УДК 534.015

СИСТЕМЫ ЛЯПУНОВА С ДЕМПФИРОВАНИЕМ

В. М. Старжинский

(Москва)

Нелинейная автономная система $2k+2$-го порядка возмущена аналитическим и достаточно малым по норме демпфированием. Рассматриваемая система близка к системе Ляпунова [1], однако, в ином смысле, чем в монографии И. Г. Малкина [2]. Проводится преобразование возмущенной системы, при котором невозмущенная система может быть преобразована в квазилинейную неавтономную систему $2k$-го порядка [3]. Если известен общий интеграл невозмущенной системы, то интегрирование системы уравнений в вариациях, согласно Пуанкаре [4], сводится к квадратурам, что и показано на примере плоского пружинного маятника.

1. Преобразование уравнений движения. Рассмотрим класс систем Ляпунова (см. [1], § 33) с демпфированием, описываемых системой уравнений

$$d^2u/d\tau^2 + u - U(u, u^\cdot, v_1, \ldots, v_k, v_1^\cdot, \ldots, v_k^\cdot) = -2\varepsilon F_0(u^\cdot, v_1^\cdot, \ldots, v_k^\cdot) \tag{1.1}$$

$$d^2v_\varkappa/d\tau^2 + a_{\varkappa 1}v_1 + \ldots + a_{\varkappa k}v_k - V_\varkappa(u, u^\cdot, v_1, \ldots, v_k, v_1^\cdot, \ldots, v_k^\cdot) =$$
$$= -2\varepsilon F_\varkappa(u^\cdot, v_1^\cdot, \ldots, v_k^\cdot) \quad (\varepsilon > 0,\ \varkappa = 1, \ldots, k)$$

Здесь точка означает производную по τ, $a_{j\varkappa} = a_{\varkappa j}$ $(\varkappa, j = 1,\ldots,k)$ — вещественные постоянные, U, $V_1,\ldots,V_k$, F_0, $F_1,\ldots,F_k$ — вещественные аналитические функции, разложения F_0, $F_1,\ldots,F_k$ начинаются с членов не ниже первого порядка, а для U, $V_1,\ldots,V_k$ — не ниже второго порядка.

Будем предполагать, что невозмущенная система (1.1), т.е. система (1.1), при $\varepsilon = 0$, допускает первый интеграл, который необходимо будет аналитической функцией переменных u, $u^\cdot$, $v_1,\ldots, v_k$, $v_1^\cdot,\ldots, v_k^\cdot$ вида [1]

$$H = u^{\cdot 2} + u^2 + W(v_1, \ldots, v_k, v_1^\cdot, \ldots, v_k^\cdot) +$$
$$+ S_3(u, u^\cdot, v_1, \ldots, v_k, v_1^\cdot, \ldots, v_k^\cdot) = \mu^2 \quad (\mu > 0) \tag{1.2}$$

где W — квадратичная форма, а S_3 — совокупность членов не ниже третьего порядка.

Для выделенных сил сопротивления F_0, $F_1,\ldots,F_k$ будем предполагать, что их работа на любом возможном перемещении, совпадающем в рассматриваемом случае с одним из действительных, отрицательна. В простейшем нелинейном случае, когда $F_j = F(v_j^\cdot)$ $(j = 0,1,\ldots,k;\ v_0^\cdot \equiv u)$, это условие означает, что $\alpha F(\alpha) > 0$ $(\alpha \neq 0)$. В линейном случае оно означает, что диссипация полная.

Подстановка Ляпунова

$$u^\cdot = \rho\cos\vartheta, \qquad u = \rho\sin\vartheta, \qquad v_\varkappa = \rho z_\varkappa$$
$$v_\varkappa^\cdot = \rho z_{k+\varkappa} \qquad (\rho \geqslant 0;\ \varkappa = 1, \ldots, k)$$

при условии

$$1 - \frac{1}{\rho}\left[U(\rho\sin\vartheta, \rho\cos\vartheta, \rho z) - 2\varepsilon F_0(\rho\cos\vartheta, \rho z^{(2)})\right]\sin\vartheta > 0 \tag{1.3}$$

приведет систему (1.1) и первый интеграл (1.2) невозмущенной системы к виду

$$d\rho/d\vartheta = A(U\cos\vartheta - 2\varepsilon F_0\cos\vartheta)$$
$$dz_\varkappa/d\vartheta = A(z_{k+\varkappa} - \rho^{-1}z_\varkappa U\cos\vartheta + 2\varepsilon\rho^{-1}z_\varkappa F_0\cos\vartheta) \tag{1.4}$$
$$dz_{k+\varkappa}/d\vartheta = A(-a_{\varkappa 1}z_1 - \ldots - a_{\varkappa k}z_k - \rho^{-1}z_{k+\varkappa}U\cos\vartheta +$$
$$+ \rho^{-1}V_\varkappa + 2\varepsilon\rho^{-1}z_{k+\varkappa}F_0\cos\vartheta - 2\varepsilon\rho^{-1}F_\varkappa) \quad (\varkappa = 1, \ldots, k)$$
$$(A = (1 - \rho^{-1}U\sin\vartheta + 2\varepsilon\rho^{-1}F_0\sin\vartheta)^{-1})$$

$$\rho^2[1 + W(z) + \rho S(\vartheta, \rho, z)] = \mu^2 \quad (S = \rho^{-3}S_3) \tag{1.5}$$

Здесь z и $z^{(2)}$ — векторы соответственно с компонентами $z_1, \ldots, z_{2k}$ и $z_{k+1}, \ldots, z_{2k}$.

Невозмущенная система (1.4), т. е. при $\varepsilon = 0$, за счет использования интеграла (1.5) сводится к квазилинейной неавтономной системе $2k$-го порядка; ее решение определяется методами малого параметра для достаточно малых $\mu > 0$ в (1.5)} [3].

2. Полная система уравнений в вариациях по параметру и ее решение. Запишем систему уравнений (1.6) в виде векторного уравнения

$$d\mathbf{x}/d\vartheta = \mathbf{f}(\vartheta, \mathbf{x}; \varepsilon) \tag{2.1}$$

где $\mathbf{x}$ — вектор с компонентами $\rho, z_1, \ldots, z_{2k}$; $\mathbf{f}$ — вектор-функция, составленная из правых частей системы (1.4), аналитическая по $\mathbf{x}$ и ε в области определения (1.3), а коэффициенты степенных рядов по $\rho, z_1, \ldots, z_{2k}$ — периодические функции ϑ периода 2π. В дальнейшем положим $2k + 1 = n$ и будем считать, что n — любое натуральное число.

Допустим, что известно некоторое решение $\mathbf{x}_0(\vartheta)$ невозмущенной системы (2.1), т. е. при $\varepsilon = 0$

$$d\mathbf{x}_0/d\vartheta = \mathbf{f}(\vartheta, \mathbf{x}_0; 0) \tag{2.2}$$

Основываясь на теореме Пуанкаре [4], будем искать решение уравнения (2.1) для достаточно малых $\varepsilon > 0$ в виде

$$\mathbf{x} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^{\nu} \mathbf{x}_{\nu}(\vartheta) \tag{2.3}$$

Вычитая из уравнения (2.1) тождество (2.2) и используя формулу Тейлора для функции двух переменных, получим

$$\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \frac{d\mathbf{x}_m}{d\vartheta} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \mathbf{x}_m + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \varepsilon \right)^{\nu} \mathbf{f}(\vartheta, \mathbf{x}_0; 0)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим последовательность векторных дифференциальных уравнений (полная система уравнений в вариациях по параметру)

$$\frac{d\mathbf{x}_1}{d\vartheta} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right)_0 \mathbf{x}_1 + \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \varepsilon}\right)_0$$

$$\frac{d\mathbf{x}_2}{d\vartheta} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right)_0 \mathbf{x}_2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^2}\right)_0 \mathbf{x}_1\mathbf{x}_1 + \left(\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}\,\partial \varepsilon}\right)_0 \mathbf{x}_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \varepsilon^2}\right)_0$$

$$\frac{d\mathbf{x}_3}{d\vartheta} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right)_0 \mathbf{x}_3 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^2}\right)_0 (\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_2\mathbf{x}_1) + \left(\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}\,\partial \varepsilon}\right)_0 \mathbf{x}_2 +$$
$$+ \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^3}\right)_0 \mathbf{x}_1\mathbf{x}_1\mathbf{x}_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^2\,\partial \varepsilon}\right)_0 \mathbf{x}_1\mathbf{x}_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}\,\partial \varepsilon^2}\right)_0 \mathbf{x}_1 + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 \mathbf{f}}{\partial \varepsilon^3}\right)_0$$

. . . .

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}_m}{d\vartheta} &= \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right)_0 \mathbf{x}_m + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^2}\right)_0 \sum_{\alpha_1+\alpha_2=m} \mathbf{x}_{\alpha_1}\mathbf{x}_{\alpha_2} + \left(\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}\,\partial \varepsilon}\right)_0 \mathbf{x}_{m-1} + \\
&+ \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^3}\right)_0 \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=m} \mathbf{x}_{\alpha_1}\mathbf{x}_{\alpha_2}\mathbf{x}_{\alpha_3} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^2\,\partial \varepsilon}\right)_0 \sum_{\alpha_1+\alpha_2=m-1} \mathbf{x}_{\alpha_1}\mathbf{x}_{\alpha_2} + \\
&+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}\,\partial \varepsilon^2}\right)_0 \mathbf{x}_{m-2} + \ldots + \frac{1}{s!}\left(\frac{\partial^s \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^s}\right)_0 \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_s=m} \mathbf{x}_{\alpha_1}\ldots\mathbf{x}_{\alpha_s} + \\
&+ \frac{1}{(s-1)!}\left(\frac{\partial^s \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^{s-1}\partial \varepsilon}\right)_0 \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_{s-1}=m-1} \mathbf{x}_{\alpha_1}\ldots\mathbf{x}_{\alpha_{s-1}} + \frac{1}{(s-l)!\,l!}\left(\frac{\partial^s \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^{s-l}\partial \varepsilon^l}\right)_0 \times \\
&\times \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_{s-l}=m-l} \mathbf{x}_{\alpha_1}\ldots\mathbf{x}_{\alpha_{s-l}} + \ldots + \frac{1}{(s-1)!}\left(\frac{\partial^s \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}\,\partial \varepsilon^{s-1}}\right)_0 \mathbf{x}_{m-n+1} + \ldots +\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$+\frac{1}{m!}\left(\frac{\partial^m \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^m}\right)_0 \mathbf{x}_1{}^m+\frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{\partial^m \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^{m-1}\partial\varepsilon}\right)_0 \mathbf{x}_1{}^{m-1}+\ldots+$$

$$+\frac{1}{(m-l)!\,l!}\left(\frac{\partial^m \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^{m-l}\partial\varepsilon^l}\right)_0 \mathbf{x}_1{}^{m-l}+\ldots+\frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{\partial^m \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}\,\partial\varepsilon^{m-1}}\right)_0 \mathbf{x}_1+\frac{1}{m!}\left(\frac{\partial^m \mathbf{f}}{\partial\varepsilon^m}\right)_0$$

Здесь индекс нуль означает, что значения частных производных вычислены при $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0(\vartheta)$ и $\varepsilon = 0$; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ — натуральные числа, матрица

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \left\| \frac{\partial f_j}{\partial \xi_h} \right\|_1^n \qquad \left(\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \right)$$

Последующие члены в формулах (2.4) также нужно трактовать в операторном смысле, так, например

$$\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^2}\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 = \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\left[\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right)\mathbf{x}_1\right]\right\}\mathbf{x}_2$$

Если ε входит в (2.1) линейно, т. е. $\mathbf{f}(\vartheta, \mathbf{x}; \varepsilon) = \mathbf{g}(\vartheta, \mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{h}(\vartheta, \mathbf{x})$, то полная система уравнений в вариациях по параметру (2.4) примет вид

$$\frac{d\mathbf{x}_1}{d\vartheta} = \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}\right)_0 \mathbf{x}_1 + \mathbf{h}(\vartheta, \mathbf{x}_0)$$

$$\frac{d\mathbf{x}_m}{d\vartheta} = \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}\right)_0 \mathbf{x}_m + \sum_{\nu=2}^{m}\left[\frac{1}{\nu!}\left(\frac{\partial^\nu \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}^\nu}\right)_0 \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_\nu=m} \mathbf{x}_{\alpha_1}\ldots\mathbf{x}_{\alpha_\nu} + \right. \tag{2.5}$$

$$\left. + \frac{1}{(\nu-1)!}\left(\frac{\partial^{\nu-1}\mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}^{\nu-1}}\right)_0 \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_{\nu-1}=m-1} \mathbf{x}_{\alpha_1}\ldots\mathbf{x}_{\alpha_{\nu-1}}\right] \qquad (m>1)$$

Уравнения (2.4) и (2.5) последовательно интегрируются непосредственно лишь в скалярном случае. Однако, если известен общий интеграл невозмущенного (т. е. при $\varepsilon = 0$) уравнения (2.1), то интегрирование систем уравнений (2.4) и (2.5) любого порядка, как показал Пуанкаре [4], сводится к квадратурам.

Действительно, пусть $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0(\vartheta, \mathbf{a})$ — общий интеграл уравнения (2.1) при $\varepsilon = 0$, где $\mathbf{a}$ — n-мерный вектор. Дифференцируя тождество (2.2) по $\mathbf{a}$, получим

$$\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial \mathbf{a}}\right) = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right)_0 \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial \mathbf{a}}$$

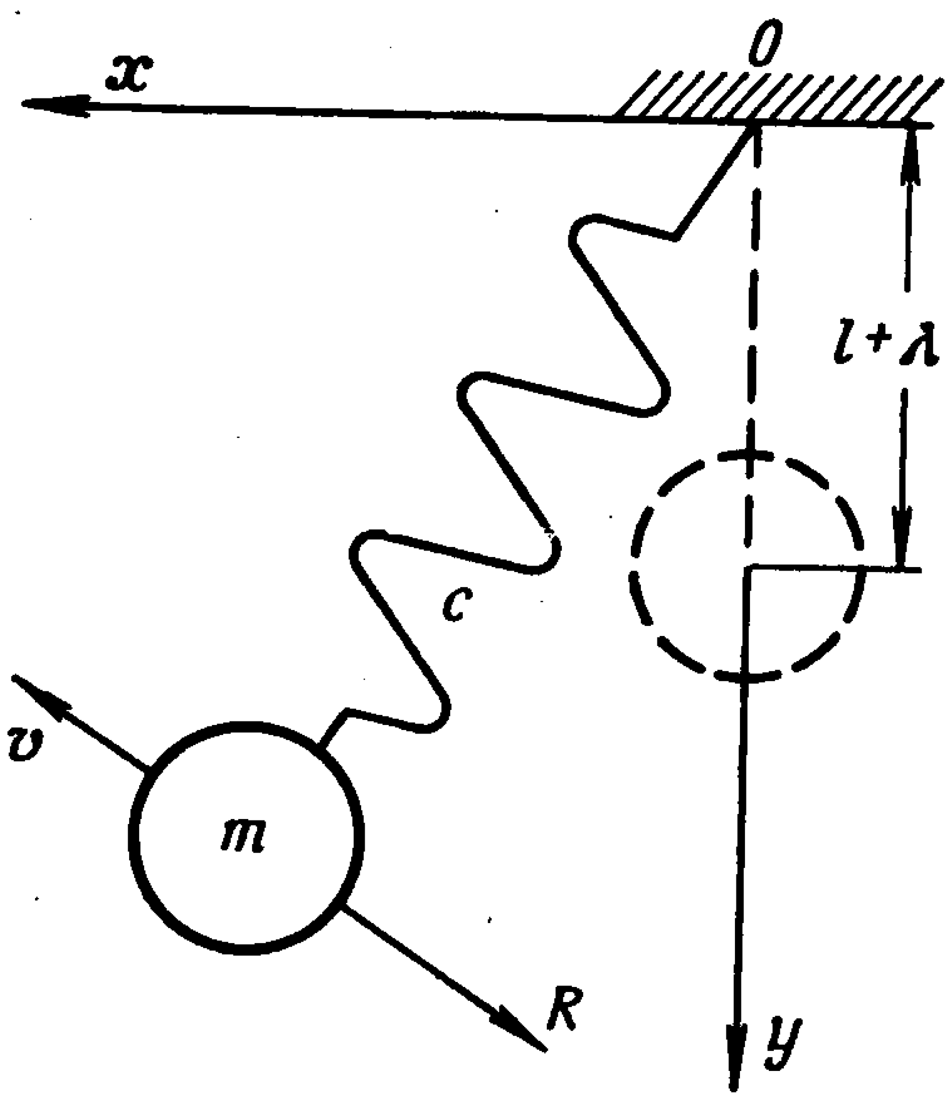
Отсюда следует, что $\partial \mathbf{x}_0 / \partial \mathbf{a}$ — фундаментальная матрица каждой из однородных систем дифференциальных уравнений, соответствующих (2.4) или (2.5). Тогда решение первой из систем (2.4) или (2.5) с нулевыми начальными условиями $\mathbf{x}_1(\vartheta_0) = 0$ запишется в виде

$$\mathbf{x}_1 = \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial \mathbf{a}} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \left(\frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial \mathbf{a}}\right)^{-1}\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \varepsilon}\right)_0 d\vartheta \tag{2.6}$$

где $\partial \mathbf{x}_0 / \partial \mathbf{a}$ — неособая матрица в силу того, что решение $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0(\vartheta; \mathbf{a})$ — общее. Для $\mathbf{x}_m$ $(m > 1)$ получатся формулы, аналогичные (2.6), с заменой под знаком интеграла $(\partial \mathbf{f} / \partial \varepsilon)_0$ на неоднородную часть соответствующей системы (2.4) или (2.5).

3. *Пример*. Рассмотрим плоский пружинный маятник массы m на невесомой пружине длиной l в ненапряженном состоянии и подчиняющейся закону Гука с жесткостью c (фигура). Пусть x и $y' = l + \lambda + y$ — декартовы координаты массы m, отсчитываемые от точки подвеса O, где $\lambda = mg / c$ — статическое удлинение пружины.

Выберем постоянную потенциальной энергии П силы тяжести и упругой силы пружины таким образом, чтобы она обращалась в нуль для положения статического равновесия, тогда



$$\Pi = -mgy + \frac{c}{2}\left[\sqrt{x^2 + (l+\lambda+y)^2} - l\right]^2 - -\frac{c}{2}\lambda^2,\ T = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]$$

Допустим, что на массу m действует еще сила сопротивления R, пропорциональная скорости. Обозначим через $\omega = \sqrt{c/m}$ круговую частоту вертикальных колебаний массы на пружине и введем безразмерные время $\tau = \omega t$ и координаты: $u = y/l$, $v = x/l$.

Тогда уравнения движения запишутся в виде

$$\frac{d^2u}{d\tau^2} + u - \{(1+\gamma+u)[(1+\gamma+u)^2 + v^2]^{-1/2} - 1\} = -2\varepsilon\frac{du}{d\tau} \tag{3.1}$$

$$\frac{d^2v}{d\tau^2} + \frac{\gamma}{1+\gamma}v - \left\{v[(1+\gamma+u)^2 + v^2]^{-1/2} - \frac{v}{1+\gamma}\right\} = -2\varepsilon\frac{dv}{d\tau}$$

где $\gamma = \lambda/l$, $\varepsilon = 1/2\, b\,(cm)^{-1/2}$ — безразмерные параметры, а разложения фигурных скобок в окрестности $u = v = 0$ начинаются с членов второй степени.

При $\varepsilon = 0$ имеет место интеграл энергии

$$\frac{1}{cl}\sqrt{2(T+\Pi)c} = \mu \tag{3.2}$$

Подстановка Ляпунова

$$du/d\tau = \rho\cos\vartheta,\ u = \rho\sin\vartheta,\ v = \rho z_1,\ dv/d\tau = \rho z_2 \tag{3.3}$$

приведет возмущенную систему (3.1) и интеграл (3.2) невозмущенной системы к виду (1.4) и (1.5)

$$d\rho/d\vartheta = A(U\cos\vartheta - 2\varepsilon\rho\cos^2\vartheta)$$

$$dz_1/d\vartheta = A(z_2 - z_1\rho^{-1}U\cos\vartheta + 2\varepsilon z_1\cos^2\vartheta) \tag{3.4}$$

$$\frac{dz_2}{d\vartheta} = A[-\gamma(1+\gamma)^{-1}z_1 - z_2\rho^{-1}U\cos\vartheta + \rho^{-1}V - 2\varepsilon z_2\sin^2\vartheta]$$

$$A = (1 - \rho^{-1}U\sin\vartheta + \varepsilon\sin 2\vartheta)^{-1}$$

$$U = -\frac{\rho^2 z_1^2}{2(1+\gamma)^2} + O(\rho^3),\ V = -\frac{\rho^2 z_1\sin\vartheta}{(1+\gamma)^2} + O(\rho^3)$$

$$\rho^2\left[1 + \frac{\gamma}{1+\gamma}z_1^2 + z_2^2 + \rho S(\vartheta, \rho, z_1, z_2)\right] = \mu^2 \tag{3.5}$$

где предполагается выполненным условие (1.3), т. е.

$$1 + 1/2(1+\gamma)^{-2}\rho z_1^2\sin\vartheta + \varepsilon\sin 2\vartheta + O(\rho^2) > 0 \tag{3.6}$$

Невозмущенная система (3.4) (т. е. при $\varepsilon = 0$) допускает порождающее решение [3]

$$\rho_0(\vartheta;\ \mu, M, N) = \mu K^{-1/2} + O(\mu^2),\ z_1^0(\vartheta;\ \mu, M, N) = L(\vartheta) + O(\mu) \tag{3.7}$$

$$z_2^0(\vartheta;\ \mu, M, N) = L'(\vartheta) + O(\mu)$$

$$K = 1 + g^2(M^2 + N^2),\ g = \sqrt{\frac{\gamma}{1+\gamma}}\ \left(g \neq \frac{1}{2}\right),\ L(\vartheta) = M\cos g\vartheta + N\sin g\vartheta$$

$$\mathrm{x}_0 = \begin{pmatrix}\rho_0\\ z_1^0\\ z_2^0\end{pmatrix},\qquad \mathrm{a} = \begin{pmatrix}\mu\\ M\\ N\end{pmatrix}$$

Это решение, как показано в [3], является общим при всех γ, кроме $\gamma = 1/3$ ($g = 1/2$). Вычислим элементы формулы (2.6)

$$\frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial \mathbf{a}} = \begin{Vmatrix} K^{-1/2} + O(\mu) & -g^2 M K^{-3/2}\mu + O(\mu^2) & -g^2 N K^{-3/2}\mu + O(\mu^2) \\ \varphi(\vartheta) + O(\mu) & \cos g\vartheta + O(\mu) & \sin g\vartheta + O(\mu) \\ \psi(\vartheta) + O(\mu) & -g \sin g\vartheta + O(\mu) & g\cos g\vartheta + O(\mu) \end{Vmatrix}$$

Для вычисления обратной матрицы несколько огрубим результат, положив $\varphi(\vartheta) = \psi(\vartheta) \equiv 0$, тогда получим

$$\left(\frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial \mathbf{a}}\right)^{-1} = \begin{Vmatrix} K^{1/2} + O(\mu) & g^2 K^{-1} L(\vartheta)\mu + O(\mu^2) & K^{-1}L'(\vartheta)\mu + O(\mu^2) \\ O(\mu) & \cos g\vartheta + O(\mu) & -g^{-1}\sin g\vartheta + O(\mu) \\ O(\mu) & \sin g\vartheta + O(\mu) & g^{-1}\cos g\vartheta + O(\mu) \end{Vmatrix}$$

Вектор $(\partial \mathbf{f} / \partial \varepsilon)_0$, где $\mathbf{f}$ — вектор правых частей системы (3.4), а индекс нуль означает подстановку $\varepsilon = 0$ и порождающего решения (3.7), равен

$$\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \varepsilon}\right)_0 = \begin{pmatrix} -2\mu K^{-1/2}\cos^2\vartheta + O(\mu^2) \\ 2L(\vartheta)\cos^2\vartheta - L'(\vartheta)\sin 2\vartheta + O(\mu) \\ -2L'(\vartheta)\sin^2\vartheta + g^2 L(\vartheta)\sin 2\vartheta + O(\mu) \end{pmatrix}$$

Положим в формуле (2.6) $\vartheta_0 = 0$. Согласно (3.3), это означает, что в начальный момент $\tau = 0$ имеем $u(0) = 0$. Опуская очевидные вычисления по формуле (2.6), выпишем первые две компоненты вектора $\mathbf{x}_1(\vartheta;\ \mu,\ M,\ N)$ первой поправки

$$\rho_1(\vartheta;\ \mu,\ M,\ N) = -\mu K^{-1/2}\left(\vartheta + \frac{1}{2}\sin 2\vartheta\right) + O(\mu^2)$$

$$z_1^1(\vartheta;\ \mu,\ M,\ N) = \frac{M}{g}\sin g\vartheta + \frac{1}{2}M\sin 2\vartheta\cos g\vartheta +$$

$$+ gM\sin^2\vartheta\sin g\vartheta - \frac{1}{2}N\sin 2\vartheta\sin g\vartheta - gN\sin^2\vartheta\cos g\vartheta + O(\mu)$$

Остается проинтегрировать уравнение для ϑ [3], что дает

$$\vartheta = \vartheta(\tau) = \tau + \varepsilon\sin^2\tau + O(\mu) + \ldots$$

Здесь точками отмечены члены второго порядка относительно μ и ε. Окончательно получим решение системы (3.1) для случая $u(0) = 0$ в виде

$$u = (\rho_0 + \varepsilon\rho_1)\sin\vartheta + O(\varepsilon^2)$$

$$v = \rho_0 z_1^\circ + \varepsilon(\rho_0 z_1^1 + \rho_1 z_1^\circ) + O(\varepsilon^2)$$

Постоянные μ (начальное значение энергии (3.2)), M и N определяются из начальных условий $x(0)$, $x^\cdot(0)$, $y^\cdot(0)$. Граница для ε определяется неравенством (3.6); интервал изменения τ имеет порядок $O(1/\varepsilon)$.

Поступила 25 II 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Харьков, 1892. Собр. соч., т. 2, М., Изд-во АН СССР, 1956.
2. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Гостехиздат, 1956.
3. Старжинский В. М. Об одном варианте метода определения периодических решений. Инж. ж. МТТ, 1968, т. 4, № 6.
4. Poincaré H. Les méthodes nouvelles de la méchanique céleste, t. I, Paris, 1892.