Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 517.946

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

М. И. Рабинович, А. А. Розенблюм

(Горький)

Для одномерных нелинейных динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных с малым параметром, предлагается асимптотический метод, позволяющий на основании известного решения невозмущенной задачи построить в заданной области изменения переменных приближенное решение, переходящее в точное при устремлении к нулю малого параметра. Суть метода заключается в вариации входящих в невозмущенное решение произвольных постоянных и построении для введенных таким образом новых медленно меняющихся функций координаты и времени системы дифференциальных уравнений, вид которых зависит от номера приближения. Эти уравнения, оставаясь нелинейными в частных производных, сохраняют специфику задачи и в то же время более доступны для анализа, чем исходные.

Обоснование метода сводится к доказательству теоремы о непрерывной зависимости решений системы дифференциальных уравнений в частных производных от изменения правых частей, которое дается для гиперболических и симметрических параболических систем.

Рассматриваемый в работе подход включает в себя как частные случаи известные асимптотические методы теории возмущений [1, 2], геометрической оптики [3, 4] и методы [5, 6], родственные асимптотическому методу Боголюбова для уравнений в обыкновенных производных, близких к линейным [7].

1. Пусть имеется система дифференциальных уравнений в форме

$$N(u) \equiv u_t + A(u, x, t, \chi, \tau) u_x + B(u, x, t, \chi, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k f_k(u, u_x, u_t, x, t, \chi, \tau) \tag{1.1}$$

$$(\chi = \chi^\circ + \mu x,\ \tau = \tau^\circ + \mu t,\ 0 < \mu \ll 1)$$

с начальными данными

$$u(x, t, \mu)|_\Gamma = \Phi(x, t, \mu) \tag{1.2}$$

где $u = (u_1, \ldots, u_n)$ — неизвестная вектор-функция, A — квадратная матрица, B, f_k — n-мерные вектор-функции, причем A, B, f_k — столь гладкие функции своих аргументов, сколько потребуется в дальнейшем, x — пространственная координата, t — время, Γ — кривая начальных данных [1]. Пусть также известное семейство решений невозмущенной задачи, т. е. системы (1.1), (1.2) при $\mu = 0$, зависящее от $l + r$ параметров

$$V(x, t, \chi^\circ, \tau^\circ) = V[\bar{C}^{(1)}(x, t, \chi^\circ, \tau^\circ), \bar{C}^{(2)}(\chi^\circ, \tau^\circ)] \tag{1.3}$$

$$(N\{V(x, t, \chi^\circ, \tau^\circ)\}|_{\mu=0} = 0, \quad \bar{C}^{(1)} = [C_1(x, t, \chi^\circ, \tau^\circ), \ldots, C_l(x, t, \chi^\circ, \tau^\circ)], \quad \bar{C}^{(2)} = [C_{l+1}, \ldots, C_{l+r}])$$

[1] Такая постановка задачи с начальными данными включает в себя, как частные случаи, задачу Коши и краевые задачи.

Здесь $\bar{C}^{(1)}$ — обобщенные фазы, известные функции x, t, а $\bar{C}^{(2)}$ — произвольные постоянные.

Цель предлагаемого асимптотического метода заключается в построении на основе известного решения V невозмущенной задачи приближенного решения $u^{(m)}(x, t)$ системы (1.1), (1.2), удовлетворяющего на конечных интервалах X, T условию

$$|u^{(m)}(x, t, \mu) - u(x, t, \mu)| < M\mu^{(m)} \quad (M = M(X, T)) \tag{1.4}$$

где $u(x, t, \mu)$ — точное решение (1.1), (1.2).

Как обычно делается при построении асимптотических методов (см. [7]), разобьем задачу на две части. При ее решении вначале найдем функцию $u^{(m)}$, удовлетворяющую системе (1.1), (1.2) с точностью до членов порядка μ^m — собственно метод (п. 2), а затем докажем, что $u^{(m)}$ удовлетворяет (1.4) — обоснование метода (п. 3).

Идея метода заключается в вариации входящих в невозмущенное решение (1.3) произвольных постоянных и построении для введенных таким образом новых функций координаты и времени системы уравнений в частных производных. Суть метода не связана с какими-либо ограничениями, накладываемыми на исходную систему (1.1), кроме существования при $\mu = 0$ достаточно общего семейства решений (1.3); поэтому все условия, которым должна удовлетворять рассматриваемая система уравнений, чтобы удовлетворялось неравенство (1.4), формулируются лишь на втором этапе решения задачи — при обосновании метода.

Варьируя по χ и τ обобщенные фазы и произвольные постоянные решения (1.3), образуем для системы (1.1), (1.2) m-е приближение

$$u^{(m)} = V[\bar{C}^{(1)}(x, t, \chi, \tau), \bar{C}^{(2)}(\chi, \tau)] + \sum_{i=1}^{m} \mu^i w^{(i)}(x, t, \chi, \tau) \tag{1.5}$$

где подлежащие определению функции $w^{(i)}$, как и V, удовлетворяют начальным данным, следующим из (1.2), (1.5)

$$|V - u|_\Gamma < K^{(0)}\mu, \quad \left| V + \sum_{i=1}^{j} \mu^i w^{(i)} - u \right|_\Gamma < K^{(j)}\mu^{j+1} \quad (j = 1, 2, \ldots, m) \tag{1.6}$$

Вновь введенную функцию $V(x, t, \chi, \tau)$ (при $\mu \neq 0$) определим системой

$$\frac{\partial^* V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{m} \mu^i F^{(i)}[\chi, \tau, V'_{c_1}, \ldots, V'_{c_{l+r}}] \quad \left(\frac{\partial^*}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} + \mu \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \tag{1.7}$$

где $F^{(i)}$ — неизвестные пока операторы по χ и τ [1], а начальные данные для V определяются (1.6). При отыскании $F^{(i)}$ и $w^{(i)}$ будем исходить из условия, что $u^{(m)}$ должно удовлетворять системе (1.1), (1.2) с точностью до членов порядка μ^{m+1}.

---

[1] Для уравнений в частных производных такой подход впервые применялся в [5].

Рассмотрим оператор

$$\bar{N}(u^{(m)}) = N(u^{(m)}) - \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k f_k$$

и, воспользовавшись формулой Тэйлора, сгруппируем в нем члены с одинаковыми степенями μ от единицы до m. Учитывая при этом (1.5), (1.7), получим

$$\begin{aligned}
&\bar{N}(u^{(m)}) = \mu\,[Lw^{(1)} + F^{(1)} + A(V)V_\chi - f_1(V, V_x, V_t)]_{(1)} + \\
&+ \mu^2 \Big[Lw^{(2)} + F^{(2)} + w_\tau^{(1)} + A(V)w_\chi^{(1)} + A_u'(V)w_x^{(1)}w^{(1)} + \frac{1}{2}A_u''(V)(w^{(1)})^2 + \\
&+ f_{1_u}'(V, V_x, V_t)w^{(1)} - f_{1_{u_x}}'(V, V_x, V_t)(w_x^{(1)} + V_\chi) - f_{1_{u_t}}'(V, V_x, V_t) \times \\
&\times (w_t^{(1)} + V_\tau) + f_2(V, V_x, V_t)\Big]_{(2)} + \ldots + \mu^m \Big[Lw^{(m)} + F^{(m)} + w_\tau^{(m-1)} + \\
&+ A(V)w_\chi^{(m-1)} + A_u'(V)(w^{(m-1)}w_x^{(1)} + \ldots + w^{(1)}w_x^{(m-1)}) + \frac{1}{2}A_u''(V)(w^{(1)})^2 \times \\
&\times w_x^{(m-2)} + \ldots) + \ldots + \frac{1}{(m-1)!}A_u^{m-1}(V)((w^{(1)})^{m-1}w_x^{(1)} - f_{1_u}'(V, V_x, V_t) \times \\
&\times w^{(m-1)} - \ldots - f_{m-1}'(V, V_x, V_t)w^{(1)} - f_m(V, V_x, V_t)\Big]_{(m)} + \\
&+ \mu^{m+1}\,[w_\tau^{(m)} + A(V)w_\chi^{(m)} + \ldots]_{(m+1)}
\end{aligned} \qquad (1.8)$$

Здесь введено обозначение

$$Lw^{(i)} = w_t^{(i)} + A(V)w_x^{(i)} + Pw^{(i)}, \qquad P = B_u' + A_u'V_x \qquad (1.9)$$

Требуя, чтобы коэффициенты при μ^i ($i = 1, 2, \ldots, m$) обратились в нуль, получим из (1.8) для $w^{(i)}$ систему линейных уравнений

$$Lw^{(i)} = h^{(i)}(x, t, \chi, \tau) - F^{(i)} \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \qquad h^{(i)} = [\ \ ]_{(i)} - Lw^{(i)} - F^{(i)} \qquad (1.10)$$

где $h^{(i)}$ зависит от $w^{(k)}, w_\chi^{(k)}, w_\tau^{(k)}, w_x^{(k)}, w_t^{(k)}$ ($k = 1, 2, \ldots, i-1$), а оператор L берется по быстрым переменным x и t. Поэтому при последовательном определении $w^{(i)}$ в (1.10) χ и τ играют роль параметров.

Если $w^{(i)}$ и их производные, определяемые задачей (1.10), (1.6), имеют тот же порядок величины, что и V

$$w_t^{(i)}, w_x^{(i)}, w_\chi^{(i)}, w_\tau^{(i)}, w^{(i)} \sim V \qquad (1.11)$$

то функция $g^{(m)}(x, t, \chi, \tau, \mu) = [\ \ ]_{(m+1)}$ также имеет порядок V, и в силу выбора функций $w^{(i)}$ m-е приближение $u^{(m)}$ удовлетворяет исходной системе (1.1), (1.2) с точностью до членов порядка μ^{m+1}, т. е. системе

$$N(u^{(m)}) = \sum_{k=1}^{m} \mu^k f_k + \mu^{m+1} g^{(m)} \qquad (1.12)$$

Задача нахождения ограниченных (в смысле (1.11)) функций из (1.10), (1.6) разрешима в общем случае не при всякой правой части (1.10). Условия, которые необходимо наложить на правые части (1.10) для ее разрешимости, являются исходными при определении операторов $F^{(i)}$. Если эта задача разрешима при любом $h^{(i)}$, то следует положить $F^{(i)} \equiv 0$, при этом рассматриваемый подход совпадает с методом возмущений. Путь определения $F^{(i)}$ зависит от свойств оператора $\bar{N}$ и вида V.

2. В качестве важного и весьма общего примера дадим способ определения $F^{(i)}$ в случае, когда система (1.10), (1.6) допускает существование периодических по x и t решений[1]. Пусть $\Lambda(\chi, \tau)$ и $\Theta(\chi, \tau)$ — периоды этих решений по x и t ($\Lambda \ll X$, $\Theta \ll T$). Поставим для $w^{(i)}$ задачу с периодическими краевыми условиями

$$w^{(i)}(x + \Lambda, t, \chi, \tau) = w^{(i)}(x, t + \Theta, \chi, \tau) = w^{(i)}(x, t, \chi, \tau) \tag{2.1}$$

Наряду с краевой задачей (1.10), (2.1) рассмотрим однородную краевую задачу с сопряженным дифференциальным выражением

$$L^*\psi \equiv -\psi_t - (A^*\psi)_x + P^*\psi = 0 \tag{2.2}$$

и также периодическими краевыми условиями

$$\psi(x + \Lambda, t, \chi, \tau) = \psi(x, t + \Theta, \chi, \tau) = \psi(x, t, \chi, \tau) \tag{2.3}$$

где A и P — периодические по x и t матрицы с периодом Λ, Θ, A^* и P^* — матрицы, транспонированные к A и P.

Покажем, что оператор L^* краевой задачи (2.2), (2.3) — сопряженный оператору L краевой задачи (1.10), (2.1). Умножая Lw скалярно на ψ, а $L^*\psi$ на w, можно записать (так как $(\psi, Bw) = (B^*\psi, w)$, $(\psi, Aw) = (A^*\psi, w)$)

$$(\psi, Lw) - (L^*\psi, w) = (\psi, w)_t + \frac{\partial}{\partial x}(\psi, Aw) \tag{2.4}$$

Интегрируя затем по периодам, получим

$$\begin{aligned}\int\limits_x^{x+\Lambda}\int\limits_t^{t+\Theta}\{(\psi, Lw) - (L^*\psi, w)\}\,dxdt = \int\limits_x^{x+\Lambda}(\psi[x, t+\Theta], w[x, t+\Theta])\,dx\, - \\ - \int\limits_x^{x+\Lambda}(\psi[x,t], w[x,t])\,dx + \int\limits_t^{t+\Theta}(\psi[x+\Lambda, t], A[x+\Lambda, t]\,w[x+\Lambda, t])\,dt\, - \\ - \int\limits_t^{t+\Theta}(\psi[x,t], A[x,t]\,w[x,t])\,dt = 0\end{aligned} \tag{2.5}$$

Таким образом, при любых w и ψ, удовлетворяющих (2.1) и (2.3) соответственно, справедливо равенство

$$\int\limits_x^{x+\Lambda}\int\limits_t^{t+\Theta}(\psi, Lw)\,dxdt = \int\limits_x^{x+\Lambda}\int\limits_t^{t+\Theta}(L^*\psi, w)\,dxdt \quad \text{или} \quad [\psi, Lw] = [L^*\psi, w] \tag{2.6}$$

которое служит определением сопряженного оператора, т. е. L^* — оператор, сопряженный L.

[1] Заметим, что если (1.1) имеет вид $u_t + A(x, t)\,u_x = \mu f_1(x, t, u) + \ldots$, а начальные данные заданы на характеристике, то задача определения $F^{(i)}$ сводится к алгебраической, независимо от вида решения V.

Поскольку $L^*\psi = 0$, а $Lw = h - F$, из (2.6) получим

$$[L^*\psi, w] = [\psi, Lw] = [\psi, (h - F)] = 0 \tag{2.7}$$

Следовательно, для существования периодического решения задачи (1.6), (1.10) (или решения задачи (1.10), (2.1)) необходима ортогональность (в смысле интегралов (2.6)) $h^{(i)} - F^{(i)}$ любому решению $\psi^{(j)}$ сопряженной задачи (2.2), (2.3), т. е. необходимо, чтобы операторы удовлетворяли системе интегральных уравнений

$$\int\limits_x^{x+\Lambda}\int\limits_t^{t+\Theta} (h^{(i)}, \psi^{(j)})\, dxdt = \int\limits_x^{x+\Lambda}\int\limits_t^{t+\Theta} (F^{(i)}, \psi^{(j)})\, dxdt \tag{2.8}$$

или $[h^{(i)}, \psi^{(j)}] = [F^{(i)}, \psi^{(j)}]$.

Для формулировки достаточных условий разрешимости задачи (1.10), (2.1) следует конкретизировать свойства оператора L. В частности, если оператор L эллиптический, то можно показать [8], что условия (2.8) не только необходимы, но и достаточны. Также достаточными эти условия являются и в случае, когда задачу определения $w^{(i)}$ при помощи разложения $h^{(i)}$ и $w^{(i)}$ по полной системе функций можно свести к алгебраической [5, 6].

Сравнивая рассмотренный подход с методом возмущений, следует отметить, что наличие в правой части (1.10) не определенных ранее слагаемых $F^{(i)}$ позволяет добиться существования ограниченных (в смысле (1.11)) или периодических решений для $w^{(i)}$ и в тех случаях, когда метод возмущений не применим. Действительно, в методе возмущений для функций $w^{(i)}$ получаются уравнения, аналогичные (1.10), но их правые части — $h^{(i)}$ лишь в отдельных случаях могут оказаться ортогональными всем решениям соответствующей сопряженной системы. Физически такая ортогональность исключает наличие резонансов в $h^{(i)}$, что и является условием применимости метода возмущений. Ввиду того, что в рассмотренном подходе V, будучи функцией χ и τ, меняется от одного приближения к другому, оказывается возможным за счет свободы в выборе $F^{(i)}$ определить $V(x, t, \chi, \tau)$ таким образом, чтобы извлечь из $h^{(i)}$ резонансные члены порядка μ^i.

В общем случае условия (2.8) приводят к бесконечной системе уравнений для определения $F^{(i)}$, и для ее разрешимости решение $V[\ ]$ должно содержать бесконечное число обобщенных фаз и произвольных постоянных. Однако в реальных задачах, число p различных функций $\psi^{(j)}$, для которых $[h^{(i)}, \psi^{(j)}] = [F^{(i)}, \psi^{(j)}] \neq 0$, обычно конечно (это соответствует конечному числу внутренних резонансов в системе (1.10), (2.1)). Поэтому условиям (2.8) можно удовлетворить, если число обобщенных фаз и произвольных постоянных $l + r \geqslant p$ (если $l + r > p$, то часть этих функций следует считать определенными из начальных данных и независящими от χ и τ). Если $l + r < p$, то необходимо расширить класс решений невозмущенной системы таким образом, чтобы $l' + r' = p$. При $l + r \geqslant p$, раскрыв вид операторов $F^{(i)}$ в соответствии с (2.8), можно получить окончательно из (1.7) уравнения непосредственно для обобщенных фаз $C_1, \ldots, C_l$ и параметров $C_{l+1} \ldots, C_{l+r}$.

Найдем эти уравнения в случае, когда $C_1(x, t), \ldots, C_l(x, t)$ при $\mu = 0$ линейные функции x и t; именно к этому случаю относится большинство задач о распространении и взаимодействии волн в нелинейных средах [9].

Предварительно покажем справедливость соотношений

$$[V'_{c_i}, \psi^{(j)}] = \delta_{ij}\alpha_i \tag{2.9}$$

где α_i — число.

Дифференцируя (1.4) по C_i, получим

$$L(V'_{c_i}) = 0 \tag{2.10}$$

т. е. V'_{c_i} — решения однородной краевой задачи (1.10), (2.1).

Умножая (2.10) скалярно на ψ, а (2.2) — на $z = V'_{c_i}$ и вычитая полученные равенства, найдем

$$(z, \psi)_t + (z, A^*\psi)_x = 0 \tag{2.11}$$

Ввиду произвола в выборе начальных данных для ψ без ограничения общности можно считать, что при $t = 0$ выполнены условия ортогональности [1]

$$\int\limits_x^{x+\Lambda} (z^{(i)}[x, 0], \psi^{(j)}[x, 0])\,dx = \delta_{ij}\frac{\alpha_i}{\Theta} \tag{2.12}$$

Тогда, интегрируя (2.11) по x и t в пределах от x до $x + \Lambda$ и от нуля до t соответственно, получим

$$\delta_{ij}\frac{\alpha_i}{\Theta} = \int\limits_x^{x+\Lambda} (z^{(i)}[x, t], \psi^{(j)}[x, t])\,dx + \int\limits_0^t \int\limits_x^{x+\Lambda} (z^{(i)}[x, t], A^*[x, t]\,\psi^{(j)}[x, t])_x\,dx\,dt$$

Отсюда, учитывая периодичность z, ψ и A, найдем окончательно

$$\int\limits_x^{x+\Lambda} \int\limits_t^{t+\Theta} (z^{(i)}, \psi^{(j)})\,dx\,dt = \delta_{ij}\alpha_i$$

Поскольку C_i при $\mu = 0$ линейны по x, t, производные $\partial^* C_i/\partial t$ считаем при $\mu \neq 0$ не зависящими от x, t явно и уравнения (1.7) разрешим относительно $\partial^* C_i / \partial t$. Умножив (1.7), где

$$\frac{\partial^* V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t} + \mu \sum_{i=1}^{l+r} V'_{c_i}\frac{\partial C_i}{\partial \tau}$$

скалярно на $\psi^{(j)}$, получим, воспользовавшись (2.9), уравнения для параметров $C_{l+1}, \ldots, C_{l+r}$ и обобщенных фаз $C_1(x, t, \chi, \tau), \ldots, C_l(x, t, \chi, \tau)$

---

[1] В качестве начальных условий для $\psi^{(j)}$ можно взять начальные условия для $z^{(i)}$ (если они ортогонализованы) и тем самым установить соответствие между решениями исходной и сопряженной задачи.

в виде

$$\alpha_i \frac{\partial C_i}{\partial \tau} = [h^{(1)}, \psi^{(i)}] + \ldots + \mu^{m-1} [h^{(m)}, \psi^{(i)}] \qquad (i = l+1, \ldots, l+r) \tag{2.13}$$

$$\alpha_i \frac{\partial^* C_i}{\partial t} = [(-A(V) V_x' - B(V)), \psi^{(i)}] + \sum_{k=1}^{m} \mu^k [h^{(k)}, \psi^{(i)}] \qquad (i = 1, 2, \ldots, l) \tag{2.14}$$

Как частный случай, из (2.13), (2.14) следуют уравнения для амплитуд и фаз волн, взаимодействующих в слабонелинейной среде [5,6].

Из (1.4), (2.8) следуют также уравнения группы методов, аналогичных методу геометрической оптики. Для их получения следует C_i разложить в ряд по μ

$$C_i = \sum_{k=0}^{m} C_i^{(k)}(\chi, \tau) \mu^k \quad (i = l+1, \ldots, l+r), \qquad C_i = C_i^\circ(x, t, \chi, \tau) + \\ + \sum_{k=1}^{m} C_i^{(k)}(\chi, \tau) \mu^k \quad (i = 1, 2, \ldots, l)$$

и отыскивать не уравнения для V, а уравнения для $C_i^{(k)}$. При этом вместо $h^{(k)}$ в (1.10) следует писать $\bar{h}^{(k)}$, где $\bar{h}^{(k)} = h^{(k)}$ ($k = 2, 3, \ldots, m$) и $\bar{h}^{(1)} = h^{(1)} - A(V)\, \partial V / \partial \chi$, а роль $F^{(k)}$ будет играть выражение

$$F^{(k)} = \sum_{i=1}^{l+r} \left[V_{C_i}' \frac{\partial C_i^{(k)}}{\partial \tau} + A(V) \frac{\partial C_i^{(k)}}{\partial x} V_{C_i}' \right] \qquad (k = 1, 2, \ldots, m) \tag{2.15}$$

Подставляя (2.15), в (2.8) и учитывая (2.9), получим аналогично (2.13), (2.14)

$$\alpha_i \frac{\partial C_i^{(k-1)}}{\partial \tau} + \frac{\partial C_i^{(k-1)}}{\partial \chi} [A(V) V_{C_i}', \psi^{(i)}] = [\bar{h}^{(k)}, \psi^{(i)}] \tag{2.16}$$

$$(i = l+1, \ldots, l+r, \quad k = 1, 2, \ldots, m; \quad i = 1, 2, \ldots, l, \quad k = 2, 3, \ldots, m)$$

$$\alpha_i \frac{\partial^* C_i^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial^* C_i^{(0)}}{\partial x} [A(V) V_{C_i}', \psi^{(i)}] = -[B(V), \psi^{(i)}] + [\bar{h}^{(i)}, \psi^{(i)}] \tag{2.17}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, l)$$

Заметим, что система (2.13), (2.14) предпочтительнее для анализа, поскольку вместо $(l+r)\, m$ уравнений первого порядка она содержит $l + r$ уравнений, порядок каждого из которых не выше номера приближения. Ввиду нелинейности уравнений (2.16), (2.17), они не приводятся к виду (2.13), (2.14), хотя обратное всегда возможно.

3. Для обоснования рассматриваемого асимптотического метода необходимо доказать, что для системы (1.1) разность между точным решением и его m-м приближением, удовлетворяющим системе (1.12), имеет порядок величины μ^m на рассматриваемом интервале. Докажем это для задачи Коши в случае гиперболической и симметрической параболической систем.

В целях сокращения записи представим системы (1.1) и (1.12) в виде

$$u_t + A(u, x, t, \mu) u_x + B(u, x, t, \mu) = \mu f(u, u_x, u_t, x, t, \mu) \tag{3.1}$$

$$u_t^{(m)} + A(u^{(m)}, x, t, \mu) u_x^{(m)} + B(u^{(m)}, x, t, \mu) = \\ = \mu f(u^{(m)}, u_x^{(m)}, u_t^{(m)}, x, t, \mu) + \mu^{m+1} g^{(m)}(x, t, \mu) \tag{3.2}$$

Здесь зависимость от медленных переменных включена в зависимость от x, t, а в правой части (1.1) взято одно слагаемое.

Теорема 1. Пусть системы (3.1) и (3.2) в области $0 \leqslant t < \infty$, $0 \leqslant \mu < \mu_1$, $-\infty < u, u_x, u_t, x < \infty$ удовлетворяют следующим требованиям

1. $A(u, x, t, \mu)$, $B(u, x, t, \mu)$, $f(u, u_x, u_t, x, t, \mu)$, $g^{(m)}(x, t, \mu)$ непрерывны по μ, непрерывно дифференцируемы по x, t и дважды непрерывно дифференцируемы по u, u_x, u_t.

2. Существуют решения $u(x, t, \mu)$ и $u^{(m)}(x, t, \mu)$ систем (3.1) и (3.2), непрерывные по μ и дважды непрерывно дифференцируемые по x и t, удовлетворяющие начальным условиям $u(x, 0, \mu) = \varphi_1(x, \mu)$, $u^{(m)}(x, 0, \mu) = \varphi_2(x, \mu)$, где φ_1 и φ_2 — функции класса C^2, причем $|\varphi_1 - \varphi_2| < K\mu^{m+1}$, K — постоянная.

3. Системы гиперболические, причем все n характеристик, проходящих через любую точку полуплоскости (x, t) в обратном направлении, пересекают ось абсцисс.

Тогда каковы бы ни были числа X_1, X_2, T, существует такая постоянная M и значение μ_0, что

$$|u^{(m)}(x, t, \mu) - u(x, t, \mu)| < M\mu^{m+1}$$

$$\text{при всех } 0 \leqslant t \leqslant T$$

$$X_1 \leqslant x \leqslant X_2, \quad 0 \leqslant \mu \leqslant \mu_0$$

Примечание. Если функция f не зависит от u_x и u_t или зависит от них линейно, то достаточно потребовать непрерывности функций B, f и $g^{(m)}$ по x и t и ограничиться существованием решения и начальными условиями в классе C^1.

Доказательство. Будем считать $u^{(m)}$ и u известными функциями. Подставим их в (3.1) и (3.2), получим тождества по x и t. Вычтем (3.1) из (3.2)

$$(u^{(m)} - u)_t + A(u^{(m)})(u^{(m)} - u)_x + [A(u^{(m)}) - A(u)] u_x + B(u^{(m)}) - B(u) = \\ = \mu [f(u^{(m)}, u_x^{(m)}, u_t^{(m)}) - f(u, u_x, u_t)] + \mu^{m+1} g^{(m)}(x, t) \tag{3.3}$$

Обозначим $u^{(m)} - u = w$. В силу леммы Адамара о конечных приращениях

$$A(u^{(m)}) - A(u) = C(u^{(m)}, u) w = C(x, t, \mu) w$$

$$B(u^{(m)}) - B(u) = E(u^{(m)}, u) w = E(x, t, \mu) w$$

$$f(u^{(m)}, u_x^{(m)}, u_t^{(m)}) - f(u, u_x, u_t) = f_3(u^{(m)}, u, u_x^{(m)}, u_x, u_t^{(m)}, u_t) w + \\ + f_2(u^{(m)}, u, u_x^{(m)}, u_x, u_t^{(m)}, u_t) w_x + f_1(u^{(m)}, u, u_x^{(m)}, u_x, u_t^{(m)}, u_t) w_t$$

Функции C, E, f_1, f_2, f_3 — непрерывно дифференцируемые, в конечном счете зависящие от x, t, μ. С учетом этих соотношений (3.3) имеет вид

$$[I - \mu f_1] w_t + [A - \mu f_2] w_x + [C u_x + E - \mu f_3] w = \mu^{m+1} g^{(m)} \tag{3.4}$$

где I — единичная матрица. Поскольку f_1, f_2 непрерывны, существует такое значение μ_0, что при всех $0 \leqslant \mu \leqslant \mu_0$ система (3.4) остается гиперболической в ограниченной замкнутой области D, которая определяется ниже. Существует также линейное преобразование $w = Hw_1$ с непрерывно дифференцируемой невырожденной матрицей H, приводящее систему (3.4) к виду

$$w_{1_t} + A_1(x, t, \mu) w_{1_x} + B_1(x, t, \mu) w_1 = \mu^{m+1} g_1(x, \mu, t) \tag{3.5}$$

где A_1 — симметричная невырожденная матрица [10] класса C^1.

Произведем замену $w_1 = e^{\alpha t} z$; для $z(x, t)$ получим из (3.5)

$$z_t + A_1 z_x + (B_1 + \alpha I) z = \mu^{m+1} e^{-\alpha t} g_1 \tag{3.6}$$

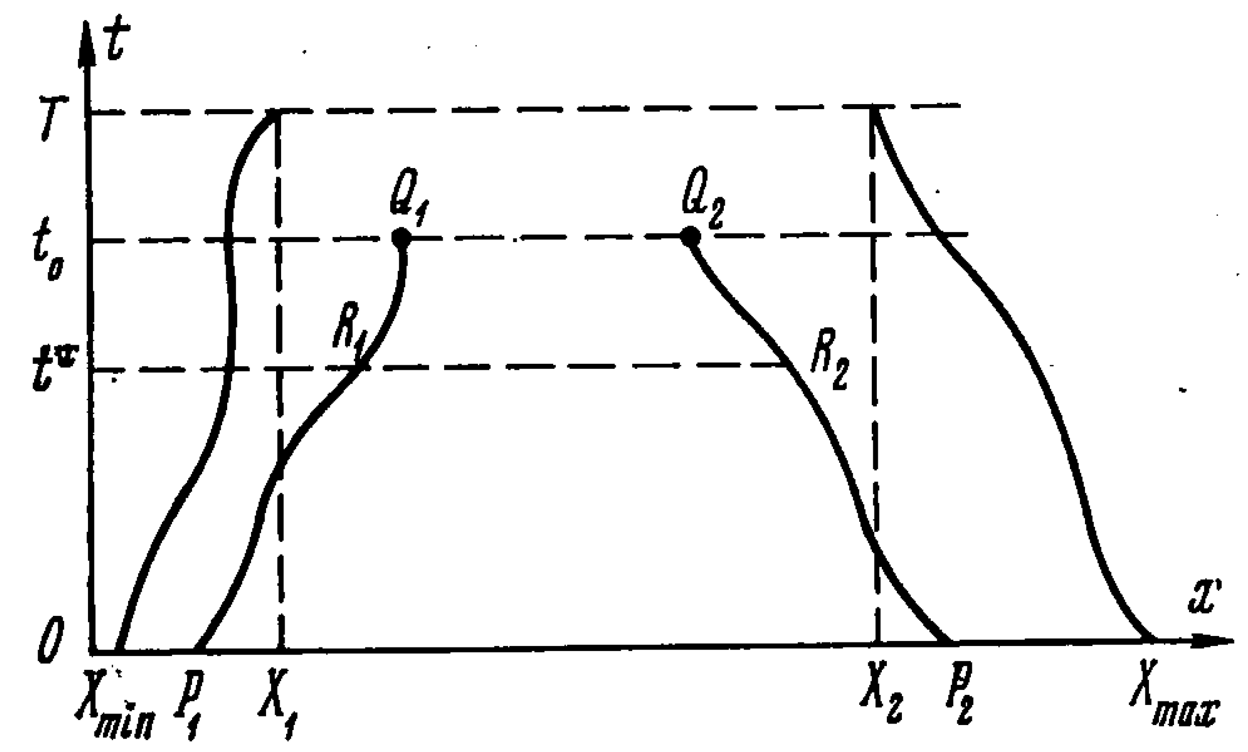
Из тождества $(z, A_1 z)_x = (z_x, A_1 z) + (z, A_1 z_x) + (z, A_{1x} z)$ ввиду симметричности матрицы A_1 вытекает

$$2(z, A_1 z_x) = (z, A_1 z)_x - (z, A_{1_x} z) \tag{3.7}$$

Следуя Куранту [10], умножим (3.6) скалярно на z с учетом (3.7)

$$\begin{gathered} {}^1/_2 (z, z)_t + {}^1/_2 (z, A_1 z)_x + (z, [B_1 + \alpha I - {}^1/_2 A_{1_x}] z) = \mu^{m+1} (z, g_2) \\ g_2(x, t) = e^{-\alpha t} g_1(x, t) \end{gathered} \tag{3.8}$$

Выберем параметр α достаточно большим, чтобы матрица $B_2 = B_1 + \alpha I - {}^1/_2 A_{1_x}$ была положительно определенной в области D: $[0 \leqslant t \leqslant T,\ X_{\min} \leqslant x \leqslant X_{\max}$ $(0 \leqslant \mu \leqslant \mu_0)$, где $X_{\min}$ — абсцисса точки пересечения с осью x характеристики, проходящей через точку (X_1, T) с наименьшим углом наклона по отношению к этой оси, а $X_{\max}$ — абсцисса точки пересечения с осью x характеристики, проходящей через точку (X_2, T) с наибольшим углом наклона по отношению к оси x (фигура).



Пусть x_1, x_2 — произвольные числа $X_1 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant X_2$, а t_0 — произвольное число $0 < t_0 \leqslant T$. Проведем через точки $Q_1(x_1, t_0)$ и $Q_2(x_2, t_0)$ крайние характеристики и обозначим P_1 и P_2 соответствующие точки пересечения этих характеристик с осью абсцисс (фигура). Проинтегрируем теперь тождество (3.8) по криволинейной трапеции $P_1P_2Q_2Q_1$. В силу формулы Грина

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \iint\limits_{P_1P_2Q_2Q_1} [(z, z)_t + (z, A_1 z)_x]\, dxdt &= \frac{1}{2} \int\limits_{P_1P_2Q_2Q_1} [(z, z) n_t + (z, A_1 z) n_x]\, ds = \\ &= \frac{1}{2} \int\limits_{Q_1Q_2} z^2 dx - \frac{1}{2} \int\limits_{P_1P_2} z^2 dx + \frac{1}{2} \int\limits_{P_1Q_1 + P_2Q_2} [(z, z) n_t + (z, A_1 z) n_x]\, ds = \\ &= \frac{1}{2} \int\limits_{Q_1Q_2} z^2 dx - \frac{1}{2} \int\limits_{P_1P_2} z^2 dx + \frac{1}{2} \int\limits_{P_1Q_1 + P_2Q_2} n_x \left(z, \left[A_1 + \frac{n_t}{n_x} I\right] z\right) ds \end{aligned} \tag{3.9}$$

Здесь n_x и n_t — компоненты единичной нормали.

Обозначим λ_1 наибольшее собственное значение матрицы A_1, а λ_2 ее наименьшее собственное значение. На характеристике P_1Q_1 имеем $n_t / n_x = -\lambda_1$, а на характеристике P_2Q_2 имеем $n_t / n_x = -\lambda_2$. Для симметричной матрицы

$$\lambda_1 = \max \frac{(z, A_1 z)}{(z, z)}, \qquad \lambda_2 = \min \frac{(z, A_2 z)}{(z, z)}$$

Поэтому $\lambda_1(z, z) \geqslant (z, A_1 z)$, $\lambda_2(z, z) \leqslant (z_1, A_1 z)$ или $(z, [A_1 - \lambda_1 I] z) \leqslant 0$, $(z, [A_1 - \lambda_2 I] z) \geqslant 0$. Так как $n_x < 0$ на P_1Q_1 и $n_x > 0$ на P_2Q_2, то

$$\frac{1}{2} \int\limits_{P_1Q_1 + P_2Q_2} n_x \left(z, \left[A_1 + \frac{n_t}{n_x} I\right] z\right) ds \geqslant 0 \tag{3.10}$$

Кроме того, в силу начальных условий

$$\int\limits_{P_1P_2} z^2 dx < K_1^2 X \mu^{2(m+1)}, \qquad X = X_2 - X_1, \qquad K_1 = K \, \| H^{-1} \| \tag{3.11}$$

где $\| H^{-1} \|$ — норма матрицы H^{-1}. Матрица B_2 положительно определенная, поэтому

$$\iint\limits_{P_1P_2Q_2Q_1} (z, B_2 z)\, dx\, dt \geqslant 0 \tag{3.12}$$

Учитывая (3.9) — (3.12) при интегрировании (3.8), получим неравенство

$$\frac{1}{2} \int\limits_{x_1}^{x_2} z^2 (x, \ t_0)\, dx < \mu^{m+1} \iint\limits_{P_1P_2Q_2Q_1} (z, g_2)\, dx\, dt + \frac{1}{2} K_1^2 X \mu^{2(m+1)} \tag{3.13}$$

Обозначим через $M_1 / 2$ максимум модуля вектор-функции g_2 в области D — $M_1 = 2 \max | e^{-\alpha t} g_1 (x, t, \mu) |$, $(x, t) \in D$ $(0 \leqslant \mu \leqslant \mu_0)$.

Тогда

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} z^2 (x, \ t_0)\, dx < M_1 \mu^{m+1} \int\limits_0^{t_0} dt \int\limits_{\varphi_1 (t)}^{\varphi_2 (t)} | z (x, \ t) |\, dx + K_1^2 X \mu^{2(m+1)} \tag{3.14}$$

где $x = \varphi_1 (t)$ — уравнение характеристики P_1Q_1, а $x = \varphi_2 (t)$ — характеристики P_2Q_2. Интеграл

$$\int\limits_{\varphi_1 (t)}^{\varphi_2 (t)} | z (x, \ t) |\, dx$$

как функция t, имеет порядок малости при всех t тот же, что и при $t = 0$, т. е. μ^{m+1}.

Действительно, пусть он достигает максимума при некотором t^* $(0 \leqslant t^* \leqslant t_0)$. Полагая в (3.14) $t = t^*$, получим

$$\int\limits_{x_1 = \varphi_1 (t_0)}^{x_2 = \varphi_2 (t_0)} z^2 (x, \ t_0)\, dx < T M_1 \mu^{m+1} \int\limits_{\varphi_1 (t^*)}^{\varphi_2 (t^*)} | z (x, \ t^*) |\, dx + K_1^2 X \mu^{2\,(m+1)}$$

В силу неравенства Шварца имеем

$$\left(\int\limits_{\varphi_1 (t_0)}^{\varphi_2 (t_0)} | z (x, \ t_0) |\, dx \right)^2 < T X M_1 \mu^{m+1} \int\limits_{\varphi_1 (t^*)}^{\varphi_2 (t^*)} | z (x, \ t^*) |\, dx + K_1^2 X^2 \mu^{2\,(m+1)}$$

Полагая $t_0 = t^*$, т. е. интегрируя (3.8) по трапеции $P_1P_2R_2R_1$, где R_1 $(\varphi_1 (t^*), t^*)$, R_2 $(\varphi_2 (t^*), \ t^*)$, получим

$$\left(\int\limits_{\varphi_1 (t^*)}^{\varphi_2 (t^*)} | z (x, t) |\, dx \right)^2 < T X M_1 \mu^{m+1} \int\limits_{\varphi_1 (t^*)}^{\varphi_2 (t^*)} | z (x, \ t^*) |\, dx + K_1^2 X^2 \mu^{2\,(m+1)} \tag{3.15}$$

Отсюда

$$\int\limits_{\varphi_1 (t^*)}^{\varphi_2 (t^*)} | z (x, \ t^*) |\, dx < M_2 \mu^{m+1}, \quad M_2 = \frac{1}{2} T X \left[M_1 + \left(M_1^2 + \frac{4 K_1^2}{T^2} \right)^{1/2} \right] \tag{3.16}$$

Согласно определению t^*

$$\int\limits_{\varphi_1 (t_0)}^{\varphi_2 (t_0)} | z (x, \ t_0) |\, dx \leqslant \int\limits_{\varphi_1 (t^*)}^{\varphi_2 (t^*)} | z (x, \ t^*) |\, dx$$

или с учетом (3.16)

$$\int_{x_1}^{x_2} |z(x,\ t)|\, dx < M_2\mu^{m+1} \tag{3.17}$$

Имея оценку интеграла, учитывая ограниченность $z(x, t)$ и $z_x(x, t)$ в области D, можно получить и оценку подынтегральной функции. При фиксированном значении интеграла максимальное значение подынтегральной функции класса C^1 равно

$$\int_{x_1}^{x_2} |z|\, dx = \frac{(\max |z|)^2}{\max |z|_x}$$

Следовательно, в общем случае

$$|z|^2 \leqslant \max |z|_x \int_{x_1}^{x_2} |z|\, dx \leqslant \max |z_x| \int_{x_1}^{x_2} |z|\, dx$$

или, согласно (3.17)

$$|z|^2 \leqslant \max |wz_x|\, M_2\mu^{m+1} \tag{3.18}$$

Отсюда получим оценку для $w_1(x, t)$

$$|w_1|^2 < \max |w_{1x}|\, M_2 e^{\alpha T} \mu^{m+1} \tag{3.19}$$

Остается получить оценку для $w(x, t)$. Так как $w_1 = H^{-1}w$, имеем

$$\max |w_{1x}| \leqslant \|H^{-1}\| \max |w_x| + \|H_x^{-1}\| \max |w|$$

Обозначим $\max |w_x| / \max |w| = S$. Учитывая затем (3.19), получим

$$|w|^2 \leqslant \|H\|^2 |w_1|^2 < \|H\|^2 (\|H^{-1}\| S + \|H_x^{-1}\|) M_2 e^{\alpha T} \max |w|$$

$$|u^{(m)} - u| < M\mu^{m+1}, \quad M = TXe^{\alpha T} \|H\|^2 (\|H^{-1}\| S + \|H_x^{-1}\|) \frac{1}{2} \left(M_1 + \sqrt{M_1^2 + \frac{4K_1^2}{T^2}}\right)$$

Теорема доказана.

Фигурирующий в доказательстве параметр α характеризует степень неустойчивости однородной системы $N(u) = 0$. Асимптотический метод применим к системам с произвольной неустойчивостью. Однако, если речь идет о решениях (3.1), близких к периодическим, то α должно иметь порядок μ, тогда $e^{\alpha T}$ при $T < 1/\mu$ имеет порядок единицу. В этом случае при H, S и g_2 порядка единицы на любых конечных интервалах x, t, разность $u^{(m)} - u$ на интервале $XT \sim 1/\mu$ (например $X \sim 1/\sqrt{\mu}$, $T \sim 1/\sqrt{\mu}$) имеет порядок μ^m.

Из приведенного доказательства видно, что аналогичная теорема справедлива для симметрических параболических систем, имеющих в каждой точке полуплоскости x, t не менее двух характеристик, причем все характеристики в обратном направлении пересекают ось абсцисс и правая часть (3.1) не зависит от u_x и u_t. В этом случае вместо системы (3.4) получается симметрическая система

$$w_t + Aw_x + [Cu_x + E - \mu f_3]w = \mu^{m+1} g^{(m)}$$

Необходимость замены $w = Hw_1$ отпадает, а все последующие выкладки остаются в силе.

Теорема 2. Пусть система

$$u_t + A\,(u,\ x,\ t,\ \mu)\ u_x + B\,(u,\ x,\ t,\ \mu) = 0 \tag{3.20}$$

удовлетворяет в области $-\infty < u,\ x, < \infty,\ 0 \leqslant t,\ \mu < \infty$ следующим условиям

1. A — симметричная матрица, непрерывно дифференцируемая по всем аргументам.

2. B непрерывна по x, t, непрерывно дифференцируема по u, μ.

3. Через каждую точку полуплоскости $(x,\ t)$ проходит не менее двух характеристик, и все характеристики в обратном направлении пересекают ось x.

4. $u\,(x,\ 0,\ \mu) = \varphi\,(x,\ \mu) \in C^1$.

Тогда $u\,(x,\ t,\ \mu)$ — непрерывно дифференцируемая функция при всех $0 \leqslant \mu < \infty$.

Доказательство. Пусть $u\,(x,\ t,\ \mu)$ и $u\,(x,\ t,\ \mu + \Delta\mu)$ — известные решения системы (3.20). Вычитая соответствующие тождества, получим

$$\begin{gathered} u_t\,(\mu + \Delta\mu) - u_t\,(\mu) + A\,[u\,(\mu + \Delta\mu),\ \mu + \Delta\mu]\,[u_x\,(\mu + \Delta\mu) - u_x\,(\mu)] + \\ + \{A\,[u\,(\mu + \Delta\mu),\ \mu + \Delta\mu] - A\,[u\,(\mu),\ \mu]\}\,u_x\,(\mu) + B\,[u\,(\mu + \Delta\mu),\ \mu + \Delta\mu] - \\ - B\,[u\,(\mu),\ \mu + \Delta\mu] + B\,[u\,(\mu),\ \mu + \Delta\mu] - B\,[u\,(\mu),\ \mu] = 0 \end{gathered}$$

(аргументы x, t опущены). Применяя лемму Адамара для соответствующих разностей, найдем

$$\Delta u_t + A\Delta u_x + C\,(\mu,\ \Delta\mu)\,u_x\Delta u + D\,(\mu,\ \Delta\mu)\,u_x\Delta\mu + E\,(\mu,\ \Delta\mu)\,\Delta u + F\,(\mu,\ \Delta\mu)\,\Delta\mu = 0$$

где C, D, E, F — непрерывные функции x, t, μ, $\Delta\mu$. Рассматривая $\Delta u = u\,(\mu + \Delta\mu) - u\,(\mu)$ как неизвестную функцию, получим для нее линейную систему

$$\Delta u_t + A\Delta u_x + B^\circ\Delta u = \Delta\mu f^\circ,\quad B^\circ = Cu_x + E,\quad f^\circ = -Du_x - F \tag{3.21}$$

которая удовлетворяет условиям теоремы 1. Поэтому существует такая постоянная C°, что $|\,\Delta u\,| < C^\circ\,|\,\Delta\mu\,|$, т. е. $u\,(x,\ t,\ \mu)$ — непрерывная функция μ.

Разделим (3.21) на $\Delta\mu$

$$\left(\frac{\Delta u}{\Delta\mu}\right)_t + A\left(\frac{\Delta u}{\Delta\mu}\right)_x + B^\circ\,\frac{\Delta u}{\Delta\mu} = f^\circ \tag{3.22}$$

Наряду с системой (3.22) рассмотрим линейную систему

$$z_t + Az_x + B_z = f^\circ \tag{3.23}$$

Ее решение $z\,(x,\ t,\ \mu,\ \Delta\mu)$ — непрерывная функция параметра $\Delta\mu$, в том числе и при $\Delta\mu = 0$. Рассматривая ее решение при тех же начальных условиях, что и (3.22), получим в силу единственности решения $z\,(x,\ t,\ \mu,\ \Delta\mu) = \Delta u\,/\,\Delta\mu$, причем существует предел

$$\lim_{\Delta\mu \to 0} z\,(x,\ t,\ \mu,\ \Delta\mu) = z\,(x,\ t,\ \mu,\ 0) = \partial u\,/\,\partial\mu$$

Для доказательства непрерывности u_μ положим в (3.22)

$$\Delta\mu \to 0,\quad \partial u_\mu\,/\,\partial t + A\partial u_\mu/\,\partial x + [A_u u_x + B_\mu]\,u_\mu = -B_\mu - A_\mu u_x$$

Эта линейная относительно u_μ система удовлетворяет условиям, обеспечивающим непрерывность ее решений относительно параметра μ. Таким образом, $u(x, t, \mu) \in C^1$.

Покажем, что если $F^{(i)}$ выбрать так, чтобы существовало ограниченное решение (1.10) для $w^{(i)}$, то при ограничениях, вытекающих из теоремы 2, существует $u^{(m)}$, определяемое (1.5), (1.7), которое удовлетворяет (1.12). Поскольку $C_1, \ldots, C_{l+r}$ можно считать неограниченное число раз дифференцируемыми функциями χ, τ, для коэффициентов уравнения $Lw^{(1)} = h^{(1)} - F^{(1)}$ выполняются условия теоремы 2 и $w^{(1)}(x, t, \chi, \tau) \in C^1$. Отсюда $h^{(2)}[w_\chi^{(1)}, w_\tau^{(1)}] = h^{(2)}(x, t, \chi, \tau) \in C^1$ и $w^{(2)} \in C^1$. Вообще, поскольку $w^{(i)}$ определяются рекуррентно, то из $w^{(i-1)} \in C^1$ следует $w^{(i)} \in C^1$ ($i = 2, 3, \ldots, m$). Учитывая состав $g^{(m)}(x, t, \chi, \tau)$, получим $g^{(m)} \in C^1$, т. е. для (1.12) выполнены условия теоремы существования.

Применяя теоремы 1, 2 к системам (1.1), (1.12), можно сформулировать основной результат в виде доказанной тем самым теоремы.

Теорема 3. Пусть система (1.1) гиперболическая в области $0 \leqslant t, \tau < \infty$, $-\infty < u, u_x, u_t, x, \chi < \infty$ и удовлетворяет в ней следующим требованиям

1. A, B, f_k $m+1$ раз дифференцируемы по u, u_x, u_t и непрерывно дифференцируемы по x, t, χ, τ.

2. Существует решение (1.1), дважды непрерывно дифференцируемое по x и t и непрерывное по μ.

3. Через каждую точку полуплоскости (x, t) проходит n характеристик и все они в обратном направлении пересекают ось x.

4. Пусть $u^{(m)}$ определяется формулами (1.5), (1.7), где $w^{(i)}$ — решения (1.10), а $F^{(i)}$ выбраны так, что обеспечивают существование ограниченных в смысле (1.11) решений (1.10) при начальных условиях, следующих из

$$|u^{(i)}(x, 0, \mu) - u(x, 0, \mu)| < K^{(i)}\mu^{i+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m; \quad K^{(i)} = \mathrm{const})$$

Тогда существует такое μ_0, что при всех $0 \leqslant \mu \leqslant \mu_0$ и x, t, взятых из интервала $XT \sim 1/\mu$

$$|u^{(m)}(x, t, \mu) - u(x, t, \mu)| < M^{(m)}\mu^m$$

Величина постоянной $M^{(m)}$ зависит от $\max |g^{(m)}(x, t, \chi, \tau)|$, оценка которого представляет самостоятельный интерес.

Аналогичное утверждение справедливо для параболической системы

$$u_t + A(u, x, t, \chi, \tau)u_x + B(u, x, t, \chi, \tau) = \sum_i \mu^i f_i(u, x, t, \chi, \tau)$$

удовлетворяющей в области $-\infty < u, x, \chi < \infty$; $0 \leqslant \tau, t < \infty$ следующим условиям

1. A, B, f_i $m+1$ раз дифференцируемы по u, непрерывно дифференцируемы по x, t, χ, τ.

2. Существует решение $u(x, t, \mu) \in C^1$ этой системы.

3. Через каждую точку полуплоскости (x, t) проходит не менее двух характеристик и все они в обратном направлении пересекают ось x.

Авторы благодарят А. В. Гапонова за постоянное внимание к работе и В. Н. Гольдберга за обсуждение и полезные замечания.

Поступила 3 V 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Мигдал А. Б., Крайнов В. П. Приближенные методы квантовой механики. М., «Наука», 1966.
2. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики, М., «Наука», 1969.
3. Рытов С. М. Модулированные колебания и волны. Тр. ФИАН СССР, 1940, т. 2.
4. Островский Л. А., Пелиновский Е. Н. Метод усреднения для несинусоидальных волн. Докл. АН СССР, 1970, т. 195, № 4.
5. Рабинович М. И. Об асимптотическом методе в теории нелинейных колебаний распределенных систем. Докл. АН СССР, 1970, т. 191, № 6.
6. Гапонов А. В., Островский Л. А., Рабинович М. И. Об асимптотических методах в нелинейной теории колебаний распределенных систем. Тр. V межд. конф. по нелинейным колебаниям, т. 1, Киев, «Наукова думка», 1970.
7. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1963.
8. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1966.
9. Гапонов А. В., Островский Л. А., Рабинович М. И. Одномерные волны в нелинейных системах с дисперсией. Изв. вузов. Радиофизика, 1970, т. 13, № 2.
10. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1964.