathrm{x}(t;\ t_0, \mathrm{x}_0)) \leqslant v(t;\ t_0, v_0) < a(\varepsilon)$$

откуда $\|\mathrm{y}(t;\ t_0, \mathrm{x}_0)\| < \varepsilon$.

2) В этом случае $\eta(\varepsilon) > 0$ не зависит от t_0; но тогда и $\delta(\varepsilon) = b^{-1}(\eta(\varepsilon))$ не зависит от t_0. Теорема доказана.

Для первой части теоремы 6 справедливо обратное утверждение. Наряду с системой (1.1) рассмотрим систему [12]

$$\mathrm{x}^{*\cdot} = \mathrm{X}(t, \mathrm{x}^*)\,\varphi(\mathrm{y}^*) \equiv \mathrm{X}^*(t, \mathrm{x}^*) \tag{2.13}$$

в которой φ — скалярная непрерывно-дифференцируемая функция, $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, и

$$\varphi(\mathrm{y}^*) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \|\mathrm{y}^*\| \leqslant h \\ 0 & \text{при} \quad h < H_1 \leqslant \|\mathrm{y}^*\| \leqslant H \end{cases}$$

Пусть $\mathrm{x}^* = \mathrm{x}^*(t;\ t_0,\ \mathrm{x}_0^*)$ — решение системы (2.13) с начальными условиями $\mathrm{x}^*(t_0;\ t_0,\ \mathrm{x}_0^*) = \mathrm{x}_0^*$. Предположим, что решения системы (2.13) z*-продолжимы.

Обозначим через $V_{(1)}^{\cdot}$ и $V_{(2)}^{\cdot}$ производные от функции V в силу систем (1.1) и (2.13) соответственно. Эти системы совпадают в области

$$t \geqslant 0, \quad \|\mathrm{y}\| \leqslant h, \quad 0 \leqslant \|\mathrm{z}\| < \infty \tag{2.14}$$

В области (2.14) функция $V(t, \mathrm{x})$ ищется среди решений функционального уравнения [6]

$$V_{(1)}^{\cdot}(t, \mathrm{x}) \equiv V_{(2)}^{\cdot}(t, \mathrm{x}) = \omega(t, V(t, \mathrm{x})) \tag{2.15}$$

Предположим, что существуют непрерывные производные $\partial\omega / \partial v$, $\partial X_i / \partial x_j$ $(i, j = 1, \ldots, n)$. Решение уравнения (2.15), удовлетворяющее условию $V(0, \mathrm{x}) = \mu(\mathrm{x})$ (μ — дифференцируемая функция), дается формулой [6]

$$V(t, \mathrm{x}) = v(t;\ 0,\ \mu(\mathrm{x}^*(0;\ t,\ \mathrm{x}))) \tag{2.16}$$

В силу дифференцируемости решений системы (2.13) и уравнения (2.11) по начальным условиям, V имеет непрерывные производные $\partial V / \partial t$, $\partial V / \partial x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ [1]. Пусть функция ω удовлетворяет условию

---

[1] Если отказаться от гладкости упомянутых функций, то V окажется не дифференцируемой, но будет существовать [6] производная $dV(t, \mathrm{x}(t;\ t_0, \mathrm{x}_0)) / dt$.

А) все решения уравнения (2.11) определены при $t \in [0, \infty)$, и функция $v(t; 0, v_0)$ определенно-положительна

$$v(t; 0, v_0) \geqslant \lambda(v_0) \tag{2.17}$$

Теорема 7 [6]. Если движение $x = 0$ системы (1.1) y-устойчиво, то для любой функции ω, удовлетворяющей условию А), существует функция $V(t, x)$, удовлетворяющая неравенству (1.7) и уравнению (2.15).

Доказательство. Достаточно доказать, что при надлежащем выборе функции $\mu(x)$ определенная формулой (2.16) функция V будет удовлетворять неравенству (1.7). Пусть $\mu(x)$ такова, что

$$\mu(x) \geqslant \mu^*(\|x\|) \tag{2.18}$$

Методом К. П. Персидского [24, 25] можно показать [12], что из условия y-устойчивости движения $x = 0$ следует

$$\|x^*(0; t, x)\| \geqslant \nu(\|y\|)\ ^1 \tag{2.19}$$

Из (2.17) — (2.19) вытекает (1.7) с $a(r) = \lambda(\mu^*(\nu(r)))$. Теорема доказана.

5. Рассмотрим применение вектор-функции V. Полученные в [26] результаты для $m = n$ переносятся (без доказательства) на случай $m < n$ в работе [9].

Пусть ω, ψ, f — векторы k-мерного пространства R^k. Пишут $\omega \leqslant \psi$, если $\omega_i \leqslant \psi_i$ $(i = 1, \ldots, k)$. По определению функция $f_s(t, \omega)$ не убывает по $\omega_1, \ldots, \omega_{s-1}, \omega_{s+1}, \ldots, \omega_k$, если $f_s(t, \omega^*) \leqslant f_s(t, \omega^{**})$ при $\omega_s^* = \omega_s^{**}$, $\omega_i^* \leqslant \omega_i^{**}$ $(i = 1, \ldots, s-1, s+1, \ldots, k)$.

Вводятся условия

I. Существует вектор-функция $V = (V_1, \ldots, V_k)$ такая, что

1) V и V˙ непрерывны, $V(t, 0) \equiv \dot V(t, 0) \equiv 0$;

2) для некоторого l, $1 \leqslant l \leqslant k$, $V_1 \geqslant 0, \ldots, V_l \geqslant 0$, а

$$V_1(t, x) + \ldots + V_l(t, x) \geqslant a(\|y\|) \tag{2.20}$$

3) производная V˙ удовлетворяет неравенству

$$\dot V(t, x) \leqslant f(t, V(t, x))$$

II. 1) Вектор-функция $f(t, V)$ определена и непрерывна в области

$$t \geqslant 0, \qquad \|V\| < R$$

где $R = \infty$ или $R > \sup[\|V(t, x)\| : t \geqslant 0, \|y\| \leqslant H]$;

2) Каждая из функций f_s $(s = 1, \ldots, k)$ не убывает по $V_1, \ldots, V_{s-1}, V_{s+1}, \ldots, V_k$;

3) $f(t, 0) \equiv 0$.

III. Пусть $\alpha = (\omega_1, \ldots, \omega_l)$. Рассмотрим систему сравнения

$$\dot\omega = f(t, \omega) \tag{2.21}$$

При условии $\omega_{10} \geqslant 0, \ldots, \omega_{l0} \geqslant 0$ решение $\omega = 0$ системы (2.21)

1) α-устойчиво;

2) α-устойчиво равномерно по t_0;

3) асимптотически α-устойчиво;

4) асимптотически α-устойчиво равномерно по $\{t_0, \omega_0\}$.

IV. $V(t, x) \to 0$ при $x \to 0$ равномерно по $t \geqslant 0$.

Теорема 8. [9]. 1) Если выполнены условия I, II и III—1), то движение $x = 0$ y-устойчиво.

2) Если выполнены условия I, II, III—2) и IV, то движение $x = 0$ y-устойчиво равномерно по t_0.

---

1 $\lambda(r)$, $\mu^*(r)$ и $\nu(r)$ — функции типа $a(r)$.

Доказательство [26]. 1) Для любых $\varepsilon > 0$, $t_0 \geqslant 0$ найдется $\lambda(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что из

$$\sum_{s=1}^{k} |\omega_{s0}| < \lambda$$

(при $\omega_{10} \geqslant 0, \ldots, \omega_{l0} \geqslant 0$) следует

$$\sum_{s=1}^{l} |\omega_s(t; t_0, \omega_0)| < a(\varepsilon)\ ^1$$

для всех $t \geqslant t_0$. В силу II—2) применима теорема Важевского [23], согласно которой существует верхнее решение $\omega^+(t; t_0, \omega_0)$ с теми же начальными условиями, удовлетворяющее при $t \geqslant t_0$ неравенству

$$\sum_{s=1}^{l} |\omega_s^+(t; t_0, \omega_0)| < a(\varepsilon)$$

По λ и t_0 можно подобрать $\delta(\lambda, t_0) = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ так, что из $\| x_0 \| < \delta$ следует

$$\sum_{j=1}^{k} |V_j(t_0, x_0)| < \lambda$$

Покажем, что $\| y(t; t_0, x_0) \| < \varepsilon$ при $t \geqslant t_0$, если $\| x_0 \| < \delta$. Допустим, что существуют $t_* > t_0$ и x_* с $\| x_* \| < \delta$, для которых $\| y(t; t_0, x_*) \| < \varepsilon$ при $t \in [t_0, t_*)$, но

$$\| y(t_*; t_0, x_*) \| = \varepsilon \qquad (2.22)$$

Положим $\omega_* = V(t_0, x_*)$ (при этом $\omega_{1*} \geqslant 0, \ldots, \omega_{l*} \geqslant 0$). По выбору δ

$$\sum_{s=1}^{k} |\omega_{s*}| < \lambda$$

следовательно, при $t \in [t_0, t_*] \subset [t_0, \infty)$

$$\sum_{s=1}^{l} |\omega_s^+(t; t_0, \omega_*)| < a(\varepsilon)$$

Функции $V_s(t, x(t; t_0, x_*))$ непрерывно дифференцируемы по t на $[t_0, t_* + \Delta t)$ ($\Delta t > 0$ — достаточно мало). В силу I—3)

$$V^\bullet_{\ge}(t, x(t; t_0, x_*)) \leqslant f(t, V(t, x(t; t_0, x_*)))$$

тогда, согласно теореме Важевского [23]

$$V_s(t, x(t; t_0, x_*)) \leqslant \omega_s^+(t; t_0, \omega_*)$$

Отсюда

$$a(\| y(t; t_0, x_*) \|) \leqslant \sum_{s=1}^{l} V_s(t, x(t; t_0, x_*)) \leqslant \sum_{s=1}^{l} \omega_s^+(t; t_0, \omega_*) < a(\varepsilon) \qquad (2.23)$$

Следовательно, $\| y(t; t_0, x_0) \| < \varepsilon$ для всех $t \in [t_0, t_*]$, что при $t = t_*$ противоречит равенству (2.22).

2) В этом случае λ и δ могут быть выбраны не зависящими от t_0. Теорема доказана.

---

[1] $\omega = \omega(t; t_0, \omega_0)$ — решение системы (2.21), удовлетворяющее начальным условиям $\omega(t_0; t_0, \omega_0) = \omega_0$.

6. В задаче сохранения устойчивости по части переменных [6] наряду с системой (1.1) рассматривается система

$$\mathbf{x}^{\cdot} = \mathbf{X}(t, \mathbf{x}) + \mathbf{R}(t, \mathbf{x}) \qquad (\mathbf{R}(t, 0) \equiv 0) \tag{2.24}$$

удовлетворяющая тем же условиям, что и система (1.1). Пусть $V_{(1)}^{\cdot}$ и $V_{(2)}^{\cdot}$ — производные от функции V в силу (1.1) и (2.24).

Теорема 9 [6]. Если функция $V(t, \mathbf{x})$ удовлетворяет неравенству (1.7) и условию Липшица

$$|V(t, \mathbf{x}_1) - V(t, \mathbf{x}_2)| \leqslant L \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| \tag{2.25}$$

а $V_{(1)}^{\cdot} \leqslant 0$, то можно найти такую функцию $d(r)$ (типа $a(r)$), что из неравенств

$$\|\mathbf{R}(t, \mathbf{x})\| \leqslant \varphi(t)\, d(\|\mathbf{y}\|) \tag{2.26}$$

$$\int\limits_0^\infty \varphi(t)\, dt < +\infty \tag{2.27}$$

следует равномерная по t_0 y-устойчивость движения $\mathbf{x} = 0$ системы (2.24).

Доказательство. В силу п. 2) теоремы 1 движение $\mathbf{x} = 0$ системы (1.1) y-устойчиво равномерно по t_0 и можно говорить о сохранении устойчивости. Из (2.25) и (2.26) следует

$$V_{(2)}^{\cdot}(t, \mathbf{x}) \leqslant V_{(1)}^{\cdot}(t, \mathbf{x}) + L\varphi(t)\, d(\|\mathbf{y}\|) \leqslant L\varphi(t)\, d(\|\mathbf{y}\|) \tag{2.28}$$

откуда в силу (1.7) $V_{(2)}^{\cdot}(t, \mathbf{x}) \leqslant L\, \varphi(t)\, d(a^{-1}(V(t, \mathbf{x})))$. Если функция $d(a^{-1}(r)) = \rho(r)$ такова, что

$$\int\limits_0 \frac{dr}{\rho(r)} = +\infty$$

то решение $v = 0$ уравнения $v^{\cdot} = L\, \varphi(t)\, \rho(v)$ устойчиво равномерно по t_0. Отсюда вытекает требуемый результат, если положить, например, $d(r) = a(r)$.

7. Для того, чтобы обнаружить y-неустойчивость движения $\mathbf{x} = 0$ системы (1.1), достаточно заметить всего одну траекторию, выходящую на поверхность $\|\mathbf{y}\| = H$, при сколь угодно малых $\|\mathbf{x}_0\|$ [21].

Множество точек $(t, \mathbf{x})$ из области (1.2), для которых $V(t, \mathbf{x}) > 0$, называется областью $V > 0$ [21].

Определение 6 [21]. Функция $U(t, \mathbf{x})$ называется определенно-положительной в области $V > 0$, если для любого $\varepsilon > 0$, как бы мало оно ни было, существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всякой точки $(t, \mathbf{x})$ из области (1.2), удовлетворяющей условию $V(t, \mathbf{x}) \geqslant \varepsilon$, будет выполнено неравенство $U(t, \mathbf{x}) \geqslant \delta$.

Как отмечалось в [3, 14], теорема Четаева [21] о неустойчивости может с успехом применяться в задаче об y-неустойчивости:

Теорема 10 [21]. Если функция $V(t, \mathbf{x})$ ограничена в области $V > 0$, существующей при любом $t \geqslant 0$ и для сколь угодно малых $\|\mathbf{x}\|$, а $V^{\cdot}$ — функция, определенно-положительная в области $V > 0$, то движение $\mathbf{x} = 0$ y-неустойчиво.

Формулировка и доказательство этой теоремы совпадают с теоремой Четаева [21]; отличие лишь в том, что в [21] рассматривается область $t \geqslant 0$, $\|\mathbf{x}\| \leqslant H > 0$, а в теореме 10 (и в определении 6) — область (1.2). Условия теоремы 10 обеспечивают выход соответствующих решений из области (1.2) за время, не превышающее [21] $(L - V_0) / l'$, начиная с момента t_0. Поскольку это время — конечно, то (см. условие б) из § 1) решения выходят на поверхность $\|\mathbf{y}\| = H$.

Замечание. Теорема 10 остается справедливой [14], если функция, удовлетворяющая условиям теоремы 10, есть $V = V(t, \mathbf{y})$.

Теорема 11 [13]. Если:

1) система (1.1) автономна и все ее решения, начинающиеся в некоторой окрестности точки $\mathbf{x} = 0$, z-ограничены;

2) функция $V(\mathrm{x})$ такова, что: $V(0) = 0$, и в любой окрестности начала координат существуют точки x, для которых $V(\mathrm{x}) < 0$;

$$3)\ V^{\cdot}(\mathrm{x}) = 0 \text{ при } \mathrm{x} \in M,\ V^{\cdot}(\mathrm{x}) < 0 \text{ при } \mathrm{x} \,\overline{\in}\, M \tag{2.29}$$

где M — множество, не содержащее целых траекторий, кроме $\mathrm{x} = 0$, то движение $\mathrm{x} = 0$ y-неустойчиво.

Доказательство. Допустим противное: пусть движение $\mathrm{x} = 0$ y-устойчиво. Выбрав x_0 из условий $V(\mathrm{x}_0) < 0$, $\|\mathrm{y}(t;\, 0, \mathrm{x}_0)\| < H$ при $t \geqslant 0$, получим в силу 1) и 2)

$$\|\mathrm{x}(t;\, 0, \mathrm{x}_0)\| \geqslant \eta > 0, \qquad t \geqslant 0 \tag{2.30}$$

Множество Γ^+ ω-предельных точек решения $\mathrm{x}(t;\, 0, \mathrm{x}_0)$ не пусто и инвариантно [27], причем $\Gamma^+ \subset M$[28, 29]. В силу (2.30), Γ^+ не содержит точку $\mathrm{x} = 0$. Следовательно, множество M содержит траекторию, отличную от $\mathrm{x} = 0$, что невозможно. Теорема доказана.

Этот результат обобщает теорему Н. Н. Красовского [20].

Теорема 12 [13]. Если выполнены условия 1) — 2) теоремы 11, (2.29) и

4) $V(0, \mathrm{z}) \geqslant 0$ для любого z;

5) множество $\{\mathrm{x}\colon \mathrm{y} = 0\}$ инвариантно;

6) множество $M \diagdown \{\mathrm{x}\colon \mathrm{y} = 0\}$ не содержит целых траекторий,

то движение $\mathrm{x} = 0$ y-неустойчиво.

Доказательство. Допустим противное и выберем x_0 как и при доказательстве теоремы 11. Множество Γ^+ не пусто. Пусть

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{x}(t_n;\, 0, \mathrm{x}_0) = \mathrm{x}_* \in \Gamma^+.$$

Если

$$\lim_{t\to\infty} \|\mathrm{y}(t;\, 0, \mathrm{x}_0)\| = 0$$

то $\mathrm{y}_* = 0$, и, переходя к пределу в неравенствах

$$\lim_{t\to\infty} V(\mathrm{x}(t;\, 0, \mathrm{x}_0)) \leqslant V(\mathrm{x}_0) < 0$$

получим $0 \leqslant V(0, \mathrm{z}_*) \leqslant V(\mathrm{x}_0) < 0$, что невозможно. Следовательно, для некоторой последовательности $t_n \to \infty$ $\|\mathrm{y}(t_n;\, 0, \mathrm{x}_0)\| \geqslant \eta > 0$, и можно считать $\mathrm{y}_* \neq 0$. Согласно 5), $\|\mathrm{y}(t;\, 0, \mathrm{x}_*)\| \neq 0$ для всех $t \geqslant 0$, откуда в силу инвариантности Γ^+ и свойства $\Gamma^+ \subset M$ следует $\mathrm{x}(t;\, 0, \mathrm{x}_*) \in M \diagdown \{\mathrm{x}\colon \mathrm{y} = 0\}$ при любом $t \geqslant 0$, что невозможно. Теорема доказана.

§ 3. Асимптотическая устойчивость. 1. *Теорема* 13 [10, 14]. Если существует функция $V(t, \mathrm{x})$, удовлетворяющая неравенству (1.7), и для любого $t_0 \geqslant 0$ найдется $\Delta(t_0) > 0$ такое, что из $\|\mathrm{x}_0\| < \Delta$ следует $V(t, \mathrm{x}(t;\, t_0, \mathrm{x}_0)) \downarrow 0$[1] при $t \to \infty$, то движение $\mathrm{x} = 0$ асимптотически y-устойчиво.

Это утверждение вытекает из y-устойчивости, неравенства (1.7) и условия $V \downarrow 0$.

Теорема 14 [10, 14]. Если функция $V(t, \mathrm{x})$ такова, что

$$V(t, \mathrm{x}) \geqslant \theta(t)\, a(\|\mathrm{y}\|)$$

при монотонно возрастающей до бесконечности функции $\theta(t)$, $\theta(0) = 1$, а $V^{\cdot} \leqslant 0$, то движение $\mathrm{x} = 0$ асимптотически y-устойчиво.

Этот результат обобщает теорему Н. Г. Четаева [21].

Для каждой пары чисел $t_0 \geqslant 0$, $\delta' > 0$ рассмотрим множество [9]

$$E(t_0, \delta') = \{(t, \mathrm{x}) : t \geqslant t_0,\ \mathrm{x} = \mathrm{x}(t;\, t_0, \mathrm{x}_0),\ \|\mathrm{x}_0\| < \delta'\}$$

---

[1] Запись «$V \downarrow 0$» означает «V стремится к нулю, монотонно убывая (в широком смысле)».

Теорема 15 [9]. Если существует функция $V(t, \mathrm{x})$, удовлетворяющая условиям теоремы 2, и для любого $t_0 \geqslant 0$ найдутся $\delta'(t_0) > 0$ и $M(t_0) > 0$ такие, что

$$\| \mathrm{Y}(t, \mathrm{x}) \| \leqslant M \quad \text{при } (t, \mathrm{x}) \in E(t_0, \delta') \tag{3.1}$$

то движение $\mathrm{x} = 0$ асимптотически y-устойчиво.

Доказательство. В силу п. 1) теоремы 1, для всяких $\varepsilon > 0$, $t_0 \geqslant 0$ найдется δ (ε, $_0$), $0 < \delta < \delta'$, такое, что из $\| \mathrm{x}_0 \| < \delta$ следует $\| \mathrm{y}(t; t_0, \mathrm{x}_0) \| < \varepsilon$ при $t \geqslant t_0$. Покажем, что $\lim \| \mathrm{y}(t; t_0, \mathrm{x}_0) \| = 0$ при $t \to \infty$, если $\| \mathrm{x}_0 \| < \delta$. Допустим противное: пусть существуют точка x_* с $\|\mathrm{x}_*\| < \delta$, число $l > 0$ и последовательность $t_k \to \infty$, $t_k - t_{k-1} \geqslant \alpha > 0$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, такие, что $\| \mathrm{y}(t_k; t_0, \mathrm{x}_*) \| \geqslant l$. В силу (3.1) можно подобрать β, $0 < \beta < \alpha / 2$, при котором $l / 2 \leqslant \| \mathrm{y}(t; t_0, \mathrm{x}_*) \| < \varepsilon$ для $t \in [t_k - \beta, t_k + \beta]$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. При этом из (2.2) на основании (2.5) следует

$$0 \leqslant V(t_k + \beta, \mathrm{x}(t_k + \beta; t_0, \mathrm{x}_*)) \leqslant V(t_0, \mathrm{x}_*) + \sum_{i=1}^{k} \int_{t_i - \beta}^{t_i + \beta} V^{\boldsymbol{\cdot}}(\tau, \mathrm{x}(\tau; t_0, \mathrm{x}_*))\, d\tau \leqslant$$
$$\leqslant V(t_0, \mathrm{x}_*) - 2k\beta c(l / 2)$$

что при достаточно большом k невозможно. Теорема доказана.

Теорема 15 обобщает теорему В. П. Марачкова [30]. В работе [12] на примере показано, что при $m < n$ теорема 15 не обратима даже в случае асимптотической y-устойчивости, равномерной по $\{t_0, \mathrm{x}_0\}$. Можно показать [31], что теорема Марачкова [30] (т. е. теорема 15 при $m = n$) в общем случае также не обратима.

2. *Теорема* 16 [32]. Если функция $V(t, \mathrm{x})$ удовлетворяет неравенствам (1.7) и (1.9), т. е.

$$a(\| \mathrm{y} \|) \leqslant V(t, \mathrm{x}) \leqslant b\left(\left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2\right)^{1/2}\right), \qquad m \leqslant k \leqslant n \tag{3.2}$$

а ее производная

$$V^{\boldsymbol{\cdot}}(t, \mathrm{x}) \leqslant -c\left(\left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2\right)^{1/2}\right) \tag{3.3}$$

то движение $\mathrm{x} = 0$ асимптотически y-устойчиво.

Доказательство. Для всяких $\varepsilon > 0$, $t_0 \geqslant 0$ подберем $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ согласно п. 1) теоремы 1. Покажем, что из $\| \mathrm{x}_0 \| < \delta$ следует $\lim V(t, \mathrm{x}(t; t_0, \mathrm{x}_0)) = 0$ при $t \to \infty$. Если предположить противное, то в силу $V^{\boldsymbol{\cdot}} \leqslant 0$ будет $V(t, \mathrm{x}(t; t_0, \mathrm{x}_0)) \geqslant V_* > 0$. На основании этого из (3.2) и (3.3) заключаем, что

$$\left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2(t; t_0, \mathrm{x}_0)\right)^{1/2} \geqslant b^{-1}(V_*), \qquad V^{\boldsymbol{\cdot}}(t, \mathrm{x}(t; t_0, \mathrm{x}_0)) \leqslant -c(b^{-1}(V_*)) \tag{3.4}$$

Используя (3.4) и (2.2), получаем

$$0 \leqslant V(t, \mathrm{x}(t; t_0, \mathrm{x}_0)) \leqslant V(t_0, \mathrm{x}_0) - c(b^{-1}(V_*))(t - t_0)$$

что при достаточно большом t невозможно. Итак, $\lim V(t, \mathrm{x}(t; t_0, \mathrm{x}_0)) = 0$ при $t \to \infty$. Из теоремы 13 вытекает требуемый результат.

Определение 7 (ср. [12]). Решения системы (1.1) обладают свойством (R), если при некотором $\delta > 0$ для любого $\varepsilon > 0$ найдется $T(\varepsilon) > 0$ такое, что из

$$t_0 \geqslant 0, \ \sum_{i=1}^{k} x_{i0}^2 < \delta^2 \ (-\infty < x_{j0} < +\infty, \ j = k+1, \ldots, n)$$

следует $\| \mathrm{y}(t; t_0, \mathrm{x}_0) \| < \varepsilon$ для всех $t \geqslant t_0 + T$.

Аналогично [12] может быть доказана

Теорема 17. Для существования функции V, удовлетворяющей условиям теоремы 16, необходимо, чтобы решения системы (1.1) обладали свойством (R) и выполнялись тождества

$$X_i(t, 0, \ldots, \quad 0, x_{k+1}, \ldots, x_n) \equiv 0 \qquad (i = 1, \ldots, k)$$

Если $k = m$, а X_i и $\partial X_i / \partial x_j$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ непрерывны и ограничены в области (1.2), то эти условия являются достаточными [12] для существования функции V, удовлетворяющей условиям теоремы 16. При $k > m$ теорема 16 необратима, что вытекает из примера [12].

3. *Теорема* 18 [9]. Если существует функция $V(t, \mathrm{x})$, удовлетворяющая неравенствам (1.7) и (1.10), т. е.

$$a(\|\mathrm{y}\|) \leqslant V(t, \mathrm{x}) \leqslant b(\|\mathrm{x}\|) \tag{3.5}$$

производная $V^{\cdot} \leqslant 0$, и $V(t, \mathrm{x}) \to 0$ равномерно при $V^{\cdot}(t, \mathrm{x}) \to 0$ [1], то движение $\mathrm{x} = 0$ асимптотически у-устойчиво равномерно по $\{t_0, \mathrm{x}_0\}$.

Доказательство. Если $t_0 \geqslant 0$, $\|\mathrm{x}_0\| < \Delta_0 = b^{-1}(a(H))$, то для любого $t \geqslant t_0$ справедливо неравенство $\|\mathrm{y}(t;\ t_0, \mathrm{x}_0)\| < H$. Для всякого ε, $0 < \varepsilon < H$, найдется такое $\delta'(\varepsilon) > 0$, что из $|V^{\cdot}(t, \mathrm{x})| < \delta'$ вытекает $V(t, \mathrm{x}) < a(\varepsilon)$. Положим $T(\varepsilon) = 2a(\varepsilon)/\delta'(\varepsilon)$. Если допустить, что $|V^{\cdot}(\tau, \mathrm{x}(\tau; t_0, \mathrm{x}_0))| \geqslant \delta'(\varepsilon)$ при $\tau \in (t_0,\ t_0 + T)$ и $\|\mathrm{x}_0\| < \Delta_0$, то из (2.2) получим

$$0 \leqslant V(t_0 + T, \mathrm{x}(t_0 + T;\ t_0, \mathrm{x}_0)) \leqslant V(t_0, \mathrm{x}_0) - 2a(\varepsilon) \leqslant a(\varepsilon) - 2a(\varepsilon) < 0$$

что невозможно. Итак, при некотором $t_* \in (t_0,\ t_0 + T)$ будет $|V^{\cdot}\ (t_*, \mathrm{x}(t_*;\ t_0, \mathrm{x}_0))| < \delta'$, и, следовательно, $V(t_*,\ \mathrm{x}(t_*;\ t_0, \mathrm{x}_0)) < a(\varepsilon)$. Но тогда при $t \geqslant t_*$

$$a(\|\mathrm{y}(t;\ t_0, \mathrm{x}_0)\|) \leqslant V(t,\ \mathrm{x}(t;\ t_0, \mathrm{x}_0)) \leqslant V(t_*,\ \mathrm{x}(t_*;\ t_0, \mathrm{x}_0)) < a(\varepsilon)$$

откуда $\|\mathrm{y}(t;\ t_0, \mathrm{x}_0)\| < \varepsilon$ при всех $t \geqslant t_0 + T > t_*$.
Теорема доказана.

4. Рассмотрим некоторые обобщения (см. § 2, п. 2).

Теорема 19 [5]. Если существует функция $V(t, \mathrm{x})$, обладающая свойствами

а) $V(t, 0) \equiv 0$, $V(t, \mathrm{x})$ непрерывна в точке $\mathrm{x} = 0$;

б) V удовлетворяет неравенству (1.7);

в)
$$D^+V(t, \mathrm{x}(t; t_0, \mathrm{x}_0)) \leqslant -c(V(t, \mathrm{x}(t; t_0\, \mathrm{x}_0)))\ ^2 \tag{3.6}$$

то движение $\mathrm{x} = 0$ асимптотически у-устойчиво.

Доказательство. Выбрав $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$, согласно п. 1) теоремы 1, получим, что при $\|\mathrm{x}_0\| < \delta$ существует предел $\lim V(t, \mathrm{x}(t;\ t_0, \mathrm{x}_0)) = V_* \geqslant 0$ при $t \to \infty$. Если допустить, что $V_* > 0$, то из (3.6) будет следовать

$$D^+V(t, \mathrm{x}(t; t_0, \mathrm{x}_0)) \leqslant -c(V_*)$$

Интегрируя это соотношение, находим

$$0 \leqslant V(t, \mathrm{x}(t; t_0, \mathrm{x}_0)) \leqslant V(t_0, \mathrm{x}_0) - c(V_*)(t - t_0)$$

что при достаточно большом t невозможно. Итак, $V_* = 0$, что и требовалось доказать.

Теорема 20 [5]. Если существует функция $V(t, \mathrm{x})$, удовлетворяющая условиям а), б) теоремы 19 и неравенству (1.10), причем

$$D^+V(t, \mathrm{x}(t; t_0, \mathrm{x}_0)) \leqslant -c(\|\mathrm{x}(t; t_0, \mathrm{x}_0)\|) \tag{3.7}$$

то движение $\mathrm{x} = 0$ асимптотически у-устойчиво равномерно по $\{t_0, \mathrm{x}_0\}$.

---

[1] Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из $|V^{\cdot}(t, \mathrm{x})| < \delta$ следует $V(t, \mathrm{x}) < \varepsilon$.

[2] Величина $D^+V(t, \mathrm{x}(t; t_0, \mathrm{x}_0)) = \overline{\lim\limits_{h \to +0}}\ [V(t + h, \mathrm{x}(t + h; t_0, \mathrm{x}_0)) - V(t, \mathrm{x}(t; t_0, \mathrm{x}_0))] / h$ есть правое верхнее производное число Дини [33,34] функции $V(t, \mathrm{x}(t; t_0, \mathrm{x}_0))$.

Доказательство. По условию имеет место (3.5). Пусть дано $\varepsilon > 0$. Если $\delta(\varepsilon) = b^{-1}(a(\varepsilon))$, то при $\|x_0\| < \delta$

$$a(\|y(t; t_0, x_0)\|) \leqslant V(t, x(t; t_0, x_0)) \leqslant V(t_0, x_0) \leqslant b(\|x_0\|) < a(\varepsilon)$$

откуда $\|y(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon$ для $t \geqslant t_0$. Положим $\Delta_0 = \delta(H)$, $T(\varepsilon) = b(\Delta_0) / c(\delta(\varepsilon))$ и пусть $\|x_0\| < \Delta_0$, $t_0 \geqslant 0$. Если предположить, что $\|x(t; t_0, x_0)\| \geqslant \delta(\varepsilon)$ при всех $t \in (t_0, t_0 + T)$, то, интегрируя (3.7), получим

$$0 \leqslant V(t_0 + T, x(t_0 + T; t_0, x_0)) \leqslant V(t_0, x_0) - c(\delta(\varepsilon)) T < b(\Delta_0) - c(\delta(\varepsilon)) T = 0$$

что невозможно. Следовательно, существует момент $t_* \in (t_0, t_0 + T)$, для которого $\|x(t_*; t_0, x_0)\| < \delta(\varepsilon)$. Но в таком случае $\|y(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon$ при всех $t \geqslant t_0 + T > t_*$, что и требовалось доказать.

5. *Теорема* 21 [4]. Для того чтобы движение $x = 0$ было y-устойчиво равномерно по t_0 и асимптотически y-устойчиво, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $V(t, x)$, удовлетворяющая условиям теоремы 5 и $V(t, x(t; t_0, x_0)) \downarrow 0$.

Доказательство. 1) Достаточность. Выполнены условия теоремы 5. Из $V \downarrow 0$ следует, что $\|y(t; t_0, x_0)\| \to 0$ при $t \to \infty$, если $\|x_0\|$ достаточно мала.

2) Необходимость. Из условий следует, что существует функция $V(t, x)$, удовлетворяющая условиям теоремы 5. По построению функции V ([4], стр. 29) и в силу асимптотической y-устойчивости, $V(t, x(t; t_0, x_0)) \downarrow 0$.

6. Рассмотрим применение дифференциальных неравенств (см. § 2, п. 4).

Теорема 22 [6]. Если существует функция $V(t, x)$, удовлетворяющая неравенствам (2.10) и (1.7), и, кроме того:

1) решение $v = 0$ уравнения (2.11) асимптотически устойчиво, то движение $x = 0$ системы (1.1) асимптотически y-устойчиво;

2) V удовлетворяет неравенству (1.10), и решение $v = 0$ уравнения (2.11) асимптотически устойчиво равномерно по $\{t_0, v_0\}$, то движение $x = 0$ системы (1.1) асимптотически y-устойчиво равномерно по $\{t_0, x_0\}$.

Доказательство. 1) Из (2.12) и (1.7) следует, что $a(\|y(t; t_0, x_0)\|) \leqslant v(t; t_0, v_0)$. Поскольку при $t \to \infty$ $\lim v(t; t_0, v_0) = 0$, то и $\lim \|y(t; t_0, x_0)\| = 0$, если $\|x_0\|$ достаточно мала.

2) Пусть $\eta_0 > 0$ и $T(a(\varepsilon)) = T(\varepsilon)$ — числа, фигурирующие в определении равномерной асимптотической устойчивости решения $v = 0$ уравнения (2.11). Подберем $\Delta_0 > 0$ из условия $b(\Delta_0) < \eta_0$. Тогда при $\|x_0\| < \Delta_0$, $t \geqslant t_0 + T$ будет

$$a(\|y(t; t_0, x_0)\|) \leqslant V(t, x(t; t_0, x_0)) \leqslant v(t; t_0, v_0) < a(\varepsilon)$$

откуда $\|y(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon$. Теорема доказана.

Рассмотрим вектор-функцию $\mathbf{V}$ (см. § 2, п. 5).

Теорема 23 [9]. 1) Если условия I, II и III — 3) выполнены, то движение $x = 0$ асимптотически y-устойчиво.

2) Если условия I, II, III — 4) и IV выполнены, то движение $x = 0$ асимптотически y-устойчиво равномерно по $\{t_0, x_0\}$.

Доказательство. 1) Поскольку $\lim\limits_{t \to \infty} \sum\limits_{s=1}^{l} \omega_s^+(t, t_0, \omega_0) = 0$, то из (2.23) вытекает (1.3), если $\|x_0\|$ достаточно мала.

2) В этом случае соотношение (1.3) выполняется равномерно по $\{t_0, x_0\}$. Теорема доказана.

7. В этом пункте $\dot{V}_{(1)}$ и $\dot{V}_{(2)}$ означают производные от функции V в силу систем (1.1) и (2.24) (см. § 2, п. 6).

Теорема 24 [6]. Если существует ограниченная функция $V(t, x)$, удовлетворяющая неравенству (1.7) и условию Липшица (2.25), причем $\dot{V}_{(1)}(t, x) \leqslant -c(\|x\|)$, то можно найти такую функцию $d(r)$, что из условий (2.26) и (3.8)

$$\left\{-t+\alpha\int_{t_0}^{t_0+t}\varphi(\tau)\,d\tau\right\}\underset{t_0\geqslant 0}{\rightrightarrows}-\infty \quad \text{при } t\to\infty \quad (\alpha>0) \tag{3.8}$$

следует равномерная по $\{t_0,\ x_0\}$ асимптотическая у-устойчивость движения $x=0$ системы (2.24).

Доказательство. При условиях, наложенных на V, можно построить [22] такую функцию $W(t,\ x)$, что

$$W(t,0)\equiv 0,\quad p(\|y\|)\leqslant W(t,x)\leqslant\|x\|$$
$$\dot W_{(1)}(t,x)\leqslant -W(t,x) \tag{3.9}$$

$p(r)$ — функция типа $a(r)$); кроме того, W удовлетворяет условию Липшица по x с постоянной Липшица, равной единице. Отсюда, в силу (2.26) и (3.9), следует

$$\dot W_{(2)}(t,x)\leqslant -W(t,x)+\varphi(t)\,d(\|y\|)$$

Пусть $d(r)\leqslant Cp(r)$, $0<C\leqslant\alpha$. Тогда

$$\dot W_{(2)}(t,x)\leqslant[-1+\alpha\varphi(t)]\,W(t,x) \tag{3.10}$$

Из (3.10) на основании (3.8) и п. 2) теоремы 22 заключаем, что движение $x=0$ системы (2.24) асимптотически у-устойчиво равномерно по $\{t_0,\ x_0\}$. Теорема доказана.

8. Рассмотрим критерии, основанные на функциях, имеющих знакопостоянную производную [20, 29, 35, 28]. В этом пункте предполагается, что система (1.1) автономна, и, следовательно, ее решения обладают групповым свойством

$$x(t;\,t_0,x_0)\equiv x(t+\tau;\,t_0+\tau,x_0) \tag{3.11}$$

и, кроме того, что все ее решения, начинающиеся в некоторой окрестности точки $x=0$, ограничены.

Теорема 25 [10, 13, 14]. Если функция $V(x)$ такова, что $V(x)\geqslant a(\|y\|)$, а $V^{\cdot}$ удовлетворяет условию (2.29), где M — множество точек $\{x\}$, не содержащее целых траекторий, кроме $x=0$, то движение $x=0$ асимптотически у-устойчиво.

Доказательство [10, 14]. Задавшись числом ε, $0<\varepsilon<H$, подберем $\delta(\varepsilon)>0$, согласно п. 2) теоремы 1. Покажем, что из $\|x_0\|<\delta$ следует $\lim V(x(t;\ t_0,\ x_0))=0$ при $t\to\infty$. Предположив, что это не верно, в силу $V^{\cdot}\leqslant 0$ получим

$$V(x(t;\,t_0,x_0))\geqslant V_*>0 \tag{3.12}$$

Решение $x(t;\ t_0,\ x_0)$, будучи по условию ограниченным, имеет предельную точку x_*: $x(t_0+k\tau;\ t_0,\ x_0)\to x_*$, $k=k_1,k_2,k_3,\ldots,k_i\to\infty$, $\tau=\text{const}>0$; по непрерывности $V(x_*)=V_*$. Поскольку решение $x(t;\ t_0,\ x_*)$ не лежит целиком в множестве M, то для некоторого $T>t_0$ будет $V(x(T;\ t_0,\ x_*))<V_*$. Так как $x(t_0+k\tau;\ t_0,\ x_0)\to x_*$, то по теореме о непрерывной зависимости решения от начальных условий и в силу непрерывности функции V для числа $T>0$ существует такое $N>0$, что из $k_i>N$ следует

$$V(x(T;\,t_0,x(t_0+k_i\tau;\,t_0,x_0)))<V_* \tag{3.13}$$

Из (3.11) и свойства единственности (2.6) вытекает

$$x(T;\,t_0,x(t_0+k_i\tau;\,t_0,x_0))=x(T+k_i\tau;\,t_0+k_i\tau,x(t_0+k_i\tau;\,t_0,x_0))=x(T+k_i\tau;\,t_0,x_0) \tag{3.14}$$

Подставляя (3.14) в (3.13), получаем $V(x(T+k_i\tau;\ t_0,\ x_0))<V_*$, что противоречит (3.12). Итак, $V_*=0$, что и требовалось доказать.

Замечание. Можно показать [15], что при выполнении условий теоремы 25 асимптотическая у-устойчивость равномерна по $\{t_0,\ x_0\}$.

Теорема 26 [13]. Если функция V (x) такова, что V (x) $\geqslant a$ (|| y ||), а $V^{\cdot}$ удовлетворяет условию (2.29), причем множество {x: y = 0} инвариантно, а $M \setminus$ {x: y = 0} не содержит целых траекторий, то движение x = 0 асимптотически y-устойчиво.

Доказательство [13] основано на свойствах ω-предельных точек динамических систем и проводится по тому же плану, что и доказательства теорем 11 и 12.

9. *Теорема* 27 [9]. Если существует функция V (t, x), удовлетворяющая в области (1.4) условиям (1.7) и (2.5) (в смысле определения 3), и для любых $t_0 \geqslant 0$, $\lambda > 0$ найдется $M(t_0, \lambda) > 0$ такое, что

$$\| \mathrm{Y}(t, \mathrm{x}) \| \leqslant M \quad \text{при } (t, \mathrm{x}) \in E(t_0, \lambda) \tag{3.15}$$

то движение x = 0 асимптотически y-устойчиво в целом.

Доказательство. Выполнены условия п. 1) теоремы 1, поэтому нужно лишь доказать, что $\lim \| \mathrm{y}(t; t_0, \mathrm{x}_0) \| = 0$ при $t \to \infty$ для любых x_0 и $t_0 \geqslant 0$. Допустим противное: пусть существуют число $l > 0$ и последовательность $t_k \to \infty$, $t_k - t_{k-1} \geqslant \alpha > 0$, $k = 1,2,3,\ldots$, такие, что $\| \mathrm{y}(t_k; t_0, \mathrm{x}_*) \| \geqslant l$ для некоторых x_* и $t_0 \geqslant 0$. Обозначим $\| \mathrm{x}_* \| = \lambda$; из (3.15) следует существование числа β, $0 < \beta < \alpha/2$, такого, что $\| \mathrm{y}(t; t_0, \mathrm{x}_*) \| \geqslant l / 2$ при $t \in [t_k - \beta, t_k + \beta]$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Из (2.2), в силу (2.5), вытекает

$$0 \leqslant V(t_k + \beta; \mathrm{x}(t_k + \beta; t_0, \mathrm{x}_*)) \leqslant V(t_0, \mathrm{x}_*) + \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{t_i - \beta}^{t_i + \beta} V^{\cdot}(\tau, \mathrm{x}(\tau; t_0, \mathrm{x}_*))\, d\tau \leqslant$$
$$\leqslant V(t_0, \mathrm{x}_*) - 2k\beta c(l / 2)$$

что при достаточно большом k невозможно. Теорема доказана.

Условие (3.15) позволяет отказаться от требования сильного бесконечно малого высшего предела и бесконечно большого низшего предела [25] функции V, однако в этом случае равномерность асимптотической y-устойчивости не гарантирована. Для сравнения предлагается следующего обобщение теоремы Барбашина — Красовского [20, 36, 37, 29] об асимптотической устойчивости в целом:

Теорема 28 [1]. Если в области (1.4) существует функция V, удовлетворяющая условиям (3.2) и (3.3), причем

$$V(t, \mathrm{x}) \rightrightarrows +\infty \quad \text{при} \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \to +\infty \tag{3.16}$$

то движение x = 0 асимптотически y-устойчиво в целом; при этом $\| \mathrm{y}(t; t_0, \mathrm{x}_0) \| \to 0$ при $t \to \infty$ равномерно по $\{t_0 \geqslant 0, (x_{10}, \ldots, x_{k0}) \in K, | x_{j0} | < +\infty \ (j = k+1, \ldots, n)\}$, где K — произвольный компакт пространства $\{x_1, \ldots, x_k\}$, решения системы (1.1) обладают свойством (R), и

$$X_i(t, 0, \ldots, 0, x_{k+1}, \ldots, x_n) \equiv 0 \qquad (i = 1, \ldots, k) \tag{3.17}$$

Доказательство. Асимптотическая y-устойчивость, свойство (R) и тождества (3.17) вытекают из теорем 16 и 17. Пусть дан компакт K. Обозначим через

$$b_0 = \max \left[b \left(\left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \right)^{1/2} \right) : \ (x_1, \ldots, x_k) \in K \right]$$

В силу (3.16) существует такое $R > 0$, что

$$V(t, \mathrm{x}) > b_0 \quad \text{при} \sum_{i=1}^{k} x_i^2 > R^2$$

[1] Эта теорема доказана А. С. Озиранером.

Следовательно

$$\sum_{i=1}^{k} x_i^2(t; t_0, \mathrm{x}_0) \leqslant R^2 \quad \text{при } t \geqslant t_0$$

если $t_0 \geqslant 0$, $(x_{10}, \ldots, x_{k0}) \in K$, $|x_{j0}| < \infty$ $(j = k+1, \ldots, n)$.

Из условий, наложенных на функцию V, следует (ср.с п. 2) и 3) теоремы 1), что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\|\mathrm{y}(t; t_0, \mathrm{x}_0)\| < \varepsilon$ при всех $t \geqslant t_0$, если только

$$t_0 \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{k} x_{i0}^2 < \delta^2, \quad |x_{j0}| < \infty \quad (j = k+1, \ldots, n)$$

Положим $T(\varepsilon) = 2b_0 / c(\delta(\varepsilon))$ и пусть $(x_{10}, \ldots, x_{k0}) \in K$. Если предположить, что

$$\sum_{i=1}^{k} x_i^2(t; t_0, \mathrm{x}_0) \geqslant \delta^2(\varepsilon) \quad \text{при } t \in (t_0, t_0 + T)$$

то из (2.2) получим

$$0 \leqslant V(t_0 + T, \mathrm{x}(t_0 + T; t_0, \mathrm{x}_0)) \leqslant V(t_0, \mathrm{x}_0) - c(\delta(\varepsilon))T \leqslant b_0 - c(\delta(\varepsilon))T < 0$$

что невозможно. Следовательно, существует момент $t_* \in (t_0, t_0 + T)$, для которого

$$\sum_{i=1}^{k} x_i^2(t_*; t_0, \mathrm{x}_0) < \delta^2(\varepsilon)$$

Но тогда $\|\mathrm{y}(t; t_0, \mathrm{x}_0)\| < \varepsilon$ при $t \geqslant t_0 + T > t_*$. Теорема доказана.

Замечание. Если в теоремах 25 и 26 дополнительно потребовать $a(\|\mathrm{y}\|) \to \infty$ при $\|\mathrm{y}\| \to \infty$, то движение $\mathrm{x} = 0$ будет асимптотически y-устойчивым в целом [13].

10. Пусть дана система уравнений возмущенного движения управляемой системы

$$\mathrm{x}^{\cdot} = \mathrm{X}(t, \mathrm{x}, \mathrm{u}) \qquad (\mathrm{u} = (u_1, \ldots, u_r)) \tag{3.18}$$

правые части которой определены и непрерывны в области

$$t \geqslant 0, \quad \|\mathrm{y}\| \leqslant H > 0, \quad 0 \leqslant \|\mathrm{z}\| < +\infty, \quad 0 \leqslant \|\mathrm{u}\| < +\infty \tag{3.19}$$

Ищется u в виде $\mathrm{u} = \mathrm{u}(t, \mathrm{x})$; при этом предполагается, что функция $\mathrm{u}(t, \mathrm{x})$ определена и непрерывна в области (1.2), а система (3.18) при $\mathrm{u} = \mathrm{u}(t, \mathrm{x})$ удовлетворяет ограничениям, наложенным на систему (1.1); кроме того

$$\mathrm{X}(t, 0, 0) \equiv 0, \qquad \mathrm{u}(t, 0) \equiv 0$$

Критерий качества управления принимается в виде условия минимума интеграла

$$J = \int_{t_0}^{\infty} \omega(t, \mathrm{x}[t], \mathrm{u}[t])\, dt$$

Здесь $\omega(t, \mathrm{x}, \mathrm{u}) \geqslant 0$ — скалярная непрерывная в области (3.19) функция, $\mathrm{x}[t]$ — решение системы (3.18) при $\mathrm{u} = \mathrm{u}(t, \mathrm{x})$, $\mathrm{u}[t] = \mathrm{u}(t, \mathrm{x}[t])$.

Задача об оптимальной y-стабилизации [10, 32] заключается в нахождении функции $\mathrm{u} = \mathrm{u}^\circ(t, \mathrm{x})$, обеспечивающей асимптотическую y-устойчивость движения $\mathrm{x} = 0$, причем для любой функции $\mathrm{u} = \mathrm{u}^*(t, \mathrm{x})$, удовлетворяющей этому условию, должно выполняться неравенство

$$\int_{t_0}^{\infty} \omega(t, \mathrm{x}^\circ[t], \mathrm{u}^\circ[t])\, dt \leqslant \int_{t_0}^{\infty} \omega(t, \mathrm{x}^*[t], \mathrm{u}^*[t])\, dt$$

при $t_0 \geqslant 0$, $\|\mathrm{x}[t_0]\| \leqslant \lambda$, $\lambda = \mathrm{const} > 0$.

Введем обозначение [35]

$$B[V,t,\mathrm{x},\mathrm{u}] = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i(t,\mathrm{x},\mathrm{u}) + \omega(t,\mathrm{x},\mathrm{u}) \tag{3.20}$$

Теорема 29 [10, 32]. Если существуют функция $V^\circ(t, \mathrm{x})$, удовлетворяющая неравенствам (1.7) и (1.8) (соответственно, неравенствам (1.7) и (1.10)), и функция $\mathrm{u} = \mathrm{u}^\circ(t, \mathrm{x})$, для которых

1) $W(t,\mathrm{x}) \equiv -\omega(t, \mathrm{x}, \mathrm{u}^\circ(t,\mathrm{x})) \leqslant -c(\|\mathrm{y}\|)$ (соответственно $W(t,\mathrm{x}) \equiv -\omega(t,\mathrm{x}, \mathrm{u}^\circ(t,\mathrm{x})) \leqslant -c(\|\mathrm{x}\|)$);

2) $B[V^\circ, t, \mathrm{x}, \mathrm{u}^\circ(t,\mathrm{x})] = 0$;

3) для любого u $B[V^\circ, t, \mathrm{x}, \mathrm{u}] \geqslant 0$,

то функция $\mathrm{u}=\mathrm{u}^\circ(t,\mathrm{x})$ разрешает задачу об оптимальной y-стабилизации. При этом

$$\int_{t_0}^{\infty} \omega(t, \mathrm{x}^\circ[t], \mathrm{u}^\circ[t]), dt = \min \int_{t_0}^{\infty} \omega(t, \mathrm{x}[t], \mathrm{u}[t])\, dt = V^\circ(t_0, \mathrm{x}[t_0]) \tag{3.21}$$

Доказательство. Из (3.20) и условия 2) теоремы следует, что $V^{\circ\cdot} = W$ в силу системы $\mathrm{x}^\cdot = \mathrm{X}(t, \mathrm{x}, \mathrm{u}^\circ(t, \mathrm{x}))$. Поэтому выполнены все условия теоремы 16 при $k = m$ (соответственно при $k = n$). Докажем соотношение (3.21). Интегрируя равенство $dV^\circ(t, \mathrm{x}^\circ[t]) / dt = -\omega(t, \mathrm{x}^\circ[t], \mathrm{u}^\circ[t])$ и учитывая, что $\lim V^\circ(t, \mathrm{x}^\circ[t]) = 0$ при $t \to \infty$, получаем

$$V^\circ(t_0, \mathrm{x}^\circ[t_0]) = \int_{t_0}^{\infty} \omega(t, \mathrm{x}^\circ[t], \mathrm{u}^\circ[t])\, dt \tag{3.22}$$

Для всякой функции $\mathrm{u} = \mathrm{u}^*(t, \mathrm{x})$, обеспечивающей асимптотическую y-устойчивость движения $\mathrm{x} = 0$, в силу условия 3) теоремы справедливо неравенство $dV^\circ(t, \mathrm{x}^*[t]) / dt \leqslant -\omega(t, \mathrm{x}^*[t])$, интегрируя которое и учитывая, что $\lim V^\circ(t, \mathrm{x}^*[t]) = 0$ при $t \to \infty$ получаем ($\mathrm{x}^*[t_0] = \mathrm{x}^\circ[t_0]$)

$$V^\circ(t_0, \mathrm{x}^*[t_0]) \leqslant \int_{t_0}^{\infty} \omega(t, \mathrm{x}^*[t], \mathrm{u}^*[t])\, dt \tag{3.23}$$

Из (3.22) и (3.23) вытекает (3.21), что и требовалось доказать.

Этот результат обобщает теорему Н. Н. Красовского ([35], дополнение IV).

Один из методов решения задач об оптимальной стабилизации предложен в работе [32].

11. В задаче об y-устойчивости по линейному приближению сделаны лишь первые шаги [11].

В этом пункте считается $V^\cdot(t, \mathrm{x}) = \{D^+ V(\tau, \mathrm{x}(\tau;\ t, \mathrm{x}))\}_{\tau=t}$.

Рассмотрим вначале линейную систему

$$\mathrm{y}^\cdot = A(t)\,\mathrm{y} + B(t)\,\mathrm{z}, \qquad \mathrm{z}^\cdot = C(t)\,\mathrm{y} + D(t)\,\mathrm{z} \tag{3.24}$$

в которой A, B, C, D — непрерывные при $t \geqslant 0$ матричные функции соответствующих порядков. Известно, что любое решение $\mathrm{x} = \mathrm{x}(t;\ t_0, \mathrm{x}_0)$ системы (3.24) определено при $(t \in [0, \infty)$.

Теорема 30 [11]. Движение $\mathrm{x} = 0$ системы (3.24) экспоненциально-асимптотически y-устойчиво тогда и только тогда, когда существует функция $V(t, \mathrm{x})$, удовлетворяющая условиям

$$\|\mathrm{y}\| \leqslant V(t,\mathrm{x}) \leqslant M(\|\mathrm{y}\| + \|\mathrm{z}\|) \tag{3.25}$$

$$|V(t,\mathrm{x}) - V(t,\mathrm{x}')| \leqslant M(\|\mathrm{y} - \mathrm{y}'\| + \|\mathrm{z} - \mathrm{z}'\|) \tag{3.26}$$

$$V^\cdot(t,\mathrm{x}) \leqslant -\alpha V(t,\mathrm{x}) \tag{3.27}$$

Доказательство. 1) Достаточность. Интегрируя (3.27), получаем

$$V(t, \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)) \leqslant V(t_0, \mathbf{x}_0) \exp[-\alpha(t - t_0)] \tag{3.28}$$

В силу неравенств (3.25)

$$\|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| \leqslant V(t, \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)) \tag{3.29}$$

$$V(t_0, \mathbf{x}_0) \leqslant M(\|\mathbf{y}_0\| + \|\mathbf{z}_0\|) \tag{3.30}$$

Из (3.28) — (3.30) вытекает (1.5).

2) Необходимость. Пусть имеет место (1.5). Положим

$$V(t, \mathbf{x}) = \sup[\|\mathbf{y}(t + \tau; t, \mathbf{x})\| \exp(\alpha\tau) : \tau \geqslant 0] \tag{3.31}$$

Очевидно, $V(t, \mathbf{x}) \geqslant \|\mathbf{y}\|$. Из (3.31) следует в силу (1.5), что

$$V(t, \mathbf{x}) \leqslant M(\|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{z}\|)$$

Так как $\mathbf{x}(t;\ t_0,\ \mathbf{x}_0)$ линейно зависит от $\mathbf{x}_0$, то

$$\mathbf{y}(t + \tau; t, \mathbf{x}) - \mathbf{y}(t + \tau; t, \mathbf{x}') = \mathbf{y}(t + \tau; t, \mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

Следовательно

$$|V(t, \mathbf{x}) - V(t, \mathbf{x}')| \leqslant \sup_{\tau \geqslant 0}[\|\mathbf{y}(t + \tau; t, \mathbf{x} - \mathbf{x}')\| \exp(\alpha\tau)] \leqslant M(\|\mathbf{y} - \mathbf{y}'\| + \|\mathbf{z} - \mathbf{z}'\|)$$

Далее имеем

$$V(t + h, \mathbf{x}(t + h; t, \mathbf{x})) = \sup_{\tau \geqslant 0}[\|\mathbf{y}(t + h + \tau; t + h, \mathbf{x}(t + h; t, \mathbf{x}))\| \exp(\alpha\tau)] =$$
$$= \sup_{\tau \geqslant 0}[\|\mathbf{y}(t + h + \tau; t, \mathbf{x})\| \exp(\alpha\tau)] = \sup_{\tau \geqslant h}[\|\mathbf{y}(t + \tau; t, \mathbf{x})\| \exp(\alpha\tau) \exp(-\alpha h)] \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\tau \geqslant 0}[\|\mathbf{y}(t + \tau; t, \mathbf{x})\| \exp(\alpha\tau) \exp(-\alpha h)] = V(t, \mathbf{x}) \exp(-\alpha h)$$

Следовательно

$$\frac{1}{h}[V(t + h, \mathbf{x}(t + h; t, \mathbf{x})) - V(t, \mathbf{x})] \leqslant \frac{1}{h}[\exp(-\alpha h) - 1] V(t, \mathbf{x}) \tag{3.32}$$

откуда при $h \to +0$ вытекает (3.27).

Заметим, что функция $V(t,\ \mathbf{x})$ непрерывна. Действительно

$$|V(t + h, \mathbf{x}') - V(t, \mathbf{x})| \leqslant |V(t + h, \mathbf{x}') - V(t + h, \mathbf{x})| +$$
$$+ |V(t + h, \mathbf{x}) - V(t + h, \mathbf{x}(t + h; t, \mathbf{x}))| + |V(t + h, \mathbf{x}(t + h; t, \mathbf{x})) - V(t, \mathbf{x})|$$

Первые два слагаемых в правой части стремятся к нулю при $h \to 0$, $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| \to 0$, так как V удовлетворяет условию Липшица, последнее слагаемое стремится к нулю в силу (3.32). Теорема доказана.

Рассмотрим теперь возмущенную систему

$$\mathbf{y}^{\cdot} = A(t)\mathbf{y} + B(t)\mathbf{z} + \mathbf{f}(t, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \quad \mathbf{z}^{\cdot} = C(t)\mathbf{y} + D(t)\mathbf{z} + \mathbf{g}(t, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \tag{3.33}$$

Предположим, что функции $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ удовлетворяют условию Липшица по $(y, \mathbf{z})$, $\|\mathbf{f}(t, 0, 0)\| + \|\mathbf{g}(t, 0, 0)\| \equiv 0$ и

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{y}, \mathbf{z})\| + \|\mathbf{g}(t, \mathbf{y}, \mathbf{z})\| \leqslant \omega(t, \|\mathbf{y}\|) \tag{3.34}$$

причем функция $\omega(t,\ u)$ непрерывна при $t \geqslant 0$, $u \geqslant 0$, удовлетворяет локальному условию Липшица по u и не убывает по u, $\omega(t, 0) = 0$. $V_{(1)}^{\cdot}$ и $V_{(2)}^{\cdot}$ — производные от функции V в силу систем (3.24) и (3.33).

Теорема 31 [11]. Пусть движение $x = 0$ системы (3.24) экспоненциально-асимптотически y-устойчиво. Если выполнено неравенство (3.34), то y-устойчивость движения $x = 0$ системы (3.33) будет носить тот же характер, что и устойчивость решения $u = 0$ уравнения сравнения

$$u^{\cdot} = -\alpha u + M\ \omega(t,\ u) \tag{3.35}$$

Доказательство. По теореме 30 существует функция $V(t,\ x)$, удовлетворяющая условиям (3.25) — (3.27). Для этой функции

$$\dot{V}_{(2)}(t, x) \leqslant \dot{V}_{(1)}(t, x) + M(\|f\| + \|g\|) \leqslant -\alpha V(t, x) + M\omega(t, \|y\|)$$

откуда, воспользовавшись неравенством $V \geqslant \|y\|$, получаем

$$\dot{V}_{(2)}(t, x) \leqslant -\alpha V(t, x) + M\omega(t, V(t, x))$$

Следовательно, из $V(t_0, x_0) \leqslant u_0$ вытекает $V(t, x(t;\ t_0, x_0)) \leqslant u(t;\ t_0, u_0)$, откуда $\|y(t;\ t_0, x_0)\| \leqslant u(t;\ t_0, u_0)$, что и доказывает теорему.

Если, например, решение $u = 0$ уравнения (3.35) экспоненциально-асимптотически устойчиво, то движение $x = 0$ системы (3.33) экспоненциально-асимптотически y-устойчиво.

Поступила 7 VII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.— Л., Гостехиздат, 1950.
2. Малкин И. Г. Об устойчивости движения в смысле Ляпунова. Математ. сб., 1938, т. 3 (45), № 1.
3. Румянцев В. В. Об устойчивости движения по отношению к части переменных. Вестн. МГУ, 1957, № 4.
4. Зубов В. И. Математические методы исследования систем автоматического регулирования. Л., Судпромгиз, 1959.
5. Halanay A. Differential equations, stability, oscilations, time lags. N. Y., Acad. Press, 1966.
6. Corduneanu C. Sur la stabilité partielle. Revue Roumaine de Math. pures et Appl., 1964, vol. 9, No 3, p. 229—236.
7. Матросов В. М. Развитие метода функций Ляпунова в теории устойчивости движения. Тр. II Всес. съезда по теоретической и прикладной механике, т. 1, М., «Наука», 1965, стр. 112—125.
8. Rouche N., Peiffer K. Le theoreme de Lagrange-Dirichler et la deuxieme methode de Liapounoff. Ann. Soc. scient. de Bruxelle, Ser. I, 1967, vol. 81, No. 1, p. 19—33.
9. Peiffer K., Rouche N. Liapunov's second method applied to partial stability. J. de mécanique, 1969, vol. 8, No 2, p. 323—334.
10. Rumyantsev V. V. On the stability with respect to a part of the variables Symp. math., vol. 6, Meccanica non lineare e stabilità, 23—26 febbrario 1970, L.— N. Y., Acad. Press, 1971, p. 243—265.
11. Corduneanu C. Some problems conserning partial stability. Symp. math, vol. 6, Meccanica non-lineare e stabilita, 23—26 febbrario 1970, L.— N. Y., Acad. Press, 1971, p. 141—154.
12. Озиранер А. С. К вопросу об устойчивости движения относительно части переменных. Вестн. МГУ. Матем., механ., 1971, № 1.
13. Risito C. Sulla stabilita asintotica parziale. Annali di Mathematica purra ed applicata, 1970, Ser. 6, vol. 84, p. 279—292.
14. Румянцев В. В. Об асимптотической устойчивости и неустойчивостидвижения по отношению к части переменных. ПММ, 1971, т. 35, вып. 1.
15. Озиранер А. С. Об асимптотической устойчивости относительно части переменных. Вестн. МГУ. Матем., механ. 1972, № 1.
16. Antosiewicz H. A. A survey of Lyapunov's second method. Contributions to the theory of nonlinear oscilations. Princeton University Press, 1958, St. 41, p. 141—166.
17. Красовский Н. Н. Второй метод Ляпунова в теории устойчивости движения. Тр. Всес. съезда по теор. и прикл. механ. М., Изд-во АН СССР, 1962.

18. Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М., «Мир», 1964.
19. Румянцев В. В. Метод функций Ляпунова в теории устойчивости движения. Механика в СССР за 50 лет, т. 1. М., «Наука», 1968, стр. 7—66.
20. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., Физматгиз, 1959.
21. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. М., «Наука», 1965.
22. Кордуняну К. Применение дифференциальных неравенств к теории устойчивости. Analile ştiint. univ., Al. i «cisa» den Ias. Sec., 1, 1960, № 6, стр. 47—58.
23. Wazewski T. Systèmes des équations et des inégalités differentielles ordinaires aux deuxièmes membres monotones et leurs applications. Ann. Soc. Pol. Math., 1950, vol. 23, p. 112—166.
24. Персидский К. П. Об устойчивости решений дифференциальных уравнений. Изв. АН КазССР, 1950, т. 97, вып. 4.
25. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М., «Наука», 1967.
26. Матросов В. М. К теории устойчивости движения. ПММ, 1962, т. 26, вып. 6.
27. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.— Л., Гостехиздат, 1949.
28. Ла-Салль Ж., Лефшец С., Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. М., «Мир», 1964.
29. Барбашин Е. А. Введение в теорию устойчивости. М., «Наука», 1967.
30. Марачков В. П., Об одной теореме устойчивости. Изв. физ.-мат. об-ва и научно-исслед. ин-та матем. и мех. при Казанском ун-те, сер. 3, 1940, т. 12, стр. 171—174.
31. Озиранер А. С. Задача обратимости теоремы Марачкова об асимптотической устойчивости. Вестн. МГУ, матем., механ., 1971, № 3.
32. Румянцев В. В. Об оптимальной стабилизации управляемых систем. ПММ, 1970, т. 34, вып. 3.
33. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М., Гостехиздат, 1957.
34. Соболев В. И. Лекции по дополнительным главам математического анализа. М., «Наука», 1968.
35. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М., «Наука», 1966.
36. Барбашин Е. А., Красовский Н. Н. Об устойчивости движения в целом. Докл. АН, 1952, т. 86, вып. 3.
37. Барбашин Е. А., Красовский Н. Н. О существовании функций Ляпунова в случае асимптотической устойчивости в целом. ПММ, 1954, т. 18, вып. 3.

Технический редактор *Э. Ф. Бунова*

Сдано в набор 25/I-1972 г. Т-06354 Подписано к печати 29/III-72 г. Тираж 2800 экз.
Зак. 101 Формат бумаги $70 \times 108^1/_{16}$ Усл. печ. л. 18,2+1 вкл. Бум. л. $6^1/_2$ Уч.-изд. л. 17,9

2-я типография издательства «Наука». Москва, Шубинский пер., 10