

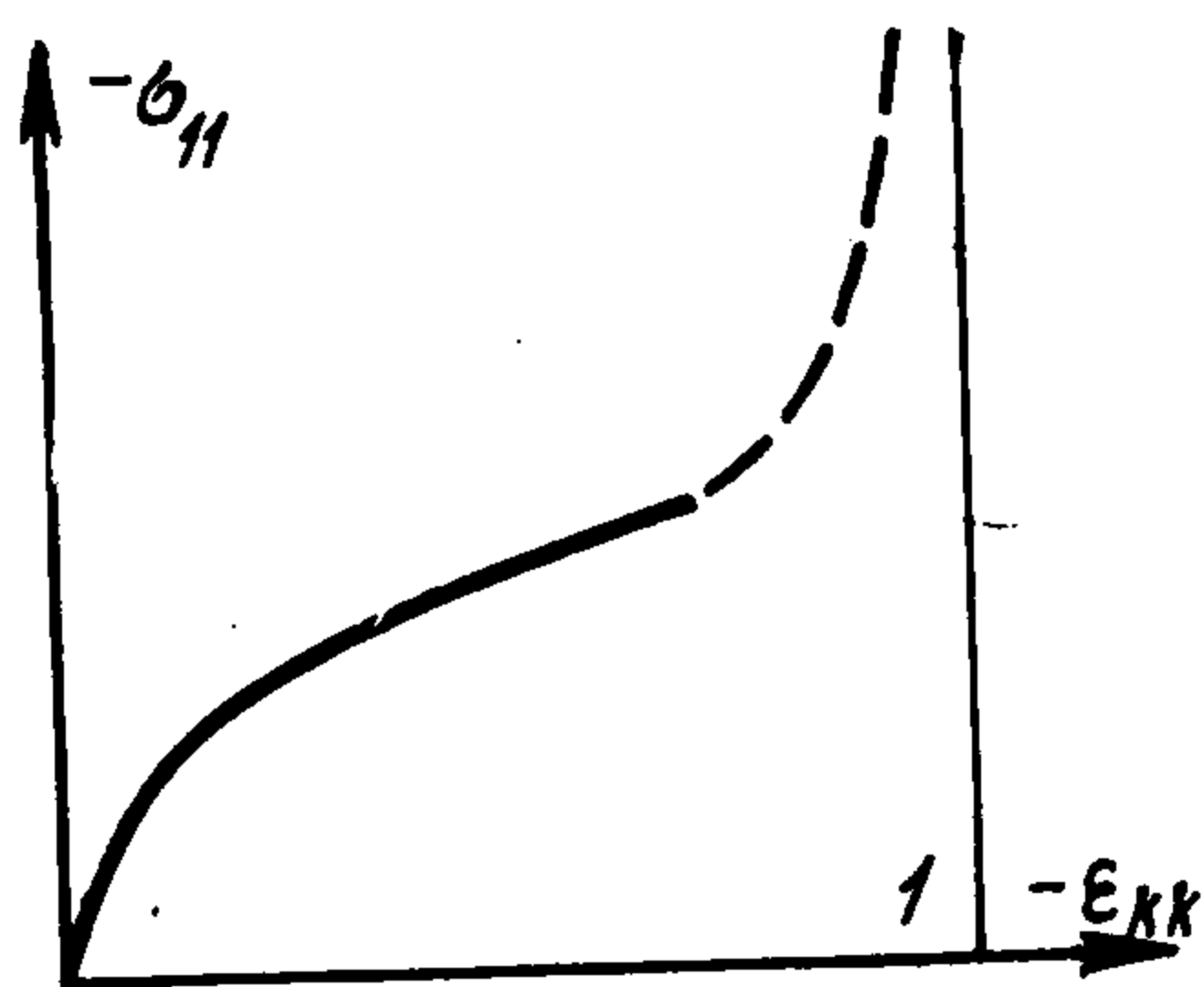
О ПРОСТЫХ ВОЛНАХ И РАСПАДЕ РАЗРЫВА В УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ С УСЛОВИЕМ МИЗЕСА

Я. А. Каменярж

(Москва)

В упруго-пластических средах возможно образование сильных разрывов, отличных от упругих ударных волн [1], что вызывает необходимость поиска дополнительных условий на скачках. Желательно было бы выделить среды, для которых возможно конструирование решений без использования таких разрывов.

В [2] показано, что при условии пластичности Мизеса и изотропном упрочнении плоские простые волны при наличии двух компонент скорости и некоторых ограничениях на начальное напряженное состояние не опрокидываются. Это справедливо для сред с выпуклой к оси напряжений диаграммой напряжение — деформация для опыта на простое сжатие (фиг. 1). Ниже это утверждение обобщается на случай произвольных



Фиг. 1

плоских простых волн в той же среде. При более жестких условиях строится решение задачи о распаде произвольного разрыва. В этом случае не существует никаких скачков кроме упругих ударных волн, контактных разрывов и скачков, являющихся предельным случаем простых волн, распространяющихся с постоянной скоростью.

1. Рассмотрим в рамках геометрически линейной теории движение упруго-пластической среды, свободная энергия которой имеет вид $F = F_1(\epsilon_{ij}^e) + F_2(T)$. Для такой среды при обычных предположениях [3] температура T не входит в уравнения, связывающие напряжения и деформации, и механическая задача может быть решена независимо от тепловой. В частности, условие сохранения энергии на скачке не накладывает ограничений на скорости и напряжения, а является граничным условием задачи о распределении температуры.

Уравнение поверхности нагружения принимается в форме Мизеса

$$J^2 \equiv 1/2 \sigma_{ij}' \sigma_{ij}' = k^2(\chi) \quad (d\chi = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^p \text{ или } d\chi = \sqrt{d\epsilon_{ij}^p d\epsilon_{ij}^p}) \quad (1.1)$$

Здесь σ_{ij}' — девиатор тензора напряжений, $k^2(\chi)$ — заданная монотонно возрастающая функция; соотношения в скобках для условия (1.1) и при наличии ассоциированного закона эквивалентны.

Для приращений пластических деформаций принимается закон, ассоциированный с (1.1)

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \sigma^{ij}', \quad d\lambda \geq 0 \quad (1.2)$$

для упругих деформаций — закон Гука. Окончательно, для полных деформаций имеем

$$-K \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = \frac{\partial p}{\partial t} \quad (p = -1/3 \sigma_{kk})$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} = \frac{\partial \lambda}{\partial t} \sigma_{ij}' + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial \sigma_{ij}'}{\partial t} \quad (\mu, K = \text{const}) \quad (1.3)$$

Из (1.1), (1.2) следует $d\chi = 2k^2(\chi)d\lambda$. Таким образом, $\chi = \chi(\lambda)$, и (1.1) можно придать вид $\lambda = \Phi(J)$ ($\Phi(J)$ — монотонно возрастающая функция) с условием нагружения

$$d\lambda = \begin{cases} \frac{d\Phi}{dJ} dJ & \text{при } \lambda = \Phi(J), dJ > 0 \\ 0 & \text{при } dJ \leq 0 \text{ и при } \Phi(J) < \lambda \end{cases} \quad (1.4)$$

В дальнейшем изучаются плоские волны, распространяющиеся по однородному состоянию, для системы уравнений (1.3), (1.4) и уравнений движения

$$\rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x}, \quad \rho_0 \frac{\partial v_2}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x}, \quad \rho_0 \frac{\partial v_3}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x} \quad (1.5)$$

В случае одномерного движения из (1.3) следует

$$\frac{1}{2\mu} \frac{\partial}{\partial t} (\sigma_{22} - \sigma_{33}) + \frac{\partial \lambda}{\partial t} (\sigma_{22} - \sigma_{33}) = 0, \quad \frac{1}{2\mu} \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial t} + \frac{\partial \lambda}{\partial t} \sigma_{23} = 0 \quad (1.6)$$

Если в состоянии перед волной $\sigma_{22} - \sigma_{33} = 0$ и $\sigma_{23} = 0$ (последнего равенства можно добиться поворотом системы координат вокруг оси Ox), то $\sigma_{22} - \sigma_{33} \equiv 0$ и $\sigma_{23} \equiv 0$. Случай $\sigma_{22} - \sigma_{33} = 0$ с дополнительным предположением $v_3 = 0$, $\sigma_{13} = 0$ изучался в [2]. Ниже рассматривается случай $v_3 \neq 0$, $\sigma_{13} \neq 0$; затем будет снято и условие $\sigma_{22} - \sigma_{33} = 0$.

Заменой переменных

$$J^2 = \frac{3}{4} (\sigma_{11} + p)^2 + \sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2, \quad \frac{\sqrt{3}}{2} (\sigma_{11} + p) = J \cos \theta \quad (0 \leq \theta < \pi)$$

$$\sigma_{12} = J \sin \theta \cos \varphi, \quad \sigma_{13} = J \sin \theta \sin \varphi \quad (0 \leq \varphi < 2\pi) \quad (1.7)$$

система (1.3)—(1.5) в пластической области приводится к виду

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{1}{K} \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial v_2}{\partial x} + \left(J \frac{d\Phi}{dJ} + \frac{1}{2\mu} \right) \frac{\partial J}{\partial t} + \frac{1}{2\mu} J \cos \theta \cos \varphi \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{1}{2\mu} J \sin \theta \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial v_3}{\partial x} + \left(J \frac{d\Phi}{dJ} + \frac{1}{2\mu} \right) \frac{\partial J}{\partial t} + \frac{1}{2\mu} J \cos \theta \sin \varphi \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{1}{2\mu} J \sin \theta \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial v_1}{\partial x} - \left(J \frac{d\Phi}{dJ} + \frac{1}{2\mu} \right) + \frac{1}{2\mu} J \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0 \quad (1.8)$$

$$\rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \theta \frac{\partial J}{\partial x} + \frac{2}{\sqrt{3}} J \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0$$

$$\rho_0 \frac{\partial v_2}{\partial t} - \sin \theta \cos \varphi \frac{\partial J}{\partial x} - J \cos \theta \cos \varphi \frac{\partial \theta}{\partial x} + J \sin \theta \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$

$$\rho_0 \frac{\partial v_3}{\partial t} - \sin \theta \sin \varphi \frac{\partial J}{\partial x} - J \cos \theta \sin \varphi \frac{\partial \theta}{\partial x} - J \sin \theta \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$

За параметр простой волны системы (1.8) примем J , т. е. будем рассматривать решения (1.8) вида $u = u [J(x, t)]$, где $u \equiv (v_1, v_2, v_3, J, p, \theta, \Phi)$. Система (1.8), имеющая вид $A(u) \partial u / \partial t + B(u) \partial u / \partial x = 0$, сводится тогда к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$[-C(u)A(u) + B(u)] du / dJ = 0 \quad (1.9)$$

где $C(u)$ — корень характеристического уравнения $\det(-CA + B) = 0$.

Исследование характеристического уравнения упрощается теоремой Манделя [4]

$$0 \leq C_1^p \leq C_1^e \leq C_2^p \leq C_2^e \leq C_3^p \leq C_3^e \quad (1.10)$$

где C_i^e, C_i^p — величины соответственно упругих и пластических характеристических скоростей. Так как

$$C_1^e = C_2^e = \sqrt{\mu / \rho_0}$$

то и

$$C_2^p = \sqrt{\mu / \rho_0}$$

Тогда C_1^p и C_3^p определяются из характеристического уравнения

$$\begin{aligned} \alpha a^4 + \beta a^2 + \gamma &= 0 \quad (\alpha^2 \equiv \rho_0 C^2) \\ \alpha &= J \frac{d\Phi}{dJ} + \frac{1}{2\mu}, \quad \beta = -J \frac{d\Phi}{dJ} \left(K + \mu + \frac{\mu}{3} \sin^2 \theta \right) - \frac{K}{2\mu} - \frac{7}{6} \\ \gamma &= \mu K J \frac{d\Phi}{dJ} \cos^2 \theta + \frac{2}{3} \mu + \frac{1}{2} K \end{aligned} \quad (1.11)$$

Простые волны опрокидываются, если $\partial C / \partial t = (dC / dJ) (dJ / \partial t) > 0$, или $dC / dJ > 0$, так как в пластической области $\partial J / \partial t > 0$. Если $dC / dJ < 0$, то форма простой волны становится более полой. Под d / dJ понимается производная в силу системы (1.9). Для волн, распространяющихся вправо, знаки dC / dJ и da^2 / dJ одинаковы. Дифференцируя (1.11), получим, что знак da^2 / dJ совпадает со знаком $S \equiv a^4 d\alpha / dJ + a^2 d\beta / dJ + d\gamma / dJ$ для волн, распространяющихся со скоростью C_1^p (медленных) и противоположен ему для волн, распространяющихся со скоростью C_3^p (быстрых)

$$\begin{aligned} S &= \frac{d}{dJ} \left(J \frac{d\Phi}{dJ} \right) D + 2K\mu \left(1 + \frac{a^2}{3k} \right) J \frac{d\Phi}{dJ} \frac{d\theta}{dJ} \sin \theta \cos \theta \\ D &\equiv a^4 - (K + \mu + \frac{1}{3} \mu \sin^2 \theta) a^2 + K\mu \cos^2 \theta \end{aligned} \quad (1.12)$$

В дальнейшем предполагается, что $d(J d\Phi / dJ) / dJ > 0$. Это неравенство — условие выпуклости диаграммы напряжение — деформация для опыта на простое сжатие (фиг. 1). Именно для этого случая ниже показано, что сильные разрывы не образуются; при $d(J d\Phi / dJ) / dJ < 0$ скачки, очевидно, возникают даже при движении с одной (продольной) компонентой скорости.

Из (1.9) найдем

$$\frac{d\theta}{dJ} = \operatorname{ctg} \theta \left(\frac{1}{J} - \frac{2\mu(a^2 - K)}{K + 4\mu/3 - a^2} \frac{d\Phi}{dJ} \right)$$

Подставив a^2 из (1.11), при помощи (1.10) можно получить, что знаки $d\theta / dJ$ и $\operatorname{tg} \theta$ противоположны для быстрых волн и совпадают для медленных. Далее в силу (1.11)

$$D = - \left(J \frac{d\Phi}{dJ} \right)^{-1} \left[\frac{1}{2\mu} a^4 - \left(\frac{K}{2\mu} + \frac{7}{6} \right) a^2 + \frac{2}{3} \mu^2 + \frac{1}{2} K \right]$$

откуда, согласно (1.10), для быстрых волн $D \geq 0$, для медленных $D \leq 0$.

При помощи (1.12) и приведенных оценок знаков можно окончательно установить, что как для быстрых, так и для медленных пластических волн $dC / dJ \leq 0$.

Таким образом, не происходит образования скачков из простых пластических волн. Волны, распространяющиеся со скоростью

$$C_2^p = \sqrt{\mu / \rho_0}$$

без искажения формы, в пределе (например в автомодельном решении) можно рассматривать как ударные. Для них вопрос о соотношениях на разрыве решается просто: все величины изменяются, как в простой волне. Следует однако отметить, что полученный результат — следствие наложения довольно сильных ограничений: даже в рамках геометрически линейной теории без учета тепловых эффектов опрокидывание простых пластических волн возможно [1]. В этом случае дополнительные условия на скачках должны и могут быть найдены из рассмотрения структуры разрыва [5].

Наконец, следует избавиться от условия $\sigma_{22} - \sigma_{33} = 0$. Если перед волной $\sigma_{22} - \sigma_{33} = \gamma_0$, то из (1.6) следует, что $\sigma_{22} - \sigma_{33} = \gamma_0 e^{-2\mu\lambda}$. Тогда уравнение поверхности нагружения

$$J^2 \equiv \frac{3}{4} (\sigma_{11} + p)^2 + \sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \frac{1}{4} (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 = k^2 [\chi(\lambda)] \quad \text{или} \quad \lambda = \Phi(J) \quad (1.13)$$

может быть переписано в виде

$$I^2 \equiv \frac{3}{4} (\sigma_{11} + p)^2 + \sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 = k^2 [\chi(\lambda)] - \frac{1}{4} \gamma_0^2 e^{-4\mu\lambda} \quad \text{или} \quad \lambda = \Psi(I) \quad (1.14)$$

Поскольку $\sigma_{22} - \sigma_{33}$ не входит в остальные уравнения системы (1.3)–(1.5), задачу можно рассматривать для среды, в которой $\sigma_{22} - \sigma_{33} = 0$, но уравнение поверхности нагружения имеет вид не (1.13), а (1.14). Остается показать, что из соотношений $d\Phi / dJ > 0$ и $d(J d\Phi / dJ) / dJ > 0$ для (1.13) следуют аналогичные соотношения $d\Psi / dI > 0$ и $d(I d\Psi / dI) / dI > 0$ для (1.14). Первое из них очевидно; в справедливости второго можно убедиться, дважды дифференцируя (1.13) и (1.14) по J и по I соответственно и используя неравенство

$$\frac{d\Psi}{dI} = \frac{2I(\lambda)}{dk^2/d\lambda + \mu\gamma_0^2 e^{-4\mu\lambda}} < \frac{2J(\lambda)}{dk^2/d\lambda} = \frac{d\Phi}{dJ}$$

В частности, для идеально пластических сред ($k^2 = \text{const}$) исследовательские задачи с $\sigma_{22} - \sigma_{33} \neq 0$ эквивалентно изучению движения с $\sigma_{22} - \sigma_{33} = 0$ для среды с ограниченным упрочнением $I^2 = k^2 - \frac{1}{4} \gamma_0^2 e^{-4\mu\lambda}$.

Ниже для этого случая более детально изучаются простые волны, и обсуждается решение задачи о распаде разрыва.

2. Пусть в (1.1) $k^2 = \text{const}$, $v_3 \equiv 0$, $\sigma_{13} \equiv 0$, но $\sigma_{22} - \sigma_{33} \neq 0$. Заменой переменных

$$\sigma_{12} = k \cos \theta \quad (0 \leq \theta < \pi)$$

$$\sigma_{11} + p = \frac{2}{\sqrt{3}} k \sin \theta \cos \varphi, \quad \sigma_{22} - \sigma_{33} = 2k \sin \theta \sin \varphi \quad (0 \leq \varphi < 2\pi) \quad (2.1)$$

система (1.1), (1.3), (1.5) для рассматриваемого случая приводится к виду

$$K \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial t} = 0, \quad \mu \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{k}{\sin \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} - k \operatorname{ctg} \varphi \cos \theta \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

$$\mu \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\sqrt{3}}{2} K k \frac{\sin \theta}{\sin \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (2.2)$$

$$\rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(p - \frac{2}{\sqrt{3}} k \sin \theta \cos \varphi \right) = 0$$

$$\rho_0 \frac{\partial v_2}{\partial t} + k \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \quad 2\mu \frac{\partial \lambda}{\partial t} = - \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \theta}{\partial t} - \operatorname{ctg} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t} \geq 0$$

Характеристические скорости C_+ и C_- системы (2.2) определяются из уравнения

$$a^4 - a^2 (\mu \sin^2 \theta + \frac{4}{3} \mu \sin^2 \varphi + \frac{4}{3} \mu \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + K) + \mu \sin^2 \theta \left(\frac{4\mu}{3} \sin^2 \varphi + K \right) = 0, \quad a^2 \equiv \rho_0 C^2 \quad (2.3)$$

Для них справедливы неравенства (1.10)

$$0 \leq C_- \leq \sqrt{\mu / \rho_0} \leq C_+ \leq \sqrt{(K + \frac{4}{3} \mu) / \rho_0} \quad (2.4)$$

За параметр простой волны удобно принять θ . Система (2.2) тогда сводится к обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{(\mu \sin^2 \theta - a^2) \sin \varphi}{a^2 \sin \theta \cos \theta \cos \varphi} \quad (2.5)$$

$$\frac{K}{C} \frac{dv_1}{d\theta} = \frac{dp}{d\theta} = - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{Kk}{\mu} \frac{\sin \theta}{\sin \varphi} \frac{d\varphi}{d\theta}, \quad \frac{dv_2}{d\theta} = \frac{k \sin \theta}{\rho_0 C}$$

При исследовании этой системы основным, очевидно, является построение картины интегральных кривых уравнения (2.5). При этом возможны различные случаи в зависимости от того, в какой из трех интервалов $(0, 1)$, $(1, \frac{4}{3})$, $(\frac{4}{3}, \infty)$ попадет величина K / μ . Для определенности положим $K / \mu > \frac{4}{3}$, остальные случаи исследуются аналогично. В силу очевидной симметрии можно ограничиться значениями $0 \leq \theta \leq \pi / 2$, $0 \leq \varphi \leq \pi / 2$ и простыми волнами, распространяющимися вправо.

Рассмотрим сначала медленные простые волны. В этом случае уравнение (2.5) имеет особые точки $O(0, 0)$ и $K(0, \pi / 2)$. Разложение $a^2(\theta, \varphi)$ в окрестности точки O дает

$$a^2 = \frac{3K\mu}{2(3K + 2\mu)} \theta^2 + \theta^2 O(\theta^2 + \varphi^2) \quad (2.6)$$

Тогда из (2.4) в окрестности точки O следует

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{4}{3} \frac{\mu}{K} \frac{\varphi}{\theta} \quad (2.7)$$

точка O — узловая, интегральные кривые касаются прямой $\theta = 0$. Аналогично можно убедиться, что точка K — седловая. Прямые $\theta = \pi/2$, $\varphi = 0$, $\varphi = \pi/2$ — изоклины $d\varphi/d\theta = 0$. Прямая $\theta = 0$ — изоклина $d\varphi/d\theta = \infty$.

Кроме того, из (2.3), (2.4) видно, что

$$\mu \sin^2 \theta \geq \rho_0 C_-^2 \quad (2.8)$$

и, согласно (2.5), $d\varphi/d\theta \geq 0$ в рассматриваемой области. Окончательно картина интегральных кривых представлена на фиг. 2. Стрелки указывают направление изменения величин в простой волне, определяемое неравенством $\partial\lambda/\partial t > 0$, которое в силу (2.2), (2.8) сводится в рассматриваемой области к условию

$$\partial\theta/\partial t < 0 \quad (2.9)$$

Рассмотрим изменения остальных величин в медленной волне

$$1) \frac{dv_2}{d\theta} = \frac{k \sin \theta}{\rho_0 C_-} \geq 0$$

Изменения $\Delta v_2 < 0$ в силу (2.9) и ограничено, так как $dv_2/d\theta$ при $\theta \rightarrow 0$ имеет, согласно (2.6), порядок единицы.

$$2) \frac{dv_1}{d\theta} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{k \sin \theta}{\mu \sin \varphi} \frac{d\varphi}{d\theta} C_- \leq 0$$

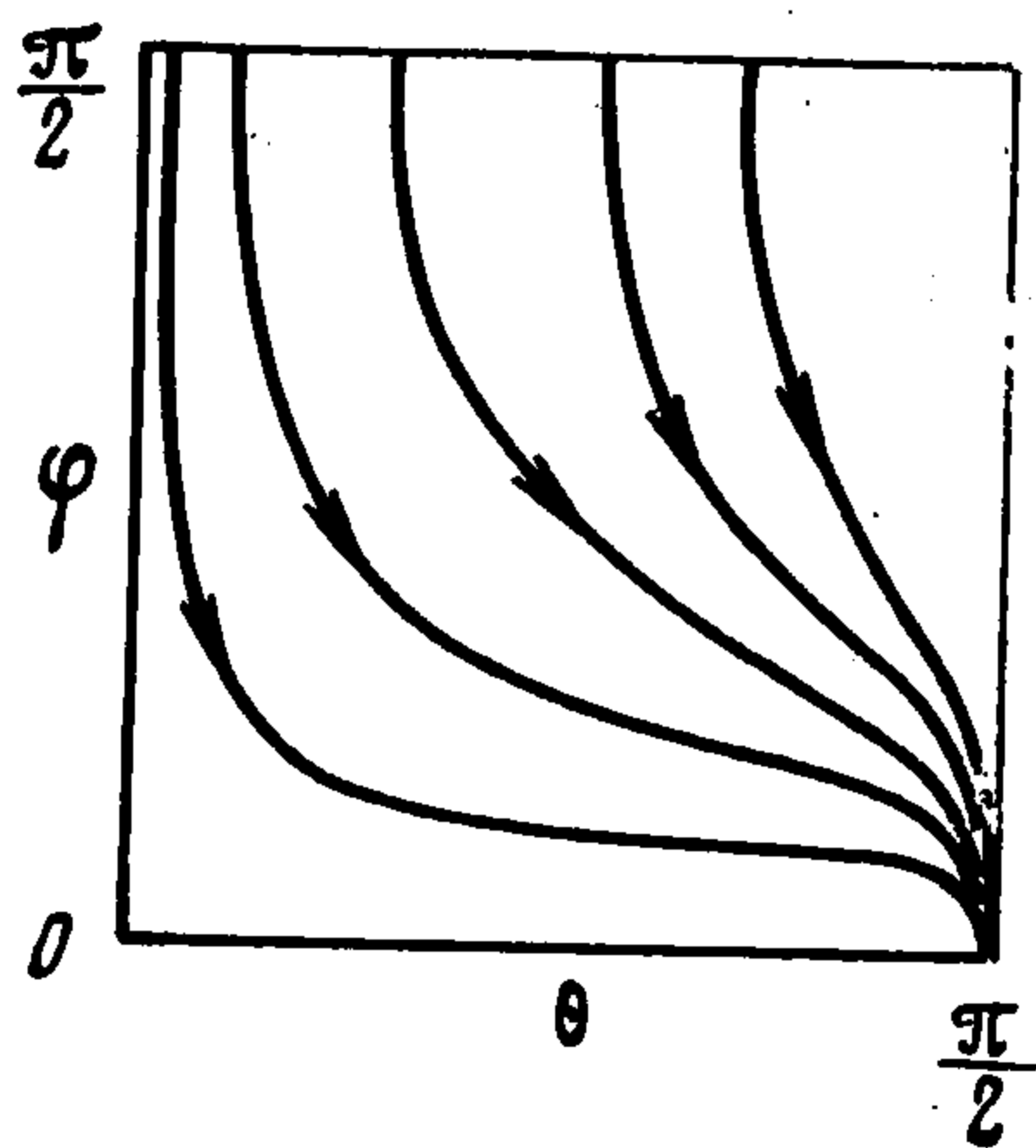
Изменение $\Delta v_1 > 0$ и ограничено, так как, согласно (2.6) и (2.7), $dv_1/d\theta \rightarrow 0$ при $\theta \rightarrow 0$.

3) Наконец, $\sigma_{12} = k \cos \theta$, а изменение σ_{11} аналогично изменению v_1 , так как из уравнения движения следует $d\sigma_{11}/d\theta = -\rho_0 C dv_1/d\theta$.

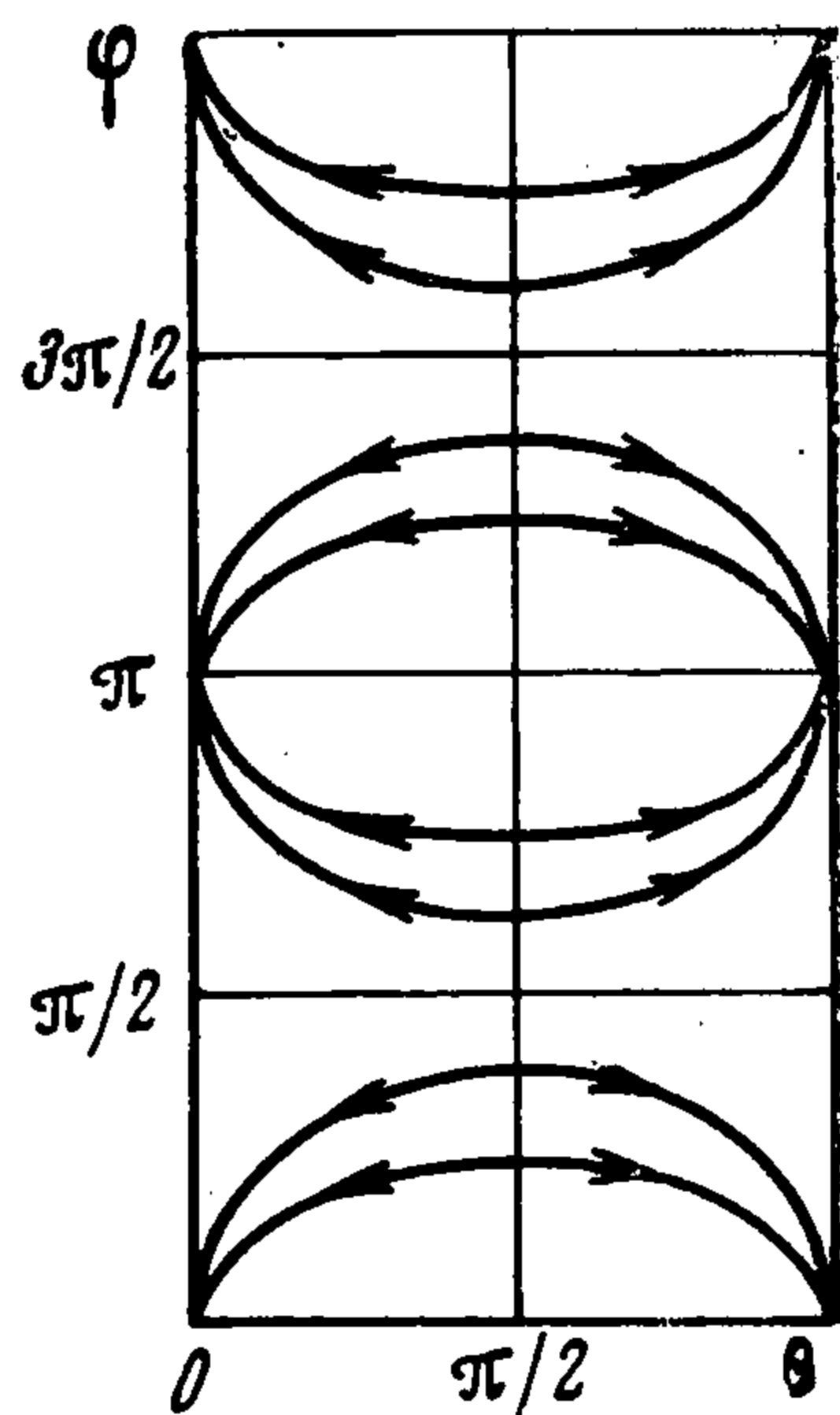
На плоскости σ_{11}, σ_{12} интегральная кривая имеет вид $a\alpha$ (см. ниже, фиг. 4).

Очевидно, что в медленной пластической волне всегда может быть достигнуто значение $|\sigma_{12}| = k$. Отметим также, что изменения всех величин в такой волне ограничены.

Аналогично исследуются быстрые простые волны. Картина интегральных кривых на плоскости θ, φ представлена на фиг. 3. В силу неравенства (2.4) $d\varphi/d\theta \leq 0$; прямые $\theta = 0$, $\theta = \pi/2$ и $\varphi = \pi/2$ — изоклины $d\varphi/d\theta = \infty$; прямая $\varphi = 0$ — изоклина $d\varphi/d\theta = 0$. Особые точки: O — седло, $d\varphi/d\theta = -\varphi/\theta$; $M(\pi/2, 0)$ — узел, интегральные кривые касаются прямой $\theta = \pi/2$



Фиг. 3



Фиг. 2

O — седло, $d\varphi/d\theta = -\varphi/\theta$; $M(\pi/2, 0)$ — узел, интегральные кривые касаются прямой $\theta = \pi/2$

$$\frac{d\varphi}{d\theta_1} = \left(1 - \frac{\mu}{K}\right) \frac{\varphi}{\theta_1} \quad \left(\theta_1 \equiv \theta - \frac{\pi}{2}\right) \quad (2.10)$$

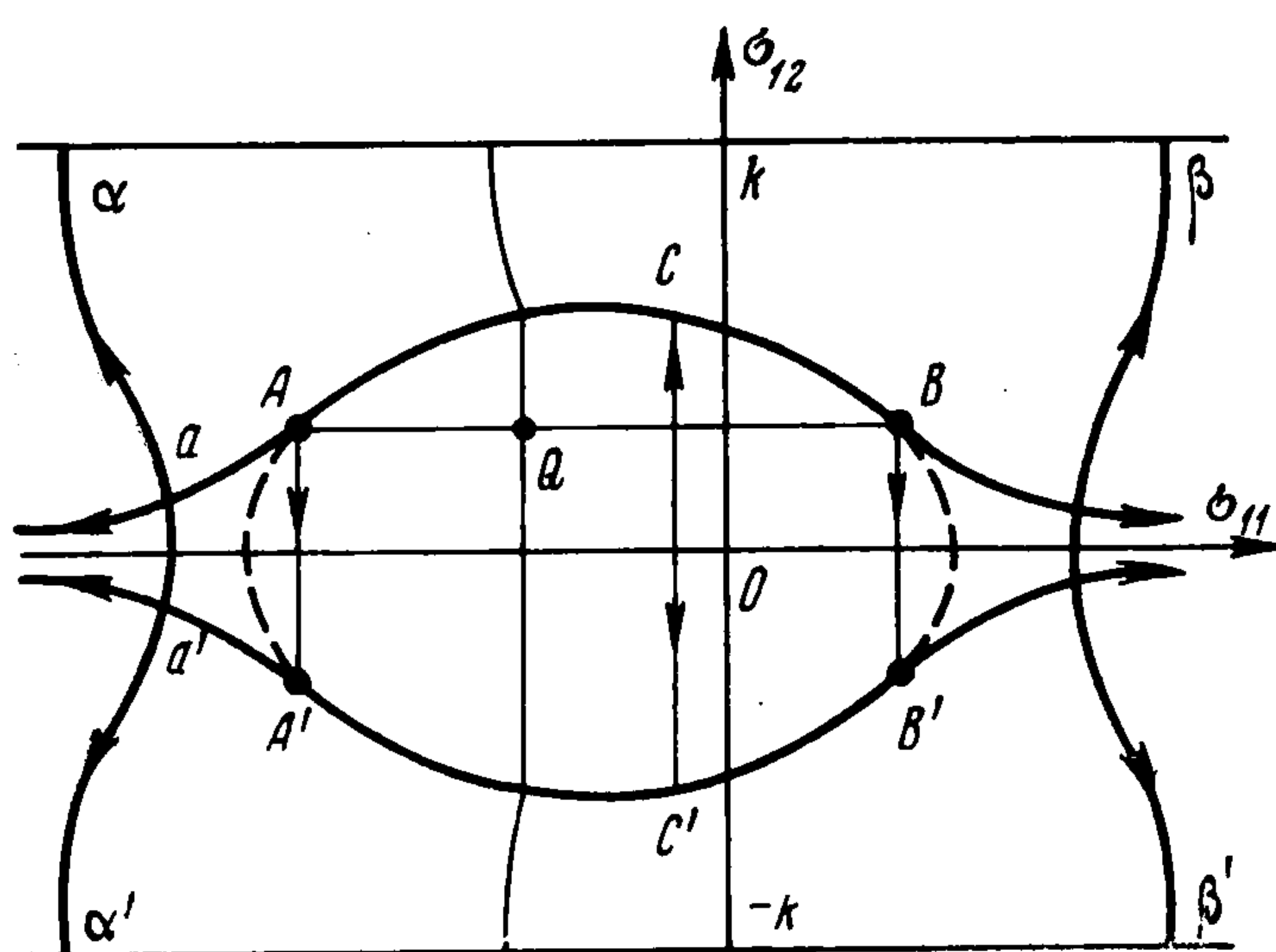
Как и в предыдущем случае, в быстрой волне все величины изменяются монотонно. При этом $\Delta v_2 > 0$, $\Delta \sigma_{12} < 0$ и по-прежнему ограничены, а v_1 и $-\sigma_{11}$ неограниченно возрастают. Так как $\varphi \rightarrow 0$ при $\theta \rightarrow \pi/2$, согласно (2.10)

$$\frac{dv_1}{d\theta} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{k}{\mu} \frac{\sin \theta}{\sin \varphi} \frac{d\varphi}{d\theta} C_+ \sim -\frac{1}{\varphi} \frac{\varphi}{\theta_1} = -\frac{1}{\theta_1}$$

На плоскости σ_{11} , σ_{12} интегральные кривые имеют вид Aa (фиг. 4).

Как показано в п. 1, ни быстрые, ни медленные пластические волны не опрокидываются.

Осталось рассмотреть простые пластические волны, в качестве параметра которых нельзя использовать θ , т. е. волны с $\sigma_{12} = \text{const}$. Пусть $\mu(x, t)$ —



Фиг. 4

параметр такой волны. Второе из уравнений (1.5) дает альтернативу: $dv_2/d\mu = 0$ или $\partial\mu/\partial t = 0$, т. е. $C = 0$. В первом случае из (1.4) следует $\psi\sigma_{12} = 0$ ($\psi \equiv \partial\lambda/\partial t$). Рассмотрение $\psi = 0$ приводит к постоянному решению; случай с $\sigma_{12} = 0$ является предельным случаем быстрой пластической волны, при $\sigma_{22} = \sigma_{33}$ эта волна распространяется без изменения формы. В случае $C = 0$ за параметр простой волны можно принять x .

Система (1.1), (1.3), (1.5) сводится к уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial v_2}{\partial x} &= \psi\sigma_{12}, \quad \psi \geq 0, \quad \psi(\sigma_{11} + p) = 0 \\ \psi(\sigma_{22} - \sigma_{33}) &= 0, \quad \frac{3}{4}(\sigma_{11} + p)^2 + \sigma_{12}^2 + \frac{1}{4}(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 = k^2 \\ \sigma_{11} &= \text{const}, \quad v_1 = \text{const} \end{aligned}$$

и описывает два типа решений

1) $\psi \neq 0$; σ_{ij} , v_1 постоянны; $|\sigma_{12}| = k$; $\frac{1}{2} dv_2/dx = \psi\sigma_{12}$ ($\psi > 0$, а в остальном произвольно); изменение v_2 в этом решении произвольно по величине, а его знак определяется из условия $\psi > 0$ знаком σ_{12} ;

2) $\psi = 0$; σ_{11} , σ_{12} , v_1 , v_2 постоянны; σ_{22} , σ_{33} меняются произвольно.

В пределе (например в автотомодельной задаче) эти решения сводятся к разрывам двух типов, известных в теории квазистатических движений пластической среды [6]: на обеих сторонах разрыва первого типа происходит чистый сдвиг, напряжения непрерывны; на скачках второго типа непрерывны скорости, и по обе стороны аннулируются скорости деформаций ($\psi = 0$); разрывы обоих типов — контактные.

Кроме пластических, в рассматриваемой среде могут распространяться упругие продольные и поперечные волны, в которых, как известно, величины меняются следующим образом:

в продольной волне

$$\begin{aligned} \rho_0 C_{\parallel}^2 &= K + \frac{4}{3} \mu, \quad \Delta \sigma_{11} = -\rho_0 C_{\parallel} \Delta v_1, \quad \Delta \sigma_{22} = \Delta \sigma_{33} = \\ &= \frac{-3K + 2\mu}{3K + 4\mu} \rho_0 C_{\parallel} \Delta v_1, \quad \Delta \sigma_{12} = 0, \quad \Delta v_2 = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

в поперечной волне

$$\rho_0 C_{\perp} = \mu, \quad \Delta \sigma_{11} = \Delta \sigma_{22} = \Delta \sigma_{33} = 0, \quad \Delta v_1 = 0, \quad \Delta \sigma_{12} = -\rho_0 C_{\perp} \Delta v_2 \quad (2.12)$$

Рассмотрим решение задачи о распаде произвольного разрыва. Пусть при $t = 0$ заданы значения σ_{ij} , v_i , равные s_{ij}^+ , u_i^+ для $x > 0$ и s_{ij}^- , u_i^- для $x < 0$ ($u_i^+ < u_i^-$). Все постоянные, входящие в уравнения и начальные условия задачи, имеют размерности скорости, плотности или напряжения, поэтому из x и t можно образовать лишь одну безразмерную комбинацию (например, $xt^{-1} (K / \rho_0)^{-1/2}$); задача автомодельна.

В области $x > 0$ автомодельное решение состоит из распространяющихся вправо упругих ударных и простых пластических волн, разделенных областями, в которых все параметры постоянны. Порядок распространения волн устанавливается неравенством (2.4).

Пусть начальное состояние для $x > 0$ — упругое и изображается на плоскости σ_{11} , σ_{12} точкой Q (фиг. 4). В продольной упругой волне могут быть достигнуты точки отрезка AB , причем точки A и B соответствуют выходу на поверхность нагружения. На плоскости θ , φ точкам A и B соответствуют точки, симметричные относительно прямой $\varphi = \pi / 2$ ($\varphi = 3\pi / 2$), так как, согласно (2.1) и (2.11)

$$\begin{aligned} k \cos \theta (A) &= \sigma_{12} (A) = \sigma_{12} (B) = k \cos \theta (B) \\ 2k \sin \theta \sin \varphi (A) &= \sigma_{22} (A) - \sigma_{33} (A) = \sigma_{22} (B) - \sigma_{33} (B) = 2k \cos \theta \sin \varphi (B) \end{aligned}$$

Вслед за продольной упругой волной может распространяться быстрая пластическая волна (кривые Aa и Bb на фиг. 4). Как показано выше, изменение σ_{11} в этой волне не ограничено.

По состояниям, изображаемым на фиг. 4 точками кривой $aAQVb$, т. е. после прохождения продольной упругой и быстрой пластической волн, может распространяться поперечная упругая волна, в которой достигаются состояния, изображаемые дугой ACB эллипса¹

$$\sigma_{12}^2 + \frac{3}{4} \left(\frac{3K}{3K + 4\mu} s_{11}^+ - \frac{1}{3} s_{kk}^+ + \frac{4\mu}{3K + 4\mu} \sigma_{11} \right)^2 = k^2 - \frac{1}{4} (s_{22}^+ - s_{33}^+)^2 \quad (2.13)$$

и кривой $a'A'C'V'b'$, симметричной $aACVb$ относительно прямой $\sigma_{12} = 0$. Формула (2.13) получена из условия пластичности при помощи (2.11), (2.12); кривые $aACVb$ и $a'A'C'V'b'$ симметричны, так как в поперечной волне все напряжения, кроме σ_{12} , не изменяются, а начальные и конечные точки (например a и a') лежат на поверхности нагружения.

¹ Если начальное состояние Q лежит на поверхности нагружения, то оно изображается одной из точек A , A' , B , B' , лежащих на соответствующем эллипсе.

В дальнейшем могут распространяться лишь медленные пластические волны (кривые $a\alpha$, $a'\alpha'$, $b\beta$, $b'\beta'$ на фиг. 4), в которых, как показано выше, достигается $|\sigma_{12}| = k$. Так при любом заданном начальном состоянии может быть достигнуто напряженное состояние с произвольными σ_{11} и σ_{12} , $|\sigma_{12}| \leq k$ (последнее неравенство диктуется условием $1/2 \sigma_{ij}' \sigma_{ij}' = k^2$), что дает решение задачи о косом ударе, т. е. задачи о приложении при $t = 0$ на плоскости $x = 0$ нагрузки σ_{11} , σ_{12} , остающейся впоследствии постоянной. При условии $\sigma_{22} - \sigma_{33} = 0$ эта задача рассматривалась в работах [1, 2, 7].

Для построения решения задачи о распаде разрыва следует рассмотреть изменение v_i от данного начального состояния s_{ij} , u_i вдоль каждого пути на плоскости σ_{11} , σ_{12} . Пусть для волн, распространяющихся вправо

$$v_1^+ = u_1^+ + f_1(\sigma_{11}, \sigma_{12}, s_{ij}^+), \quad v_2^+ = u_2^+ + f_2(\sigma_{11}, \sigma_{12}, s_{ij}^+) \quad (2.14)$$

тогда для волн, распространяющихся влево

$$v_1^- = u_1^- - f_1(\sigma_{11}, \sigma_{12}, s_{ij}^-), \quad v_2^- = u_2^- - f_2(\sigma_{11}, \sigma_{12}, s_{ij}^-) \quad (2.15)$$

Изменение скорости не ограничено в быстрой пластической волне и ограничено в остальных волнах, поэтому

$$\lim_{\sigma_{11} \rightarrow \infty} f_1(\sigma_{11}, \sigma_{12}, s_{ij}) = -\infty, \quad \lim_{\sigma_{11} \rightarrow -\infty} f_1(\sigma_{11}, \sigma_{12}, s_{ij}) = +\infty$$

Тогда из (2.14) и (2.15) следует, что при любых s_{ij} , u_i на плоскости σ_{11} , σ_{12} для всякого значения σ_{12} существует точка, в которой $v_1^+ = v_1^-$. Такие точки на плоскости σ_{11} , σ_{12} образуют некоторую кривую Γ_1 .

В некоторых случаях (например, когда начальный разрыв достаточно мал и s_{ij}^+ , s_{ij}^- лежат внутри упругой области) существует также кривая Γ_2 , на которой $v_2^+ = v_2^-$, пересекающаяся с Γ_1 . Точка P пересечения Γ_1 и Γ_2 дает решение задачи о распаде разрыва, которое состоит из интегральных кривых, соединяющих на плоскости σ_{11} , σ_{12} точки (s_{11}^+, s_{12}^+) и (s_{11}^-, s_{12}^-) с точкой P , и контактного разрыва второго типа, рассмотренного выше. Разрыв терпят только σ_{22} и σ_{33} .

Кривые Γ_1 и Γ_2 могут не пересекаться. Кривая Γ_2 существует не всегда: изменение v_2 в упругих и пластических (быстрых и медленных) волнах ограничено, поэтому при достаточно большом $|u_2^+ - u_2^-|$ добиться совпадения v_2^+ и v_2^- невозможно. В этом случае на поверхности $x = 0$ имеется контактный разрыв первого типа. На плоскости σ_{11} , σ_{12} состояния по обе стороны такого разрыва изображаются точкой кривой Γ_1 с $\sigma_{12} = k$ либо с $\sigma_{12} = -k$. Однозначный выбор точки возможен благодаря условию $\text{sgn } \sigma_{12} = \text{sgn } (v_2^+ - v_2^-)$; последний знак вдоль Γ_1 сохраняется, так как Γ_1 не пересекается с Γ_2 . Соединяя интегральными кривыми начальные точки с выделенной, получим решение задачи о распаде начального разрыва.

Скачок поперечной составляющей скорости характерен для идеально пластических и ограниченно упрочняющихся сред. Для неограниченно упрочняющихся сред типична ситуация, рассмотренная в [2]. Из результатов машинного счета [2] можно заключить, что в медленной пластической волне $\sigma_{12} \rightarrow \infty$, $\sigma_{11} - \sigma_{22} \rightarrow 0$, σ_{11} — ограничено. (Эти выводы нетрудно было бы получить качественно, так как одно уравнение системы отщепляется, как и в рассмотренном выше случае.) Тогда оценка членов характеристического уравнения показывает, что $C_- \sim \sigma_{12}^{-1}$. Выбрав за параметр простой волны σ_{12} , из уравнения движения можно найти $dv_2/d\sigma_{12} = -(\rho_0 C_-)^{-1} \sim \sigma_{12}$; $v_2 \rightarrow \infty$ в медленной волне. В этом случае, по-видимому, всегда можно добиться непрерывности v_2 на контактном разрыве.

Таким образом, при сделанных выше предположениях о среде и классе рассматриваемых задач произвольный разрыв распадается на упругие ударные, простые пластические волны и контактный разрыв. Никаких скачков в пластической области, требующих разыскания дополнительных условий, не существует. Тот факт, что простые пластические волны не опрокидываются в более общем случае, рассмотренном в п. 1, позволяет с достаточной уверенностью заключить, что и в этом случае ситуация будет аналогичной и нет необходимости в рассмотрении каких-либо скачков, отличных от упругих ударных волн, контактных разрывов и скачков, являющихся предельным случаем простых волн, распространяющихся с постоянной скоростью.

Автор благодарит А. Г. Куликовского за ценные советы и Л. И. Седова за полезное обсуждение.

Поступила 15 VII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Скобеев А. М. О плоской упруго-пластической волне, ПММ, 1965, т. 29, вып. 3.
2. Тинг Т., Нан Н. Плоские волны в полупространстве, обусловленные совместным действием сжимающих напряжений и напряжений сдвига, Прикл. механ. Тр. америк. о-ва инж. механ., сер. Е, 1969, т. 36, № 2.
3. Седов Л. И. Механика сплошной среды, т. 2, М., «Наука», 1970.
4. Мандель Ж. Пластические волны в неограниченной трехмерной среде, Механика, Сб. перев. иностр. статей, 1963, № 5.
5. Куликовский А. Г. О поверхностях разрыва, разделяющих идеальные среды с различными свойствами. Волны рекомбинации в магнитной гидродинамике, ПММ, 1968, т. 32, вып. 6.
6. Фрейденталь А., Гейрингер Х. Математические теории неупругой сплошной среды, М., 1962.
7. Блейх Г., Нельсон И. Плоские волны в упруго-пластическом полупространстве, вызванные совместным действием нормальной и касательной поверхностных нагрузок, Прикл. механ. Тр. америк. о-ва инж. механ., сер. Е, 1966, т. 33, № 1.