При наличии кратных корней $\omega^2 = \omega_1^2 = \ldots = \omega_d^2$ уравнения частот (1.2) у неавтономной системы изменится только структура решений

$$x_k(t) = \varphi_k(t) + \sum_{r=1}^{d} q_k^{(r)}(x)^{(r)}(t) + \sum_{r=d+1}^{n} p_k^{(r)} x^{(r)}(t) \tag{6.10}$$

Значения коэффициентов $q_k^{(r)}$ приведены в п. 5.

Поступила 28 XII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., Гостехиздат, 1956.
2. Проскуряков А. П. Об одном свойстве периодических решений квазилинейных автономных систем с несколькими степенями свободы. ПММ, 1960, т. 24, вып. 4.
3. Проскуряков А. П. Периодические колебания квазилинейных автономных систем с двумя степенями свободы. ПММ, 1960, т. 24, вып. 6.
4. Проскуряков А. П. Построение периодических решений квазилинейных автономных систем с несколькими степенями свободы в особых случаях. ПММ, 1963, т. 27, вып. 6.
5. Проскуряков А. П. К построению периодических решений квазилинейных автономных систем с несколькими степенями свободы. ПММ, 1962, т. 26, вып. 2.
6. Проскуряков А. П. Структура периодических решений квазилинейной автономной системы с несколькими степенями свободы в случае разных, но частично несоизмеримых частот. ПММ, 1968, т. 32, вып. 3.
7. Проскуряков А. П. Устойчивость одночастотных периодических решений квазилинейных автономных систем с двумя степенями свободы. ПММ, 1965, т. 29, вып. 5.
8. Ламб Г. Теоретическая механика, т. 3. М.— Л., Гостехиздат, 1936.
9. Плотникова Г. В. О построении периодических решений неавтономной квазилинейной системы с двумя степенями свободы. ПММ, 1960, т. 24, вып. 5.

УДК 517.9

РАЗРЫВНАЯ ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ

В. Г. Веретенников, В. А. Синицын

(Москва)

На основании результатов, полученных в [1-3] развивается обобщенный подход к решению разрывных вариационных задач оптимизации процессов управления. Получены необходимые условия оптимальности (условия Вейерштрасса). Решена задача синтеза оптимальной по быстродействию системы второго порядка с ограничениями второго типа, приводящими к разрывам фазовых координат. Показано, как могут быть учтены ограничения второго типа, влияющие на синтезируемый процесс.

1. Рассматриваемые системы описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями и связями вида

$$x_s^{\cdot} = f_s(x, u, t), \quad \varphi_j(u, t) = 0 \quad (s = 1, \ldots, n; \quad j = 1, \ldots; \ m < r) \tag{1.1}$$

Здесь $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $u = \{u_1, \ldots, u_r\}$ — фазовые координаты и управления. Функции $x_s(t)$ непрерывны и имеют кусочно-непрерывные производные на отрезке $[t_0, T]$ за исключением заданного числа отрезков $[t_i^-, t_i^+] \subset [t_0, T]$ $(i = 0, 1, \ldots, q)$, на которых вместо связей (1.1) имеют место зависимости

$$\psi_l\,[x^-(t_0), t_0^-, x^+(t_0), t_0^+, \ldots, x^-(t_q), t_q^-, x^+(t_q), t_q^+] = 0 \tag{1.2}$$
$$(l = 1, \ldots, p < (2n+2)(q+1),\ x^-(t_0) = x(t_0),\ t_0^- = t_0,\ x^+(t_q) = x(T),\ t_q^+ = T)$$

Обозначения $x^-(t_i)$, $x^+(t_i)$ имеют следующий смысл:

$$x^-(t_i) = \lim_{\varepsilon\to 0} x(t_i^- - \varepsilon), \qquad x^+(t_i) = \lim_{\varepsilon\to 0} x(t_i^+ + \varepsilon)$$

Задача состоит в том, чтобы среди кусочно-непрерывных функций $u_k(t)$ ($k = 1, \ldots, r$) и $x_s(t)$ ($s = 1, \ldots, n$), удовлетворяющих (1.1) и (1.2), найти такие, которые минимизируют функционал

$$J = \psi_0\,[x^-(t_0), t_0^-, x^+(t_0), t_0^+, \ldots, x^-(t_q), t_q^-, x^+(t_q), t_q^+] + \sum_{i=0}^{q-1} \int_{t_i^+}^{t_{i+1}^-} f_0(x, u, t)\,dt$$

Такая постановка служит дальнейшим обобщением вариационных задач, рассмотренных в работах [1–3]. Она включает случаи, когда фазовые координаты в системе могут иметь разрывы непрерывности первого рода нефиксированной величины. Допускаются также разрывы непрерывности аргумента t и возможно возникновение этих разрывов на концах изучаемого отрезка $[t_0, T]$.

Предполагается, что функции f_s ($s = 0, 1, \ldots, n$), φ_j ($j = 1, \ldots, m$), ψ_l ($l = 0, 1, \ldots, p$) относительно своих аргументов обладают свойствами, указанными в [4].

Для решения поставленной задачи получим необходимое условие Вейерштрасса.

2. В рассматриваемом случае можно доказать лемму о включении [4]. Отличие будет заключаться только в построении допустимого семейства кривых, которое составляем из системы q-семейств, являющихся допустимыми на участках непрерывности $x_s(t)$. В построенном таким образом $(p + 1)$-параметрическом семействе экстремаль содержится при нулевых значениях параметров. Для этого необходимо выполнение условия стационарности

$$\Delta I = 0 \tag{2.1}$$

$$I = \psi + \sum_{i=0}^{q-1} \int_{t_i^+}^{t_{i+1}^-} \Big(\sum_{s=1}^{n} \lambda_s x_s^{\cdot} - H\Big)\,dt$$

$$\psi = \psi_0 + \sum_{l=1}^{p} \rho_l \psi_l, \qquad H = \sum_{s=0}^{n} \lambda_s f_s + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \varphi_j \qquad (\lambda_0 = -1)$$

Здесь ρ_l, $\lambda_s(t)$, $\mu_j(t)$ — неопределенные множители.

Применяя лемму Лагранжа, из (2.1) получаем следующие соотношения:

1) на участках непрерывности фазовых координат

$$\lambda_s^{\cdot} + \frac{\partial H}{\partial x_s} = 0 \quad (s = 1, \ldots, n), \qquad \frac{\partial H}{\partial u_k} = 0 \quad (k = 1, \ldots, r) \tag{2.2}$$

2) в моменты t_i^-, t_i^+ $(i = 0, 1, \ldots, q)$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_s(t_0)} = 0, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial t_0} = 0, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial x_s(T)} = 0, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial T} = 0$$

$$\lambda_s^+(t_i) - \frac{\partial\psi}{\partial x_s^+(t_i)} = 0, \qquad (H^+)_{t_i} = -\frac{\partial\psi}{\partial t_i^+} \qquad (i = 0, 1, \ldots, q-1) \tag{2.3}$$

$$\lambda_s^-(t_i) + \frac{\partial\psi}{\partial x_s^-(t_i)} = 0, \qquad (H^-)_{t_i} = \frac{\partial\psi}{\partial t_i^-} \qquad (i = 1, \ldots, q)$$

$$(s = 1, \ldots, n)$$

Разрывы управлений не влияют на непрерывность множителей $\lambda_s(t)$ и функций H [1].

Для определения неизвестных $(2n + r + m)$ функций $x_s, (t), \lambda_s(t), u_k(t), \mu_j(t)$ и $[2(n + 1)(q + 1) + p]$ постоянных имеем $(2n + r + m)$ уравнений (1.1), (2.2) и $[2(n + 1)(q + 1) + p]$ соотношений (1.2), (2.3).

В задачах для систем с разрывами только фазовых координат в число функций ψ_l включаются равенства

$$\psi_i = t_i^- - t_i^+ = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, q < p)$$

а для систем с непрерывными фазовыми координатами или с фиксированной величиной разрыва — также следующие равенства

$$\psi_\nu = x_s^-(t_i) - x_s^+(t_i) = X_{si} \qquad (X_{si} = 0 \text{ или const}, \ \nu = 1, \ldots, n(q + 1))$$

При этом из (2.3) следуют известные условия, полученные в [1-3].

Неравенство Вейерштрасса, которое служит необходимым условием сильного минимума функционала, приводится к виду

$$H(x, \lambda, u, \mu, t) \geqslant H(x, \lambda, u^*, \mu, t) \tag{2.4}$$

где $u(t)$ — управления, сообщающие минимум J, а $u^*(t)$ — любые допустимые управления. Условие (2.4) должно выполняться на участках непрерывности фазовых координат (t_i^+, t_{i+1}^-) $(i = 0, 1, \ldots, q - 1)$.

3. *Пример*. Рассмотрим задачу оптимального быстродействия для системы

$$x_1^{\cdot} = x_2, \qquad x_2^{\cdot} = u \qquad (|u| \leqslant 1) \tag{3.1}$$

Эти уравнения описывают, например, движение точки единичной массы под действием ограниченной по величине управляющей силы. Если трактовать это движение, как движение шарика по жолобу с упорами на концах, то диапазон изменения координаты x_1 будет ограничен

$$|x_1| \leqslant X_1 \tag{3.2}$$

В момент $t = t_1$, когда точка достигает упора ($x_2^-(t_1) > 0$ — для правого упора или $x_2^-(t_1) < 0$ — для левого) происходит удар. Принимая удар неупругим, получим, что скорость скачком падает до нуля

$$x_2^+(t_1) = 0 \tag{3.3}$$

Для фазовой координаты x_1 и t при достижении упора имеют место соотношения

$$|x_1^-(t_1)| - X_1 = 0, \qquad x_1^+(t_1) - x_1^-(t_1) = 0, \qquad t_1^+ - t_1^- = 0 \tag{3.4}$$

Для системы (3.1) при ограничении (3.2), приводящем к (3.3), (3.4), необходимо выбрать u так, чтобы время перехода точки из состояния $x_1(t_0) = x_{10}$, $x_2(t_0) = x_{20}$ в положение равновесия $x_1(T) = x_2(T) = 0$ было минимально.

Рассмотрим влияние на синтезируемый процесс только правой границы, так как для левой границы все условия получаются аналогично.

Составляем функции H и ψ в виде

$$H = -1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u \tag{3.5}$$

$$\psi = \rho_1 x_2^+(t_1) + \rho_2[x_1^-(t_1) - X_1] + \rho_3[x_1^+(t_1) - x_1^-(t_1)] + \rho_4(t_1^+ - t_1^-) \tag{3.6}$$

Здесь в функции ψ опущены члены, относящиеся к моментам t_0, T, так как значения фазовых координат в эти моменты фиксированы.

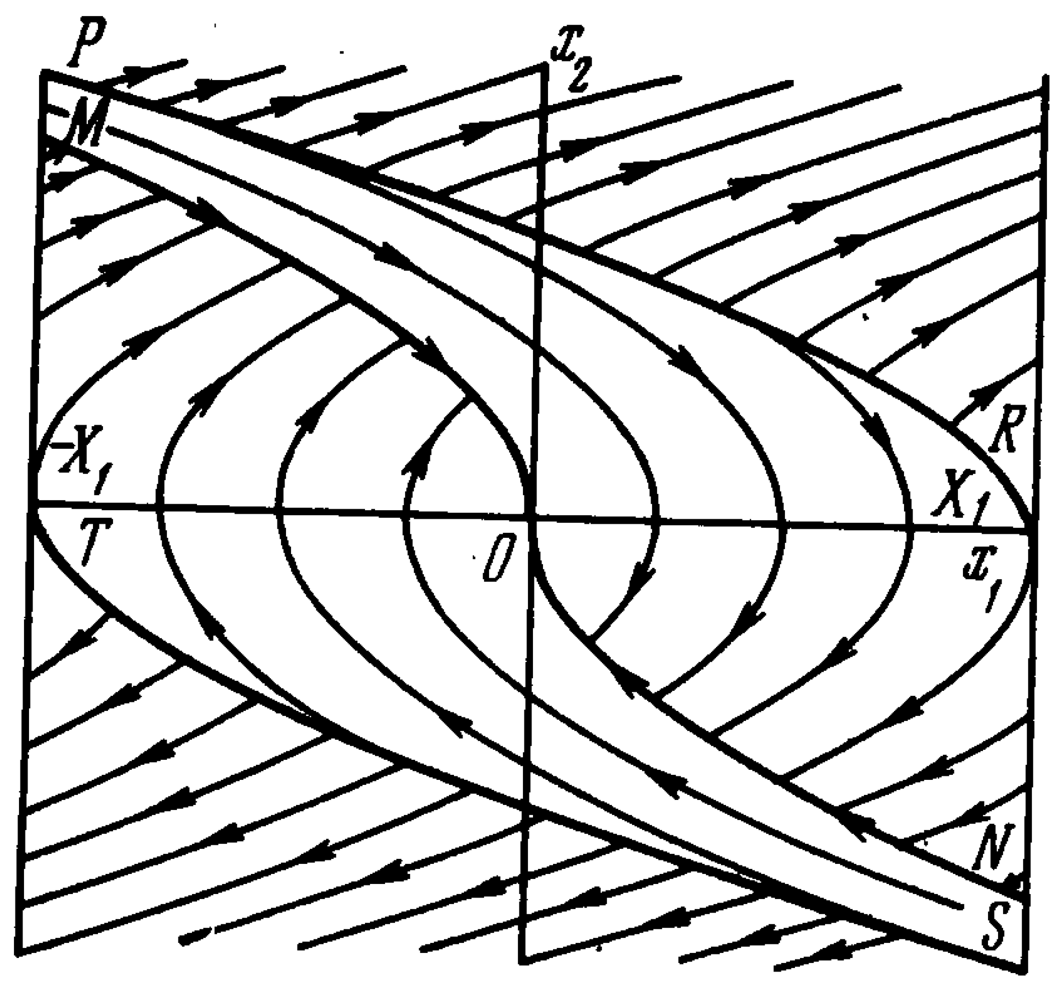
Условия (2.2), (2.4) приводят к уравнениям

$$\lambda_1^{\cdot} = 0, \qquad \lambda_2^{\cdot} = -\lambda_1, \qquad u = \operatorname{sign} \lambda_2 \tag{3.7}$$

Из условий (2.3) имеем

$$\lambda_2^-(t_1) = 0, \qquad (H^-)_{t_1} = (H^+)_{t_1} \tag{3.8}$$

Учитывая (3.3), (3.7) и $x_2^-(t_1) > 0$, из $H^- = H^+$ получаем $\lambda_1^-(t_1) > 0$, что соответствует необходимости выполнения на полуинтервале $[t_0, t_1)$ условия $\lambda_2(t) > 0$. Таким образом, оптимальным будет движение при $u = 1$.



Дальнейшее движение на полуинтервале $(t_1^+, T]$, обеспечивающее оптимальный перевод точки из положения $x_1 = X_1$, $x_2 = 0$ в начало координат, находится без каких-либо особенностей с переключением управления на кривой ON $x_1 = {}^1/_2\, x_2^2$ (фигура).

Таким образом, для оптимального движения с выходом на границу $x_1 = X_1$ переключение управления происходит при $x_1 = X_1$ и на кривой ON. Область начальных состояний, оптимальное движение из которой достигается при двух переключениях управления, лежит выше кривой PR (или соответственно ниже кривой ST для движений, достигающих левой границы). При движениях, начинающихся с кривых PR и ST, минимальное время перехода в начало координат можно получить двумя путями: с выходом или без выхода на границу. Используя это свойство для PR, получим

$$x_2 + \sqrt{x_1 + {}^1/_2 x_2^2} - {}^1/_2 \sqrt{x_2^2 + 2(X_1 - x_1)} - \sqrt{X_1} = 0$$

а кривая ST расположена симметрично относительно начала координат. Семейство оптимальных траекторий изображено на фигуре.

Оптимальное по быстродействию движение системы (3.1) без ограничений на фазовые координаты достигается при двух интервалах постоянства управления $u = \pm 1$ [5].

Наличие в системе ограничителей привело к выделению области, оптимальное движение из которой происходит с тремя интервалами постоянства управления. Из точек фазовой плоскости, лежащих в указанной области (выше PR и ниже ST), переход в начало координат происходит за меньшее время, чем для системы без ограничителей. Это происходит вследствие того, что ограничения второго типа не могут быть нарушены [2] и служат составной частью системы, изменяющей ее свойства. В этом заключается принципиальное отличие ограничений второго типа от ограничений первого типа, налагаемых извне [2].

Поступила 4 III 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Троицкий В. А. О вариационных задачах оптимизации процессов управления. ПММ, 1962, т. 26, вып. 1.
2. Троицкий В. А. Вариационные задачи оптимизации процессов управления в системах с ограниченными координатами. ПММ, 1962, т. 26, вып. 3.
3. Троицкий В. А. Об оптимальных режимах движения многоступенчатых ракет. Космич. исследования, 1967, т. 5, вып. 2.
4. Блисс Г. А. Лекции по вариационному исчислению. М., Изд-во иностр. лит., 1950.
5. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов, М., Физматгиз, 1961.