

УДК 517.9

О ТОЧНОСТИ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАМКНУТОЙ СЛЕДЯЩЕЙ СИСТЕМЫ

П. И. Зинюков

(Москва)

Исследуется вопрос о точности замкнутой следящей системы с объектом, описываемым линейным дифференциальным уравнением второго порядка и заранее выбранным законом управления с нелинейностью типа «насыщение». Приводится алгоритм определения точного значения максимальной накопленной ошибки на бесконечном интервале времени.

1. Рассматривается управляемая система, выходная величина которой $y(t)$ должна воспроизводить заранее неизвестные входные сигналы $x(t)$ из класса функций X с ограниченной скоростью изменения $|x'(t)| \leq m_0$, $x(0) = 0$.

Поведение управляемого объекта под воздействием управляющего сигнала v описывается уравнением

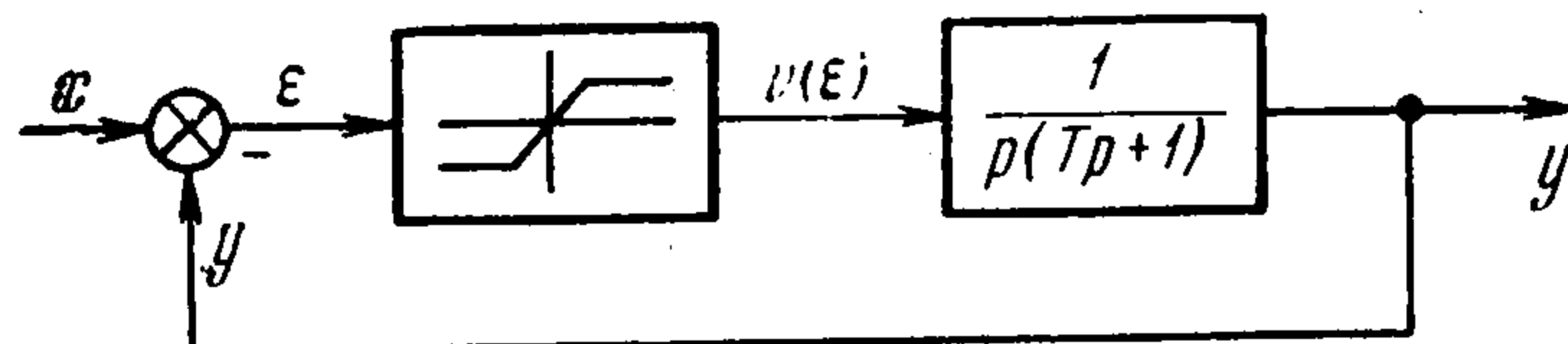
$$Ty'' + y' = v, \quad y(0) = y'(0) = 0 \quad (1.1)$$

В качестве закона управления принята жесткая обратная связь

$$v(\varepsilon) = k\varepsilon \quad (|k\varepsilon| \leq u_0), \quad v(\varepsilon) = u_0 \operatorname{sign} \varepsilon \quad (|k\varepsilon| > u_0) \quad (1.2)$$

$$\varepsilon(t) = x(t) - y(t) \quad (k > 0)$$

где u_0 — ограничение на управляющий сигнал. В дальнейшем предполагается, что $m_0 < u_0$. Структурная схема системы изображена на фиг. 1.



Фиг. 1

В [1] для закона управления (1.2) и управляемого объекта, описываемого уравнением порядка n с запаздыванием, приведена оценка сверху для величины ε_∞ , где

$$\varepsilon_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \{ \max_{x \in X} \max_{\tau \in [0, t]} |\varepsilon(\tau)| \} \quad (1.3)$$

Ниже для объекта, описываемого уравнением второго порядка, приводится алгоритм нахождения точного значения величины ε_∞ , причем используется другое, эквивалентное (1.3) (что следует из стационарности) определение

$$\varepsilon_\infty = \max_{x \in X} \{ \max_{t \in [0, \infty]} |\varepsilon(t)| \}$$

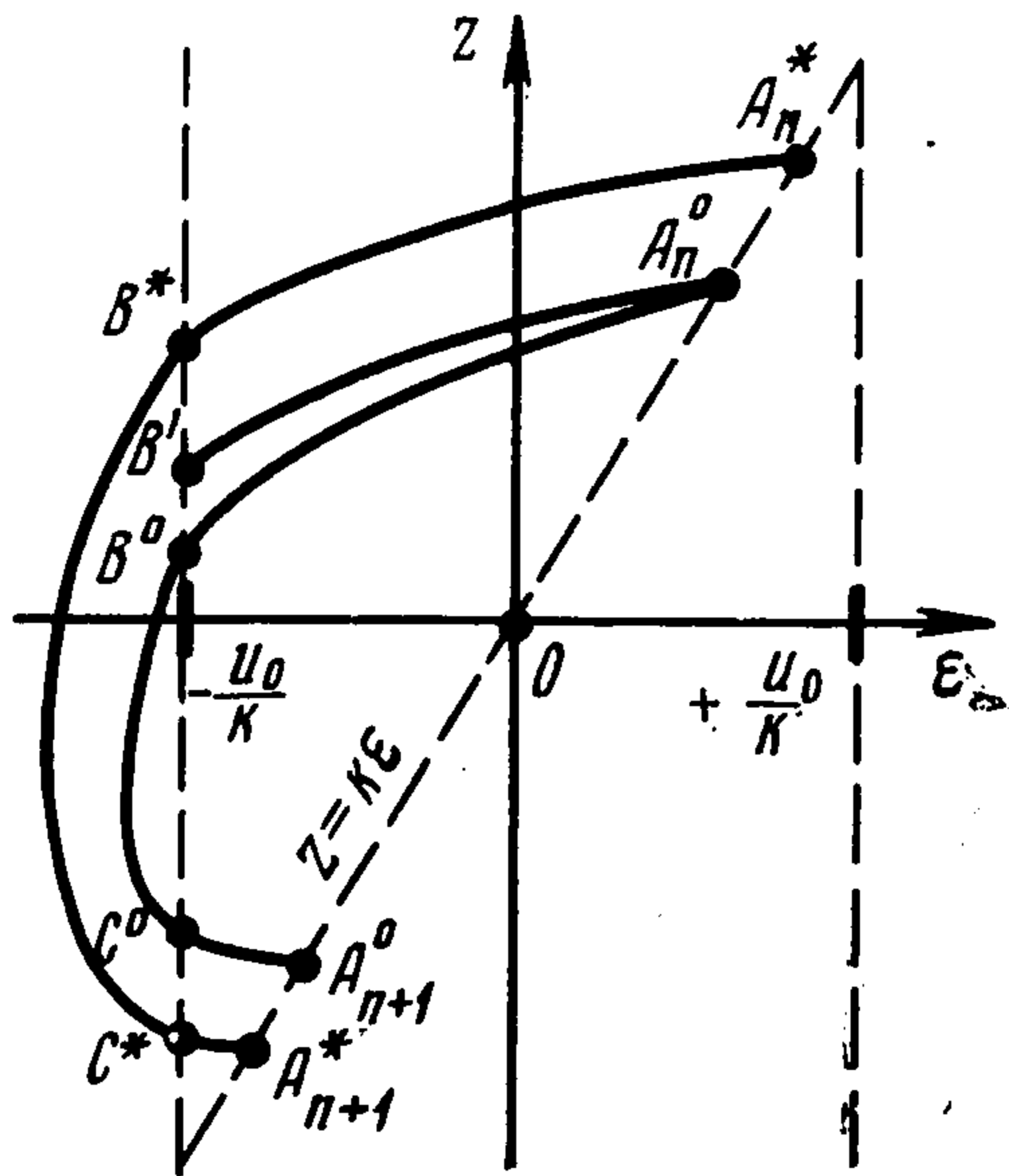
2. Обозначим $y' = z$, $x' = u$. Назовем u управлением, а то управление u , на котором реализуется ε_∞ — оптимальным управлением. Уравнения замкнутой системы запишем в виде

$$\varepsilon' = -z + u, \quad z' = -\frac{1}{T}z + \frac{1}{T}v(\varepsilon), \quad |u| \leq m_0, \quad \varepsilon(0) = z(0) = 0 \quad (2.1)$$

и рассмотрим их на фазовой плоскости (фиг. 2).

Теорема. Управление u^* , которое принимает в области $z > k\varepsilon$ значение $-m_0$, а в области $z < k\varepsilon$ значение $+m_0$, является оптимальным (на самой линии $z = k\varepsilon$ управление u^* не определено).

Доказательство. Пусть u° — произвольное управление, удовлетворяющее $|u^\circ| \leq m_0$. Положим u^* в начале координат равным $m_0 \operatorname{sign} u^\circ(t_1)$, где t_1 — первый момент времени, в который $u^\circ \neq 0$, тогда при любом из управлений u^* и u° изображающие точки из начала координат попадут в одну и ту же область (либо $z < k\varepsilon$, либо $z > k\varepsilon$),



Фиг. 2

пересекут линию $z = k\varepsilon$, будут продолжать движение в другой области и т. д. Обозначим точки i -го пересечения линии $z = k\varepsilon$ с соответствующими фазовыми траекториями через A_i^* и A_i° , их координаты через z_i^* и z_i° (точки A_0^* и A_0° совпадают с началом координат). Утверждается, что для всех точек A_i^* и A_i° справедливы неравенства $|z_i^\circ| \leq |z_i^*| \leq u_0$.

Доказательство проводится по индукции.

Для $i = 0$ неравенства справедливы ($z_0^* = z_0^\circ = 0$).

Предположим, что неравенства справедливы для $i = n$

$$|z_n^\circ| \leq |z_n^*| \leq u_0 \quad (2.2)$$

и докажем их для $i = n + 1$. Рассмотрим куски фазовых траекторий $A_n^* A_{n+1}^*$ и $A_n^\circ A_{n+1}^\circ$

(фиг. 2). Для определенности будем полагать, что они лежат в области $z > k\varepsilon$. Каждый из этих кусков может либо пересечь линию $\varepsilon = -u_0/k$, либо не пересечь ее. Таким образом, возможны четыре комбинации этих двух случаев. Рассмотрим только одну из них, а именно: оба куска пересекли линию $\varepsilon = -u_0/k$ (доказательства других комбинаций аналогичны). Обозначим через B^* , C^* — точки первого и последнего пересечения линии $\varepsilon = -u_0/k$ с $A_n^* A_{n+1}^*$, через B° , C° — с $A_n^\circ A_{n+1}^\circ$. Точки B^* , C^* , B° , C° разбивают соответствующие куски фазовых траекторий на три участка. Рассмотрим первый участок: $A_n^* B^*$ и $A_n^\circ B^\circ$. Обозначим через B' точку первого пересечения линии $\varepsilon = -u_0/k$ с фазовой траекторией, исходящей из A_n° при $u = -m_0$. Так как $z > k\varepsilon$, то из (2.1), следует

$$d\varepsilon/dz|_{u=-m_0} \geq d\varepsilon/dz|_{u=u^\circ}$$

Отсюда $z_{B'} \geq z_{B^\circ}$ (где $z_{B'}$, z_{B° — ординаты точек B' , B°). Учитывая, что $A_n^* B^*$ и $A_n^\circ B^\circ$ не могут пересечься (исключая случай тождественного совпадения), получаем $z_{B^*} \geq z_{B'}$ и, значит, $z_{B^*} \geq z_{B^\circ}$. Кроме того, из уравнений (2.1) и неравенств (2.2) следует $-m_0 \leq z_{B^*} \leq u_0$, $-m_0 \leq z_{B^\circ} \leq u_0$.

Рассмотрим теперь следующий участок: $B^* C^*$ и $B^\circ C^\circ$. Исходя из только что полученных неравенств и проводя аналогичные рассуждения, можно показать, что $z_{C^*} \leq z_{C^\circ}$, $-u_0 \leq z_{C^*} \leq -m_0$, $-u_0 \leq z_{C^\circ} \leq m_0$. Для последнего участка $C^* A_{n+1}^*$ и $C^\circ A_{n+1}^\circ$ точно так же показывается

$$|z_{n+1}^\circ| \leq |z_{n+1}^*| \leq u_0 \quad (2.3)$$

Утверждение доказано.

Обозначим через ε_i^* , ε_i° максимумы $|\varepsilon|$ при движении из точек A_i^* и A_i° до первого пересечения с линией $z = k\varepsilon$ при управлениях u^* и u° соответственно. Выше из (2.2) было выведено (2.3). Такими же рассуждениями из (2.2) можно вывести неравенство

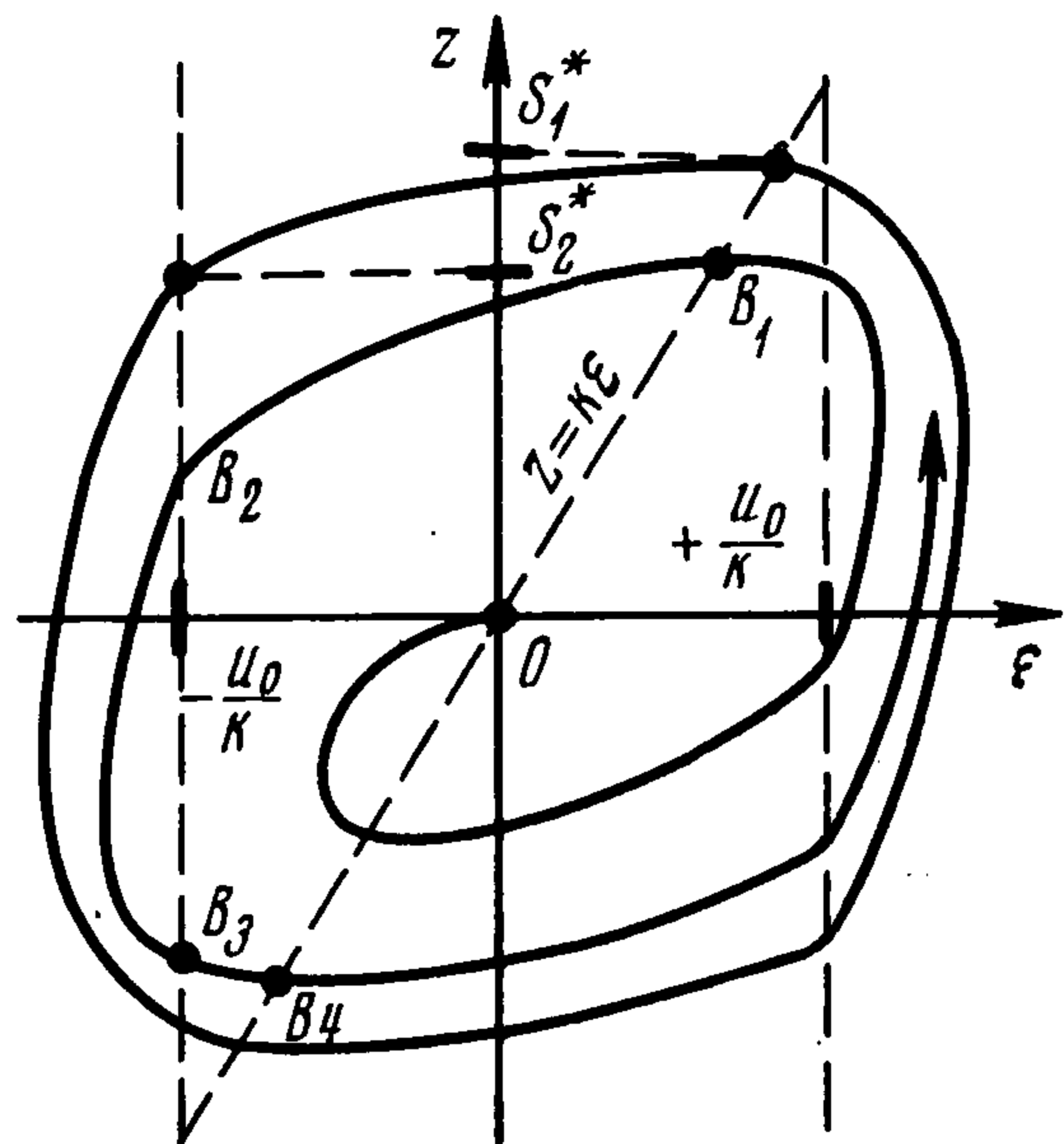
$$\varepsilon_n^\circ \leq \varepsilon_n^* \quad (2.4)$$

Таким образом, имеем две последовательности: $\{\varepsilon_n^\circ\}$ и $\{\varepsilon_n^*\}$, причем из способа их построения следует ($t \in [0, \infty]$)

$$\sup_n \varepsilon_n^\circ = \max |\varepsilon(t)| \quad (u = u^\circ), \quad \sup_n \varepsilon_n^* = \max |\varepsilon(t)| \quad (u = u^*) \quad (2.5)$$

Из (2.4) вытекает $\sup_n \varepsilon_n^\circ \leq \sup_n \varepsilon_n^*$. Отсюда и из (2.5) в силу произвольности u° следует справедливость теоремы.

3. В системе, описываемой уравнениями (2.1), при $u = u^*$ возможен предельный цикл, причем модуль максимального отклонения по координате ε в этом предельном цикле и будет искомой величиной ε_∞ . Для нахождения предельного цикла можно воспользоваться методом точечных преобразований [2], причем вследствие симметрии относительно начала координат достаточно рассмотреть лишь половину этого цикла: для определенности рассмотрим левую половину. Обозначим точки последовательного пересечения некоторого куска фазовой траектории при $u = u^*$ с линиями $z = k\varepsilon$ и $\varepsilon = -u_0/k$ через B_1, B_2, B_3, B_4 (фиг. 3), а их ординаты — через S_1, S_2, S_3, S_4 . Согласно [2] последовательность действий для определения предельного цикла такова.



Фиг. 3

1°. Найти функции $S_1(\tau_1), S_2(\tau_1), S_2(\tau_2), S_3(\tau_2), S_3(\tau_3), S_4(\tau_3)$, где τ_1 — время движения из B_1 в B_2 , τ_2 — из B_2 в B_3 , τ_3 — из B_3 в B_4 . Получение этих функций не представляет труда, так как уравнения (2.1) на соответствующих участках линейны. Приведем лишь окончательный результат

$$S_1(\tau_1) = -m_0 - \frac{u_0 - m_0}{kg_1(\tau_1)} e^{\mu\tau_1}, \quad g_1(\tau_1) = \frac{1}{k} \cos v\tau_1 + \frac{\mu/k - 1}{v} \sin v\tau_1 \quad (3.1)$$

$$S_2(\tau_1) = -m_0 - \frac{u_0 - m_0}{kg_1(\tau_1)} \left[\cos v\tau_1 + \frac{(\mu^2 + v^2)/k - \mu}{v} \sin v\tau_1 \right]$$

$$S_2(\tau_2) = (u_0 - m_0)\tau_2 [T(1 - e^{-\tau_2/T})]^{-1} - u_0, \quad S_3(\tau_2) = (u_0 - m_0)\tau_2 [T(e^{\tau_2/T} - 1)]^{-1} - u_0 \quad (3.2)$$

$$S_3(\tau_3) = -m_0 + \frac{u_0 - m_0}{kg_2(\tau_3)} \left[-\cos v\tau_3 + \frac{\mu^2 + v^2 - \mu}{kv} \sin v\tau_3 \right]$$

$$S_4(\tau_3) = -m_0 + \frac{u_0 - m_0}{g_2(\tau_3)} e^{-\mu\tau_3} \left[-\frac{1}{k} \cos^2 v\tau_3 + \frac{1}{v^2} \left(\frac{\mu - v^2}{k} + \mu \right) \sin^2 v\tau_3 \right] \quad (3.3)$$

$$g_2(\tau_3) = \frac{\cos v\tau_3}{k} + \frac{1}{v} \left(1 - \frac{\mu}{k} \right) \sin v\tau_3$$

где $-\mu \pm iv$ — комплексно-сопряженные корни уравнения $T\lambda^2 + \lambda + k = 0$. Случай действительных корней разобран ниже.

2°. Из (3.1), (3.2), считая τ_1, τ_2 параметрами, построить графики $S_1 = S_1(S_2), S_3 = S_3(S_2)$ и на их основе, считая S_2 параметром, построить график $-S_1 = -S_1(S_2)$.

3°. Из (3.3), считая τ_3 параметром, построить график $S_4 = S_4(S_3)$ и найти точку пересечения этого графика с графиком $-S_1 = -S_1(S_3)$. Ордината этой точки пересечения дает искомый параметр предельного цикла: S_1^* . По нему из графика $S_1 = S_1(S_2)$ определяется параметр S_2^* . Далее можно выразить ε_∞ через S_2^*

$$\varepsilon_\infty = \frac{u_0}{k} + T(m_0 + S_2^*) - T(u_0 - m_0) \ln \frac{S_2^* + u_0}{u_0 - m_0} \quad (3.4)$$

Заметим, что приведенная в [1] оценка величины ε_∞ для объекта, описываемого уравнением (1.2), будет иметь вид

$$\varepsilon_\infty \leq \frac{u_0}{k} + T(m_0 + u_0) - T(u_0 - m_0) \ln \frac{2u_0}{u_0 - m_0}$$

Она отличается от (3.4) тем, что S_2^* — ордината точки пересечения предельного цикла с линией $\varepsilon = -u_0/k$ — заменена ее оценкой сверху — значением u_0 .

Приведем результаты численного счета. При $m_0 = 1$, $u_0 = 2$, $T = 3$ и при k , принимающем последовательно значения 1, 2, 3, 4, ∞ , точные значения максимальной накопленной ошибки ε_∞ : 5.30, 4.85, 4.71, 4.65, 4.54, а оценки, приведенные в [1], соответственно дают 6,84, 5,84, 5,50, 5,34, 4.84. Результаты счета для других значений параметров дают точные значения ε_∞ , лежащие в пределах от 50 до 95% оценок, приведенных в [1].

4. Рассмотрим систему, в которой закон управления линеен: $v(\varepsilon) = k\varepsilon$. Для такой системы показано [3], что

$$\varepsilon_\infty = \frac{m_0}{k} \quad \left(k < \frac{1}{4T}\right) \quad (4.1)$$

$$\varepsilon_\infty = \zeta(m_0, k, T), \quad \zeta = \frac{m_0}{k} + 2 \sqrt{\frac{T}{k}} m_0 \exp\left(-\frac{\pi - \psi}{2T\nu}\right) \left[1 - \exp\left(-\frac{\pi}{2T\nu}\right)\right]^{-1}$$

$$\psi = \arctg(2T\nu) \quad \left(k \geq \frac{1}{4T}\right)$$

Разберем случай $k < 1/(4T)$. Здесь $|k\varepsilon| \leq m_0 < u_0$, т. е. добавление нелинейного ограничения (1.2) не влияет на работу системы. Отсюда для исходной нелинейной системы, описываемой (1.1), (1.2), при $k < 1/(4T)$ справедливо $\varepsilon_\infty = m_0/k$ (4.1).

Разберем случай $k \geq 1/(4T)$. Здесь при $\zeta \leq u_0/k$ по-прежнему $|k\varepsilon| \leq u_0$, и ε_∞ исходной нелинейной системы рассчитывается по формулам (4.1) для линейных систем, откуда видно, что ε_∞ монотонно уменьшается с ростом k . При $\zeta > u_0/k$ система выходит на участок насыщения характеристики (1.2), и ε_∞ рассчитывается по указанному выше алгоритму. Просчитанные для разных значений k примеры позволяют и здесь надеяться на монотонное уменьшение ε_∞ с ростом k , хотя доказать это не удалось.

Поступила 26 V 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Г н о е н с к и й Л. С. О точности некоторых нелинейных управляемых систем с ограничениями и запаздыванием. ПММ, 1970, т. 34, вып. 6.
2. А н д р о н о в А. А., В и т т А. А., Х а й к и н С. Э. Теория колебаний. М., Физматгиз, 1959.
3. Г н о е н с к и й Л. С., К а м е н с к и й Г. А., Э л ь с г о л ь ц Л. Э. Математические основы теории управляемых систем. М., «Наука», 1969.

УДК 531.391.5

МЕТОД ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА В ЗАДАЧЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ

А. С. О з и р а н е р, В. В. Р у м я н ц е в

(Москва)

Постановка задачи об устойчивости движения по отношению к части переменных дана А. М. Ляпуновым ([1], стр. 370).

И. Г. Малкин [2] в примечаниях к теоремам Ляпунова указал (без доказательства) некоторые условия переноса теорем Ляпунова на случай устойчивости по части переменных.

В работе [3] введено понятие функции $V(t, x_1, \dots, x_n)$, знакоопределенной относительно x_1, \dots, x_m ($m \leq n$), и доказаны теоремы об устойчивости и асимптотической устойчивости по отношению к части переменных, обобщающие теоремы Ляпунова [1].