УДК 534

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ЧАСТОТАХ

А. П. Проскуряков

(Москва)

Излагаются в сжатом виде способы построения по методу Пуанкаре периодических решений квазилинейных (автономных и неавтономных) систем, составленных из уравнений второго порядка. Рассматривается общий случай простых или кратных частот порождающей системы при наличии критических (резонансных), нулевых, а также некритических (нерезонансных) частот. Принято, что амплитудные уравнения имеют только простые решения. Для автономных систем приведены два способа получения коэффициентов разложений искомых функций в ряды по малому параметру.

В отличие от книги И. Г. Малкина [1], в которой рассматриваются системы, составленные из уравнений первого порядка, а построение решений, после получения основных амплитуд, ведется методом интегрирования уравнений рядами, в статье получены для каждого случая готовые формулы для подсчета нескольких приближений.

1. Рассмотрим квазилинейную автономную систему с n степенями свободы

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}x_k^{\cdot\cdot}+c_{ik}x_k)=\mu F_i(x_1,\ldots,x_n,x_1^{\cdot},\ldots,x_n^{\cdot},\mu)$$

$$a_{ik}=a_{ki},\qquad c_{ik}=c_{ki}\qquad (i,k=1,\ldots,n) \tag{1.1}$$

Функции $F_i(x_s, x_s^{\cdot}, \mu)$ предполагаются аналитическими от x_s и $x_s^{\cdot}$ в области их изменения, а также от малого параметра μ при $0\leqslant\mu<\mu_0$.

Будем считать, что все корни уравнения частот порождающей системы

$$\Delta(\omega^2)=|c_{ik}-\omega^2a_{ik}|=0\qquad (i,k=1,\ldots,n) \tag{1.2}$$

простые и неотрицательные. Пусть среди этих частот, помимо критических, имеется нулевая частота и некритические частоты, например,

$$\omega_r=k_r\omega_0\quad (r=1,\ldots,l-1),\qquad \omega_l=0 \tag{1.3}$$

Здесь k_r — целые положительные числа, а ω_0 — частота искомого периодического решения порождающей системы. Некритические частоты ω_r имеют индексы $r=l+1,\ \ldots,n$.

Построим периодические решения квазилинейной системы (1.1) с периодом $T=T_0+\alpha$, где $T_0=2\pi/\omega_0$ — период порождающего решения, а α — функция μ, исчезающая при $\mu=0$.

В работе [2] показано, что любое решение квазилинейной системы при различных частотах порождающей системы имеет структуру

$$x_k(t)=\sum_{r=1}^{n}p_k^{(r)}x^{(r)}(t),\qquad p_k^{(r)}=\frac{\Delta_{ik}(\omega_r^2)}{\Delta_{i1}(\omega_r^2)}\qquad (i,k=1,\ldots,n) \tag{1.4}$$

где $\Delta_{ik}(\omega_r^2)$ — алгебраическое дополнение элемента $c_{ik}-\omega_r^2a_{ik}$ в определителе $\Delta(\omega_r^2$ формулы (1.2). Функции $x^{(r)}(t)$, входящие в решение (1.4), имеют вид [3-5]

$$x^{(r)}(t)=(A_{r0}+\beta_r)\cos\omega_rt+\frac{B_{r0}+\gamma_r}{\omega_r}\sin\omega_rt+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\left[C_m^{(r)}(t)+\sum_{s=1}^{l}\frac{\partial C_m^{(r)}(t)}{\partial A_{s0}}\beta_s+\sum_{s=2}^{l-1}\frac{\partial C_m^{(r)}(t)}{\partial B_{s0}}\gamma_s+\ldots\right]\mu^m$$

$$(r=1,\ldots,l-1,l+1,\ldots n) \tag{1.5}$$

Функция $x^{(l)}(t)$ получается из формулы (1.5) предельным переходом $\omega_l \to 0$

$$x^{(l)}(t) = A_{l0} + \beta_l + (B_{l0} + \gamma_l)\,t + \sum_{m=1}^{\infty} [C_m^{(l)}(t) + \ldots]\,\mu^m \tag{1.6}$$

Начальные данные функций $x^{(r)}(t)$ и $x^{\cdot(r)}(t)$ соответственно равны $A_{r0} + \beta_r$ и $B_{r0} + \gamma_r$. При этом β_r и γ_r являются добавками к начальным данным порождающего решения, обращающимися в нуль при $\mu = 0$. Используя автономность системы (1.1) и условия периодичности порождающего решения, получим

$$B_{10} = 0,\ \gamma_1 = 0,\ B_{l0} = 0,\ A_{r0} = B_{r0} = 0\ (r = l + 1, \ldots, n) \tag{1.7}$$

Функции $C_m^{(r)}(t)$ вычисляются по формулам

$$C_m^{(r)}(t) = \Big[\Delta_0\omega_r \prod_{s=1}^{n}{}' (\omega_s^2 - \omega_r^2)\Big]^{-1} \int_0^t R_m^{(r)}(t_1) \sin \omega_r (t - t_1)\, dt_1$$

$$(r = 1, \ldots, l - 1, l + 1, \ldots, n) \tag{1.8}$$

$$C_m^{(l)}(t) = \Big[\Delta_0 \prod_{s=1}^{n}{}' \omega_s^2\Big]^{-1} \int_0^t R_m^{(l)}(t_1)(t - t_1)\, dt_1$$

Штрих у произведений означает, что значение индекса $s = r$ (или $s = l$) пропущено. Кроме того, имеем

$$\Delta_0 = |a_{ik}| > 0, \qquad R_m^{(r)}(t) = \sum_{i=1}^{n} \Delta_{i1}(\omega_r^2)\, H_{im}(t) \tag{1.9}$$

Величины $H_{im}(t)$ являются коэффициентами разложения функций $\mu F_i(x_s, x_s^{\cdot}, \mu)$ при $\beta_s = \gamma_s = 0$ в ряды по степеням параметра μ

$$H_{im}(t) = \frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{d^{m-1}F_i}{d\mu^{m-1}}\right)_{\beta_s = \gamma_s = \mu = 0} \tag{1.10}$$

Первые две величины $H_{im}(t)$ в развернутом виде будут

$$H_{i1}(t) = F_i(x_{10}, \ldots, x_{n0}, x_{10}^{\cdot}, \ldots, x_{n0}^{\cdot}, 0) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

$$H_{i2}(t) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k}\right)_0 C_{k1}^{*} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k^{\cdot}}\right)_0 C_{k1}^{\cdot *} + \left(\frac{\partial F_i}{\partial \mu}\right)_0 \tag{1.11}$$

Нулевой индекс у скобок при производных означает, что производные берутся при $\beta_s = \gamma_s = \mu = 0$. Функции $C_m^{(r)}(t)$ в общем случае не периодические. Нетрудно показать, что они являются аналитическими функциями начальных данных $A_{s0} + \beta_s$ и $B_{s0} + \gamma_s$ только в том случае, когда A_{s0} или B_{s0} не равны нулю [6]. Этим объясняются пределы суммирования по индексу s в формулах (1.5).

Условия периодичности решений системы (1.1) будут

$$x^{(r)}(T_0 + \alpha) = A_{r0} + \beta_r\ (r = 1, \ldots, l),\ x^{(r)}(T_0 + \alpha) = \beta_r\ (r = l + 1, \ldots, n)$$

$$x^{\cdot(1)}(T_0 + \alpha) = 0,\ x^{\cdot(r)}(T_0 + \alpha) = B_{r0} + \gamma_r\ (r = 2, \ldots, l - 1)$$

$$x^{\cdot(r)}(T_0 + \alpha) = \gamma_r\ (r = l, \ldots, n) \tag{1.12}$$

Одно из условий периодичности, например $x^{\cdot(1)}(T_0 + \alpha) = 0$ можно использовать для определения параметра α. Будем искать α в виде разложения по β_s ($s = 1, \ldots, l$), $\gamma_s(2, \ldots, l - 1)$ и μ

$$\alpha = \sum_{m=1}^{\infty}\Big[N_m(T_0) + \sum_{s=1}^{l} \frac{\partial N_m}{\partial A_{s0}}\beta_s + \sum_{s=2}^{l-1}\frac{\partial N_m}{\partial B_{s0}}\gamma_s + \ldots\Big]\mu^m \tag{1.13}$$

Последовательно дифференцируя равенство $x^{\cdot(1)}(T_0+\alpha)=0$ по μ, находим

$$\left(\frac{\partial\alpha}{\partial\mu}\right)_0=\frac{1}{A_{10}\omega_1^2}C_1^{\cdot(1)}(T_0)=N_1(T_0)$$
$$\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial\mu^2}\right)_0=\frac{2}{A_{10}\omega_1^2}\left[C_2^{\cdot(1)}(T_0)+N_1C_1^{\cdot\cdot(1)}(T_0)\right]=2N_2(T_0) \qquad (1.14)$$

и т. д. Разложим по параметру α левые части условий периодичности функций $x^{(r)}(t)$ $(r=1,\ldots,l-1)$ и $x^{\cdot(r)}(t)$ $(r=2,\ldots,l)$ и подставим в них α из формулы (1.13). Отбрасывая в левых частях этих условий множитель $\mu\neq0$, получим

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left[M_{jm}(T_0)+\sum_{s=1}^{l}\frac{\partial M_{jm}}{\partial A_{s0}}\beta_s+\sum_{s=2}^{l-1}\frac{\partial M_{jm}}{\partial B_{s0}}\gamma_s+\ldots\right]\mu^{m-1}=0$$
$$(j=1,2,\ldots,2l-2) \qquad (1.15)$$

Коэффициенты $M_{j1}(T_0)$ имеют значения

$$M_{r1}(T_0)=C_1^{(r)}(T_0)+N_1B_{r0} \qquad (r=1,\ldots,l-1)$$
$$M_{r+l-2,1}(T_0)=C_1^{\cdot(r)}(T_0)-N_1A_{r0}\omega_r^2 \qquad (r=2,\ldots,l) \qquad (1.16)$$

Коэффициенты $M_{j2}(T_0)$ при μ в первой степени равны

$$M_{r2}(T_0)=C_2^{(r)}(T_0)+N_1C_1^{\cdot(r)}(T_0)+N_2B_{r0}-{}^1\!/_2N_1^2A_{r0}\omega_r^2 \qquad (r=1,\ldots,l-1)$$
$$M_{r+l-2,2}(T_0)=C_2^{\cdot(r)}(T_0)+N_1C_1^{\cdot\cdot(r)}(T_0)-N_2A_{r0}\omega_r^2-{}^1\!/_2N_1^2B_{r0}\omega_r^2$$
$$(r=2,\ldots,l) \qquad (1.17)$$

и т. д. В формулах (1.16) и (1.17) следует положить $B_{10}=B_{l0}=0$.

Приравнивая нулю постоянные члены в условиях (1.15) и учитывая, что $\beta_s(0)=\gamma_s(0)=0$, получим

$$C_1^{(1)}(T_0)=0, \quad C_1^{(r)}(T_0)+N_1B_{r0}=0$$
$$C_1^{\cdot(r)}(T_0)-N_1A_{r0}\omega_r^2=0, \quad C_1^{\cdot(l)}(T_0)=0 \qquad (r=2,\ldots,l-1) \quad (1.18)$$

Из этих уравнений находим амплитуды порождающего решения $A_{10},\ldots,A_{l0}$, $B_{20},\ldots,B_{l-1,0}$. В данной статье рассматриваются только те случаи, когда функциональный определитель амплитудных уравнений

$$\Delta^*=\frac{D(M_{11},M_{21},\ldots,M_{2l-2,1})}{D(A_{10},\ldots,A_{l0},B_{20},\ldots,B_{l-1,0})}\neq0 \qquad (1.19)$$

при найденных значениях амплитуд, т. е. когда система уравнений (1.18) имеет простые решения. При этом параметры β_s и γ_s разлагаются в ряды по целым степеням параметра μ

$$\beta_s=\sum_{m=1}^{\infty}A_{sm}\mu^m \quad (s=1,\ldots,l), \qquad \gamma_s=\sum_{m=1}^{\infty}B_{sm}\mu^m \quad (s=2,\ldots,l-1) \qquad (1.20)$$

Подставим разложения параметров β_s и γ_s в формулу (1.15) и приравняем нулю коэффициенты при одинаковых степенях μ. Из равенства нулю коэффициентов при μ в первой степени в условиях (1.15) получим уравнения для определения коэффициентов A_{s1} и B_{s1}

$$\sum_{s=1}^{l}\frac{\partial M_{j1}}{\partial A_{s0}}A_{s1}+\sum_{s=2}^{l-1}\frac{\partial M_{j1}}{\partial B_{s0}}B_{s1}+M_{j2}(T_0)=0 \quad (j=1,\ldots,2l-2) \qquad (1.21)$$

Аналогично найдем коэффициенты A_{s2} и B_{s2}. Все уравнения для A_{sm} и B_{sm} являются линейными с одним и тем же определителем $\Delta^* \neq 0$.

Если подставить разложения β_s и γ_s в формулу (1.13) и собрать члены с одинаковыми степенями μ, то получим

$$\alpha = T_0 \sum_{m=1}^{\infty} h_m \mu^m, \qquad h_1 = \frac{1}{T_0} N_1(T_0) \tag{1.22}$$

Для построения периодического решения системы (1.1) с периодом, независящим от μ и равным T_0, сделаем замену независимого переменного

$$t = \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} h_m \mu^m\right) \tau \tag{1.23}$$

При выполнении условия (1.19) все функции $x^{(r)}(\tau)$ могут быть разложены в ряд по целым степеням параметра μ

$$x^{(r)}(\tau) = x_0^{(r)}(\tau) + \mu x_1^{(r)}(\tau) + \ldots \qquad (r = 1, \ldots, n) \tag{1.24}$$

Коэффициенты этого ряда являются периодическими функциями τ с периодом T_0. Для критических частот имеем

$$x_0^{(r)}(\tau) = A_{r0} \cos \omega_r \tau + \frac{B_{r0}}{\omega_r} \sin \omega_r \tau$$

$$x_1^{(r)}(\tau) = A_{r1} \cos \omega_r \tau + \frac{B_{r1}}{\omega_r} \sin \omega_r \tau + C_1^{(r)}(\tau) + h_1 \tau (B_{r0} \cos \omega_r \tau - A_{r0} \omega_r \sin \omega_r \tau) \tag{1.25}$$

$$B_{10} = B_{11} = \ldots = 0 \quad (r = 1, \ldots, l-1)$$

2. Переходим к построению функции $x^{(l)}(t)$, отвечающей частоте $\omega_l = 0$. Общий вид этой функции представлен формулой (1.6), а значение $C_m^{(l)}(t)$ определяется второй из формул (1.8)

Специфической особенностью построения функции $x^{(l)}(t)$ является вычисление параметра $\chi = \gamma_l$. Легко видеть, что χ является аналитической функцией тех же параметров, что и все функции $C_m^{(r)}(t)$ и, кроме того, параметра μ. Следовательно, параметр χ может быть представлен в виде [4]

$$\chi = \sum_{m=1}^{\infty} \left[S_m + \sum_{s=1}^{l} \frac{\partial S_m}{\partial A_{s0}} \beta_s + \sum_{s=2}^{l-1} \frac{\partial S_m}{\partial B_{s0}} \gamma_s + \ldots \right] \mu^m \tag{2.1}$$

Подставим это выражение в условия периодичности $x^{(l)}(T_0 + \alpha) = A_{l0} + \beta_l$ и приравняем нулю коэффициенты при степенях параметра μ. Получим

$$T_0 S_1 + C_1^{(l)}(T_0) = 0, \qquad T_0 S_2 + N_1 S_1 + C_2^{(l)}(T_0) = 0 \tag{2.2}$$

откуда последовательно находятся величины S_m.

Введем новые функции

$$C_m^{(l)*}(t) = C_m^{(l)}(t) + S_m t \tag{2.3}$$

Тогда функцию $x^{(l)}(t)$ можно представить в следующем виде:

$$x^{(l)}(t) = A_{l0} + \beta_l + \sum_{m=1}^{\infty} \left[C_m^{(l)*}(t) + \sum_{s=1}^{l} \frac{\partial C_m^{(l)*}(t)}{\partial A_{s0}} \beta_s + \sum_{s=2}^{l-1} \frac{\partial C_m^{(l)*}(t)}{\partial B_{s0}} \gamma_s + \ldots \right] \mu^m \tag{2.4}$$

После преобразования времени $t = h\tau$ функция $x^{(l)}(\tau)$ будет иметь период T_0 и может быть разложена в ряд (1.24). Имеем два первых коэффициента этого ряда

$$x_0^{(l)}(\tau) = A_{l0}, \qquad x_1^{(l)}(\tau) = A_{l1} + C_1^{(l)*}(\tau) \tag{2.5}$$

3. Наконец построим функции $x^{(r)}(t)$, соответствующие некритическим частотам ω_r $(r = l+1, \ldots, n)$. Особенностью построения этих функций является вычисление параметров $\varphi_{r-l} = \beta_r$ и $\psi_{r-l} = \gamma_r$ при $r = l+1, \ldots, n$. Параметры φ_{r-l} и ψ_{r-l} являются аналитическими функциями тех же величин, что и рассмотренный в п.2 параметр χ. В силу этого имеем [5, 6]

$$\varphi_{r-l} = \sum_{m=1}^{\infty}\left[P_m^{(r-l)} + \sum_{s=1}^{l}\frac{\partial P_m^{(r-l)}}{\partial A_{s0}}\beta_s + \sum_{s=2}^{l-1}\frac{\partial P_m^{(r-l)}}{\partial B_{s0}}\gamma_s + \ldots\right]\mu^m$$

$$(r = l+1, \ldots, n) \tag{3.1}$$

и аналогичное выражение для параметра ψ_{r-l} в зависимости от величины $Q_m^{(r-l)}$. Подставим эти выражения в условия периодичности (1.12) и приравняем нулю коэффициенты при степенях параметра μ. Получим систему двух уравнений для величин $P_m^{(r-l)}$ и $Q_m^{(r-l)}$.

Введем новые функции

$$C_m^{(r)*}(t) = C_m^{(r)}(t) + P_m^{(r-l)}\cos\omega_r t + \frac{Q_m^{(r-l)}}{\omega_r}\sin\omega_r t$$

$$(r = l+1, \ldots, n) \tag{3.2}$$

а также вспомогательные функции $W_m^{(r-l)}(t)$, значения которых при $m = 1, 2$ будут

$$W_1^{(r-l)}(t) = C_1^{(r)}(t), \quad W_2^{(r-l)}(t) = C_2^{(r)}(t) + N_1 C_1^{\cdot(r)*}(t) \tag{3.3}$$

Решая указанную выше систему уравнений, получим

$$P_m^{(r-l)} = \frac{1}{2}\left[W_m^{(r-l)}(T_0) + \frac{1}{\omega_r}\operatorname{ctg}\frac{\omega_r T_0}{2}W_m^{\cdot(r-l)}(T_0)\right]$$

$$Q_m^{(r-l)} = \frac{1}{2}\left[W_m^{\cdot(r-l)}(T_0) - \omega_r\operatorname{ctg}\frac{\omega_r T_0}{2}W_m^{(r-l)}(T_0)\right]$$

$$(r = l+1, \ldots, n) \tag{3.4}$$

По этим формулам последовательно определяются коэффициенты $P_m^{(r-l)}$ и $Q_m^{(r-l)}$.

Из предыдущего следует, что функции $x^{(r)}(t)$ при $r = l+1, \ldots, n$ можно представить в следующем виде

$$x^{(r)}(t) = \sum_{m=1}^{m}\left[C_m^{(r)*}(t) + \sum_{s=1}^{l}\frac{\partial C_m^{(r)*}(t)}{\partial A_{s0}}\beta_s + \sum_{s=2}^{l-1}\frac{\partial C_m^{(r)*}(t)}{\partial B_{s0}}\gamma_s + \ldots\right]\mu^m \tag{3.5}$$

После преобразования независимого переменного $t = h\tau$ найдем первые два коэффициента разложения (1.24)

$$x_0^{(r)}(\tau) = 0, \qquad x_1^{(r)}(\tau) = C_1^{(r)*}(\tau) \qquad (r = l+1, \ldots, n) \tag{3.6}$$

Вычислим функцию $C_{k1}^*(t)$, которая входит во вторую формулу (1.11) для $H_{i2}(t)$. Согласно определения величин $H_{im}(t)$ (1.10), функции $C_{ku}^*(t)$ следует вычислять по формуле

$$C_{ku}^*(t) = \sum_{r=1}^{l-1} p_k^{(r)} C_u^{(r)}(t) + \sum_{r=l}^{n} p_k^{(r)} C_u^{(r)*}(t) \qquad (k = 1, \ldots, n;\ u = 1, \ldots, m-1) \tag{3.7}$$

При этом функция $C_u^{(l)*}(t)$ определяется формулой (2.3), а функции $C_u^{(r)*}(t)$ при $r = l+1, \ldots, n$ — формулой (3.2). Таким образом, величины $H_{im}(t)$ являются связующим звеном при вычислении коэффициентов $x_m^{(r)}(\tau)$ разложения (1.24) функций $x^{(r)}(\tau)$ из различных групп.

4. Выражения для коэффициентов рядов (1.24) можно дать в другом виде. Для этого преобразуем систему (1.1) к квазинормальным координатам, а время t заменим при помощи подстановки $t = h\tau$ (1.23). При этом величину h будем считать известной

аналитической функцией параметра μ. Имеем

$$x^{(r)}(t) = z^{(r)}(\tau), \qquad h\dot{x}^{(r)}(t) = z^{(r)\prime}(\tau) \tag{4.1}$$

В результате преобразований система (1.1) примет вид [7]

$$z^{(r)\prime\prime} + \omega_r^2 z^{(r)} = \mu\Phi^{(r)}(z^{(s)}, z^{(s)\prime}, \mu) \tag{4.2}$$

Начальные условия для функций $z^{(r)}(\tau)$ и их первых производных будут

$$z^{(r)}(0) = A_{r0} + \beta_r, \qquad z^{(r)\prime}(0) = h(B_{r0} + \gamma_r) \tag{4.3}$$

Автономность системы, а также условия периодичности порождающего решения приводят к прежним результатам (1.7).

Функции $z^{(r)}(\tau)$ можно представить в следующем виде:

$$z^{(r)}(\tau) = (A_{r0} + \beta_r)\cos\omega_r\tau + \frac{h(B_{r0} + \gamma_r)}{\omega_r}\sin\omega_r\tau + $$
$$+ \sum_{m=1}^{\infty}\left[\bar{C}_m^{(r)}(\tau) + \sum_{s=1}^{l}\frac{\partial\bar{C}_m^{(r)}(\tau)}{\partial A_{s0}}\beta_s + \sum_{s=2}^{l-1}\frac{\partial\bar{C}_m^{(r)}(\tau)}{\partial B_{s0}}\gamma_s + \ldots\right]\mu^m \tag{4.4}$$

При $r = l$ получим выражение для функции $z^{(l)}(\tau)$, аналогичное (1.6). Исходя из связи правых частей уравнений в квазинормальных координатах $x^{(r)}(t)$ и $z^{(r)}(\tau)$, можно непосредственно установить соотношения между функциями $\bar{C}_m^{(r)}(\tau)$ и $C_m^{(r)}(\tau)$.

Амплитудные уравнения в новых переменных будут

$$\bar{C}_1^{(r)}(T_0) = 0 \quad (r = 1,\ldots, l-1), \qquad \bar{C}_1^{(r)\prime}(T_0) = 0 \quad (r = 2,\ldots, l) \tag{4.5}$$

Функции $z^{(r)}(\tau)$ разлагаются в ряды по целым степеням μ

$$z^{(r)}(\tau) = z_0^{(r)}(\tau) + z_1^{(r)}(\tau) + \ldots \qquad (r = 1,\ldots, n) \tag{4.6}$$

Введем новые функции $\bar{C}_m^{(r)*}(\tau)$ для нулевой частоты при $r = l$

$$\bar{C}_m^{(l)*}(\tau) = \bar{C}_m^{(l)}(\tau) + \bar{S}_m\tau, \qquad \bar{S}_m = -\frac{1}{T_0}\bar{C}_m^{(l)}(T_0) \tag{4.7}$$

а также для некритических частот при $r = l + 1, \ldots, n$

$$\bar{C}_m^{(r)*}(\tau) = \bar{C}_m^{(r)}(\tau) + \bar{P}_m^{(r-l)}\cos\omega_r\tau + \frac{\bar{Q}_m^{(r-l)}}{\omega_r}\sin\omega_r\tau \tag{4.8}$$

Здесь

$$\bar{P}_m^{(r-l)} = \frac{1}{2}\left[\bar{C}_m^{(r)}(T_0) + \frac{1}{\omega_r}\operatorname{ctg}\frac{\omega_r T_0}{2}\bar{C}_m^{(r)\prime}(T_0)\right]$$

$$(r = l + 1, \ldots, n)$$

$$\bar{Q}_m^{(r-l)} = \frac{1}{2}\left[\bar{C}_m^{(r)\prime}(T_0) - \omega_r\operatorname{ctg}\frac{\omega_r T_0}{2}\bar{C}_m^{(r)}(T_0)\right] \tag{4.9}$$

Тогда первые два коэффициента $z_m^{(r)}(\tau)$ рядов (4.6) будут равны

$$z_0^{(r)}(\tau) = A_{r0}\cos\omega_r\tau + \frac{B_{r0}}{\omega_r}\sin\omega_r\tau$$
$$z_1^{(r)}(\tau) = A_{r1}\cos\omega_r\tau + \frac{B_{r1} + h_1 B_{r0}}{\omega_r}\sin\omega_r\tau + \bar{C}_1^{(r)}(\tau)$$
$$B_{10} = B_{11} = 0 \qquad (r = 1,\ldots, l-1) \tag{4.10}$$
$$z_0^{(l)}(\tau) = A_{l0}, \qquad z_1^{(l)}(\tau) = A_{l1} + \bar{C}_1^{(l)*}(\tau)$$
$$z_0^{(r)}(\tau) = 0, \qquad z_1^{(r)}(\tau) = \bar{C}_1^{(r)*}(\tau) \qquad (r = l + 1,\ldots, n)$$

Последующие коэффициенты, например $z_2^{(r)}(\tau)$, заметно проще $x_2^{(r)}(\tau)$. Все слагаемые в коэффициентах $z_m^{(r)}(\tau)$ являются периодическими функциями τ с периодом T_0 или постоянными.

5. Рассмотрим случай кратных корней уравнения частот (1.2). Пусть среди корней имеется один кратный корень кратности d, например $\omega^2 = \omega_1^2 = \ldots = \omega_d^2$.

Наличие кратных частот изменит только структуру решений системы (1.1). В данном случае эта структура будет иметь вид [4]

$$x_k(t) = \sum_{r=1}^{d} q_k^{(r)} x^{(r)}(t) + \sum_{r=d+1}^{n} p_k^{(r)} x^{(r)}(t) \tag{5.1}$$

При этом функции $x^{(r)}(t)$ остаются без изменения. Они могут быть представлены рядами (1.24), коэффициенты которых определяются в различных случаях формулами (1.25), (2.5) и (3.6). Коэффициенты $p_k^{(r)}$ по-прежнему вычисляются по формуле (1.4)

Коэффициенты $q_k^{(r)}$ при $r, k = 1, \ldots, d$ будут равны

$$q_k^{(r)} = 1 \qquad (r = k), \qquad q_k^{(r)} = 0 \qquad (r \neq k) \tag{5.2}$$

Как известно [8], амплитуды $A_{k0}^{(r)}$ и $B_{k0}^{(r)}$ в частных решениях порождающей системы (1.1) определяются из уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} (c_{ik} - \omega_r^2 a_{ik}) A_{k0}^{(r)} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} (c_{ik} - \omega_r^2 a_{ik}) B_{k0}^{(r)} = 0 \tag{5.3}$$

При этом для кратного корня $\omega^2 = \omega_1^2$ уравнения (1.2) только $n - d$ уравнений в каждой из систем (5.3) независимы, а остальные d уравнений будут следствием этих $n - d$ уравнений. Расположим уравнения в системе (5.3) так, чтобы первые d уравнений являлись следствием остальных $n - d$ уравнений. Решая систему последних $n - d$ уравнений при $i = d + 1, \ldots, n$ и $\omega^2 = \omega_1^2$ относительно $A_{d+1,0}^{(1)}, \ldots, A_{n0}^{(1)}$, получим

$$A_{k0}^{(1)} = q_k^{(1)} A_{10}^{(1)} + \ldots + q_k^{(d)} A_{d0}^{(1)} \qquad (k = d + 1, \ldots, n) \tag{5.4}$$

Коэффициенты $q_k^{(r)}$ $(r = 1, \ldots, d;\ k = d + 1, \ldots, n)$ определяются этими соотношениями.

6. Рассмотрим, наконец, квазилинейную неавтономную систему с n степенями свободы

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik} x_k^{\cdot\cdot} + c_{ik} x_k) = f_i(t) + \mu F_i(t, x_1, \ldots, x_n, x_1^{\cdot}, \ldots, x_n^{\cdot}, \mu)$$

$$a_{ik} = a_{ki}, \quad c_{ik} = c_{ki} \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{6.1}$$

Допустим, что функции $F_i(t, x_s, x_s^{\cdot}, \mu)$ обладают тем же свойством аналитичности по отношению переменных x_s, $x_s^{\cdot}$ и μ, как и в случае автономных систем. Кроме того, эти функции, а также функции $f_i(t)$ являются непрерывными периодическими функциями времени t с периодом 2π.

Предположим, что корни уравнения частот порождающей системы (1.2) простые и неотрицательные. Пусть, например

$$\omega_r = k_r \qquad (r = 1, \ldots, l - 1), \qquad \omega_l = 0 \tag{6.2}$$

где k_r — целые положительные числа. Частоты ω_r с индексами $r = l + 1, \ldots, n$ — нерезонансные.

Необходимым условием существования периодических решений системы (6.1) является отсутствие у функций $f_i(t)$ гармоник порядка k_r. Если среди частот порождающей системы нет частоты $k_r = 1$, то можно построить периодические решения системы (6.1) с периодом $T = 2\pi$. Эти решения представляют один из видов колебаний вблизи главного резонанса. Структура решений будет

$$x_k(t) = \varphi_k(t) + \sum_{r=1}^{n} p_k^{(r)} x^{(r)}(t) \tag{6.3}$$

Функции $\varphi_k(t)$ являются частным решением порождающей системы (6.1). Коэффициенты $p_k^{(r)}$ определяются формулой (1.4), а функции $x^{(r)}(t)$ имеют вид [9]

$$x^{(r)}(t) = (A_{r0} + \beta_r)\cos\omega_r t + \frac{B_{r0} + \gamma_r}{\omega_r}\sin\omega_r t +$$
$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \Big[C_m^{(r)}(t) + \sum_{s=1}^{l} \frac{\partial C_m^{(r)}(t)}{\partial A_{s0}}\beta_s + \sum_{s=1}^{l-1} \frac{\partial C_m^{(r)}(t)}{\partial B_{s0}}\gamma_s + \ldots \Big] \mu^m \tag{6.4}$$

В неавтономной системе суммирование произведений, включающих в качестве множителя степени параметра γ_s, производится в отличие от автономной системы от $s = 1$ до $s = l - 1$. Из формулы (6.4) предельным переходом $\omega_l \to 0$ можно получить функцию $x^{(l)}(t)$. Функции $C_m^{(r)}(t)$ определяются формулами (1.8) — (1.11) и (3.7).

Условия периодичности решений несколько отличаются от (1.12) из-за неавтономности системы (6.1)

$$x^{(r)}(2\pi) = A_{r0} + \beta_r \quad (r = 1, \ldots, l), \qquad x^{(r)}(2\pi) = \beta_r \quad (r = l + 1, \ldots, n)$$
$$x^{\cdot(r)}(2\pi) = B_{r0} + \gamma_r \quad (r = 1, \ldots, l - 1), \qquad x^{\cdot(r)}(2\pi) = \gamma_r \quad (r = l, \ldots, n). \tag{6.5}$$

Эти условия могут быть записаны в виде формулы

$$\sum_{m=1}^{\infty} \Big[C_m^{(r)}(2\pi) + \sum_{s=1}^{l} \frac{\partial C_m^{(r)}}{\partial A_{s0}}\beta_s + \sum_{s=1}^{l-1} \frac{\partial C_m^{(r)}}{\partial B_{s0}}\gamma_s + \ldots \Big] \mu^{m-1} = 0 \tag{6.6}$$
$$(r = 1, \ldots, l - 1)$$

и аналогичной формулы для производной $C_m^{\cdot(r)}(2\pi)$ при $r = 1, \ldots, l$.

Отсюда получим амплитудные уравнения

$$C_1^{(r)}(2\pi) = 0 \quad (r = 1, \ldots, l - 1), \qquad C_1^{\cdot(r)}(2\pi) = 0 \quad (r = 1, \ldots, l) \tag{6.7}$$

Из этих уравнений находятся $2l - 1$ амплитуд: $A_{10}, \ldots, A_{l0}, B_{10}, \ldots, B_{l-1,0}$.

При неравенстве нулю функционального определителя уравнений (6.7) параметры β_s $(s = 1, \ldots, l)$ и γ_s $(s = 1, \ldots, l - 1)$ разлагаются в ряды по целым степеням параметра μ (1.20). Имеем уравнения для коэффициентов A_{s1} и B_{s1}.

$$\sum_{s=1}^{l} \frac{\partial C_1^{(r)}}{\partial A_{s0}} A_{s1} + \sum_{s=1}^{l-1} \frac{\partial C_1^{(r)}}{\partial B_{s0}} B_{s1} + C_2^{(r)}(2\pi) = 0 \qquad (r = 1, \ldots, l - 1) \tag{6.8}$$

и аналогичные уравнения при $r = 1, \ldots, l$, в которых $C_m^{(r)}(2\pi)$ заменены на $C_m^{\cdot(r)}(2\pi)$.

Построение функций $x^{(l)}(t)$ и $x^{(r)}(t)$ при $r = l + 1, \ldots, n$ производится также, как для автономной системы. Параметры χ, φ_{r-l} и ψ_{r-l} представлены разложениями, аналогичными (2.1) и (3.1). В этих разложениях суммирование произведений, содержащих в качестве множителей степени параметров β_s и γ_s, выполняется в тех же пределах, как и в (6.4). Остальные формулы остаются без изменения.

Функции $x^{(r)}(t)$ могут быть разложены в ряды по целым степеням параметра μ

$$x^{(r)}(t) = x_0^{(r)}(t) + \mu x_1^{(r)}(t) + \ldots \qquad (r = 1, \ldots, n) \tag{6.9}$$

При этом коэффициенты $x_m^{(r)}(t)$ аналогичны коэффициентам $z_m^{(r)}(\tau)$ в формулах (4.9), если в этих формулах заменить $\overline{C}_m^{(r)}(\tau)$ и $\overline{C}_m^{(r)*}(\tau)$ на $C_m^{(r)}(t)$ и $C_m^{(r)*}(t)$ и, кроме того отбросить условие $B_{10} = B_{11} = 0$.

При наличии кратных корней $\omega^2 = \omega_1^2 = \ldots = \omega_d^2$ уравнения частот (1.2) у неавтономной системы изменится только структура решений

$$x_k(t) = \varphi_k(t) + \sum_{r=1}^{d} q_k^{(r)} (x)^{(r)}(t) + \sum_{r=d+1}^{n} p_k^{(r)} x^{(r)}(t) \tag{6.10}$$

Значения коэффициентов $q_k^{(r)}$ приведены в п. 5.

Поступила 28 XII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., Гостехиздат, 1956.
2. Проскуряков А. П. Об одном свойстве периодических решений квазилинейных автономных систем с несколькими степенями свободы. ПММ, 1960, т. 24, вып. 4.
3. Проскуряков А. П. Периодические колебания квазилинейных автономных систем с двумя степенями свободы. ПММ, 1960, т. 24, вып. 6.
4. Проскуряков А. П. Построение периодических решений квазилинейных автономных систем с несколькими степенями свободы в особых случаях. ПММ, 1963, т. 27, вып. 6.
5. Проскуряков А. П. К построению периодических решений квазилинейных автономных систем с несколькими степенями свободы. ПММ, 1962, т. 26, вып. 2.
6. Проскуряков А. П. Структура периодических решений квазилинейной автономной системы с несколькими степенями свободы в случае разных, но частично несоизмеримых частот. ПММ, 1968, т. 32, вып. 3.
7. Проскуряков А. П. Устойчивость одночастотных периодических решений квазилинейных автономных систем с двумя степенями свободы. ПММ, 1965, т. 29, вып. 5.
8. Ламб Г. Теоретическая механика, т. 3. М.— Л., Гостехиздат, 1936.
9. Плотникова Г. В. О построении периодических решений неавтономной квазилинейной системы с двумя степенями свободы. ПММ, 1960, т. 24, вып. 5.

УДК 517.9

РАЗРЫВНАЯ ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ

В. Г. Веретенников, В. А. Синицын

(Москва)

На основании результатов, полученных в [1–3] развивается обобщенный подход к решению разрывных вариационных задач оптимизации процессов управления. Получены необходимые условия оптимальности (условия Вейерштрасса). Решена задача синтеза оптимальной по быстродействию системы второго порядка с ограничениями второго типа, приводящими к разрывам фазовых координат. Показано, как могут быть учтены ограничения второго типа, влияющие на синтезируемый процесс.

1. Рассматриваемые системы описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями и связями вида

$$x_s^{\cdot} = f_s(x, u, t), \qquad \varphi_j(u, t) = 0 \qquad (s = 1, \ldots, n; \quad j = 1, \ldots; \ m < r) \tag{1.1}$$

Здесь $x = \{x_1, .., x_n\}$, $u = \{u_1, ..., u_r\}$ — фазовые координаты и управления. Функции $x_s(t)$ непрерывны и имеют кусочно-непрерывные производные на отрезке $[t_0, T]$ за исключением заданного числа отрезков $[t_i^-, t_i^+] \subset [t_0, T]$ $(i = 0, 1, ..., q)$,