Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 539.3

О ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ УСЛОВИЙ ЭВОЛЮЦИОННОСТИ УРАВНЕНИЙ МЕХАНИКИ КОНЕЧНОДЕФОРМИРУЕМЫХ ВЯЗКОУПРУГИХ СРЕД МАКСВЕЛЛОВСКОГО ТИПА

И. М. Руткевич

(Москва)

Дана термодинамическая интерпретация явления потери эволюционности в уравнениях гидродинамики вязкоупругих несжимаемых жидкостей, отвечающих моделям, предложенным в [1, 2].

На основании второго закона термодинамики и предположения о локальном термодинамическом равновесии в малой частице сплошной среды [3] для виртуальных возмущений равновесных параметров сформулировано неравенство Клаузиуса.

Исследованы свойства обратимых мгновенных деформаций в рассматриваемых средах и найден вид внутренней энергии. Внутренняя энергия в моделях Олдройда [1] зависит от первого инварианта тензора вязкоупругих напряжений, но может быть выражена и через компоненты обратимой деформации. В модели Де Уитта [2] она зависит от второго инварианта тензора напряжений и нелокальна по отношению к обратимой деформации.

При помощи найденных выражений для внутренней энергии и неравенства Клаузиуса получены необходимые условия термодинамической устойчивости. Из этих условий вытекают ограничения на главные значения тензора вязкоупругих напряжений, установленные ранее на основании требований эволюционности соответствующих систем уравнений гидродинамики [4, 5].

1. Неравенство Клаузиуса как требование устойчивости локального термодинамического равновесия элемента сплошной среды. При описании процессов, протекающих в фиксированной материальной частице, будем использовать лагранжеву систему координат ξ^i с подвижным ковариантным базисом $\mathbf{э}_i(t)$ и контравариантным базисом $\mathbf{э}^i(t)$. Метрические тензоры в начальном и деформированном состоянии определяются формулами [3]

$$\mathrm{G}_0 = g_{ij}^\circ \mathbf{э}_0^i \mathbf{э}_0^j = g_0^{ij} \mathbf{э}_i^\circ \mathbf{э}_j^\circ, \qquad \mathrm{G} = g_{ij} \mathbf{э}^i \mathbf{э}^j = g^{ij} \mathbf{э}_i \mathbf{э}_j, \qquad \mathbf{э}_i^\circ = \mathbf{э}_i(t_0), \qquad \mathbf{э}_0^i = \mathbf{э}^i(t_0)$$
$$g_{ij}^\circ = (\mathbf{э}_i^\circ, \mathbf{э}_j^\circ), \quad g_0^{ij} = (\mathbf{э}_0^i, \mathbf{э}_0^j), \quad g_{ij} = (\mathbf{э}_i, \mathbf{э}_j), \quad g^{ij} = (\mathbf{э}^i, \mathbf{э}^j)$$

Отсчитывая величину деформации от момента времени $t = t_0$, введем гриновские тензоры конечных деформаций

$$\boldsymbol{\varepsilon}_* = \varepsilon_{ij*} \mathbf{э}^i \mathbf{э}^j = \varepsilon_*^{ij} \mathbf{э}_i \mathbf{э}_j, \qquad \boldsymbol{\varepsilon}^* = \varepsilon^{ij*} \mathbf{э}_i \mathbf{э}_j = \varepsilon_{ij}^* \mathbf{э}^i \mathbf{э}^j$$
$$\varepsilon_{ij*} = {}^1/_2 (g_{ij} - g_{ij}^\circ), \qquad \varepsilon^{ij*} = {}^1/_2 (g_0^{ij} - g^{ij}) \tag{1.1}$$

Тензоры $\boldsymbol{\varepsilon}_*$ и $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ различны. Наряду с этими тензорами будем использовать тензор конечных деформаций Генки

$$\mathbf{H} = {}^1/_2 \ln(\mathrm{G} + 2\boldsymbol{\varepsilon}^*) = -{}^1/_2 \ln(\mathrm{G} - 2\boldsymbol{\varepsilon}_*)$$

Главные значения тензоров ε_*, ε^* и $\mathbf{H}$, обозначаемые соответственно через ε_{i*}, $\varepsilon_i{}^*$ и h_i, связаны между собой формулами

$$\varepsilon_{i*} = {}^1/_2\,(1 - e^{-2h_i}), \qquad \varepsilon_i{}^* = {}^1/_2\,(e^{2h_i} - 1), \qquad (1 + 2\varepsilon_i{}^*)(1 - 2\varepsilon_{i*}) = 1 \tag{1.2}$$

Тензор напряжений $\mathbf{P}$ представим в виде

$$\mathbf{P}(\xi^i, t) = p^{ij}\mathbf{э}_i\mathbf{э}_j = p_{\cdot j}{}^{i\cdot}\mathbf{э}_i\mathbf{э}^j = p_{i\cdot}{}^{\cdot j}\mathbf{э}^i\mathbf{э}_j = p_{ij}\mathbf{э}^i\mathbf{э}^j \tag{1.3}$$

Рассмотрим некоторые следствия законов термодинамики, не связанные с конкретным выбором модели сплошной среды. Следуя [8], примем допущение о том, что состояние физически бесконечно малого макроскопического объема в произвольный момент времени можно рассматривать как термодинамически равновесное. Это состояние характеризуется набором определяющих параметров, от которых однозначным образом зависят внутренняя энергия и энтропия.

Предположим, что термодинамическое состояние среды определяется заданием тензора напряжений $\mathbf{P}$ и абсолютной температуры T.

Рассмотрим виртуальные возмущения равновесных параметров, которые переводят частицу в состояние $(\mathbf{P}_0 + \delta\mathbf{P},\ T_0 + \delta T)$ со значением удельной внутренней энергии $U_0 + \delta U$ и удельной энтропии $s_0 + \delta s$. Ограничимся рассмотрением локальных возмущений, считая, что термодинамические параметры на внешней границе частицы равны невозмущенным параметрам $\mathbf{P}_0$, T_0. Если исходное состояние малой частицы с параметрами $\mathbf{P}_0$, T_0 устойчиво, то в случае достаточно малых возмущений это состояние должно восстановиться в результате спонтанного процесса взаимодействия с внешней средой.

Примем традиционную в классической термодинамике схему, заменяя окружающую частицу среду термостатом с неизменными параметрами $\mathbf{P}_0$, T_0 и считая, что термостат вместе с частицей образуют адиабатически изолированную систему [6, 7]. Таким образом, механическое воздействие термостата на частицу сводится к действию внешних поверхностных сил на ее границе, определяемых тензором $\mathbf{P}_0$. Процесс установления полного термодинамического равновесия в системе частица — термостат будет необратимым. В результате этого процесса произойдет переход $(\mathbf{P}_0 + \delta\mathbf{P},\ T_0 + \delta T) \to (\mathbf{P}_0,\ T_0)$ и, следовательно, переход $(U_0 + \delta U,\ s_0 + \delta s) \to$ $\to (U_0,\ s_0)$.

Для необратимого процесса справедливо классическое неравенство Клаузиуса $\Delta s > \Delta Q\,/\,T_0$, где Δs и ΔQ — изменение энтропии и количество поглощенного из термостата тепла, рассчитанные на единицу массы частицы. Используя первый закон термодинамики, приведем неравенство Клаузиуса к виду

$$\Delta Q = \Delta U - \Delta A_e < T_0 \Delta s \tag{1.4}$$

Здесь ΔA_e — рассчитанная на единицу массы работа внешних поверхностных сил на деформациях, индуцированных переходом $(\mathbf{P}_0 + \delta\mathbf{P},$ $T_0 + \delta T) \to (\mathbf{P}_0,\ T_0)$. Реальный процесс установления равновесия в системе идет в направлении $(U_0 + \delta U,\ s_0 + \delta s) \to (U_0,\ s_0)$, поэтому в последнем неравенстве заменим истинные приращения виртуальными, изменив при этом знак неравенства на противоположный

$$\delta U - \delta A_e - T_0 \delta s > 0 \tag{1.5}$$

Неравенство (1.5) является основополагающим при исследовании устойчивости локального термодинамического равновесия.

При переходе от неравенства (1.4) к (1.5) предполагалось $\Delta A_e = -\delta A_e$. Это верно в случае такого необратимого процесса установления равновесия, в котором деформации при переходе $(\mathbf{P}_0 + \delta\mathbf{P},\ T_0 + \delta T) \to (\mathbf{P}_0,\ T_0)$ отличаются только знаком от деформаций, соответствующих обратному переходу. Такие деформации следует рассматривать как обратимые, имея в виду, что они реализуются и в обратимом процессе, соединяющем равновесные состояния $(\mathbf{P}_0 + \delta\mathbf{P},\ T_0 + \delta T)$ и $(\mathbf{P}_0,\ T_0)$. Если работа ΔA_e не определяется величиной окончательной деформации и зависит от истории деформирования, то равенство $\Delta A_e = -\delta A_e$ будет выполнено в случае, когда в обратном направлении процесса проходятся все те же стадии деформирования, что и в прямом процессе.

Существование и характер обратимых деформаций зависят от конкретной модели среды. Например, в вязкой несжимаемой жидкости обратимые деформации вообще отсутствуют, и в неравенстве (1.5) надо положить $\delta A_e = 0$. В идеальном газе любая деформация, сводящаяся к изменению плотности, может быть достигнута обратимым путем, и неравенство (1.5) в этом случае имеет вид

$$\delta U + p_0 \delta (1 / \rho) - T_0 \delta s > 0 \tag{1.6}$$

Последнее неравенство неоднократно обсуждалось в литературе [6, 7]. В частности, из него следует условие минимума внутренней энергии в состоянии устойчивого равновесия по отношению к процессам с неизменной плотностью и энтропией. На возможность использования этого экстремального свойства при определении условий устойчивости в многокомпонентной смеси газов было указано в [3]. Эти идеи получили развитие в работе [8].

Термодинамические неравенства, обеспечивающие устойчивость локального равновесия, устанавливались обычно для модели идеального газа. В частности, из неравенства (1.6) следует условие равновесия $(\partial p / \partial \rho)_s > 0$, которое в то же время является условием эволюционности уравнений газовой динамики [9]. Последнее обстоятельство позволяет предположить, что условия эволюционности уравнений механики некоторых других сред также могут быть получены, исходя из требований термодинамической устойчивости.

При выводе условий устойчивости из неравенства (1.5) необходимо знать выражения для виртуальной работы δA_e и для вариации внутренней энергии δU.

Можно показать, что в случае, когда внешние поверхностные силы на границе частицы определяются неизменным в процессе деформации тензором $\mathbf{P}_0$, элементарная работа за время dt имеет вид

$$dA_e = (2\rho)^{-1} p_*^{ij}\, dg_{ij} \tag{1.7}$$

В этой формуле p_*^{ij} — компоненты постоянного тензора $\mathbf{P}_0$ в переменном базисе $\mathbf{э}_i$. Приращения dg_{ij} должны быть связаны только с обратимыми деформациями. В простейшем случае, когда на всех стадиях процесса деформирования происходит трехосное растяжение — сжатие вдоль главных осей тензора $\mathbf{P}_0$, выражение (1.7) приводится к виду

$$dA_e = \frac{1}{3\rho}\operatorname{Sp}\mathbf{P}_0\, dH_1 + \frac{1}{\rho}\sum_{i=1}^{3} p_i{}^\circ\, dh_i{}'$$

$$H_1 = \operatorname{Sp}\mathbf{H}, \qquad \mathbf{H}' = \mathbf{H} - {}^1\!/_3 H_1 \mathbf{G}, \qquad \rho = \rho_0 e^{-H_1} \tag{1.8}$$

Здесь $\mathbf{H}$ — тензор обратимых деформаций Генки, $\mathbf{H}'$ — девиатор тензора Генки, $p_i{}^\circ$ и $h_i{}'$ — главные значения тензоров $\mathbf{P}_0$ и $\mathbf{H}'$ соответственно.

Выражение (1.8) для dA_e в общем случае не будет полным дифференциалом, и полная виртуальная работа

$$\delta A_e = \int\limits_{g_{ij}{}^\circ}^{g_{ij}{}^\circ + \delta g_{ij}} dA_e$$

зависит от процесса деформирования. Однако в двух важных частных случаях δA_e определяется окончательной деформацией.

Первый случай отвечает шаровому тензору $\mathbf{P}_0 = -p_0\mathbf{G}_0$. Тогда сумма в правой части (1.8) равна нулю, и, интегрируя, придем к простой формуле: $\delta A_e = -p_0\delta\,(1/\rho)$, которая всегда имеет место для идеальной жидкости.

Второй случай соответствует несжимаемой среде: $\rho = \rho_0$, $\mathbf{H}' = \mathbf{H}$. Тогда

$$\delta A_e = \frac{1}{\rho}\sum_{i=1}^{3} p_i{}^\circ \delta h_i$$

Именно этот случай представляет интерес для рассматриваемых ниже моделей вязкоупругой жидкости. С учетом последней формулы для δA_e неравенство (1.5) применительно к процессу коаксиального деформирования можно записать в виде

$$\delta U - \frac{1}{\rho}\sum_{i=1}^{3} \pi_i{}^\circ \delta h_i - T_0 \delta s > 0 \tag{1.9}$$

Вместо величин $p_i{}^0$ здесь использованы величины $\pi_i{}^0$ равные главным значениям тензора $\mathbf{\Pi}_0 = \mathbf{P}_0 + p_0\mathbf{G}_0$. Такая замена допустима вследствие условия $\delta H_1 = 0$.

2. Мгновенные деформации и внутренняя энергия в вязкоупругих максвелловских средах. Тензор напряжений в рассматриваемых вязкоупругих жидкостях имеет вид

$$\mathbf{P} = -p\mathbf{G} + \mathbf{\Pi}, \quad \mathbf{\Pi} = \pi^{ij}\mathbf{э}_i\mathbf{э}_j = \pi_{\cdot j}{}^{i\cdot}\mathbf{э}_i\mathbf{э}^j = \pi_{i\cdot}{}^{\cdot j}\mathbf{э}^i\mathbf{э}_j = \pi_{ij}\mathbf{э}^i\mathbf{э}^j$$

В общем случае тензор вязкоупругих напряжений $\mathbf{\Pi}$ не является девиатором. Главные значения тензора $\mathbf{\Pi}$ обозначим через π_i в порядке убывания, так что $\pi_1 \geqslant \pi_2 \geqslant \pi_3$.

Реологические уравнения «контравариантной» и «ковариантной» моделей Олдройда соответственно имеют в лагранжевых координатах следующий вид:

$$\frac{d\pi^{ij}}{dt}+\frac{1}{\lambda}\pi^{ij}=-\mu\frac{dg^{ij}}{dt},\quad \frac{d\pi_{ij}}{dt}+\frac{1}{\lambda}\pi_{ij}=\mu\frac{dg_{ij}}{dt}\quad \left(\mu=\frac{\eta}{\lambda}\right) \tag{2.1}$$

Модель Де Уитта описывается реологическим уравнением

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\pi_{ij}}{dt}+g_{ir}g_{js}\frac{d\pi^{rs}}{dt}\right)+\frac{1}{\lambda}\pi_{ij}=\mu\frac{dg_{ij}}{dt} \tag{2.2}$$

В этих уравнениях символ $d\,/\,dt$ означает дифференцирование по времени при фиксированных лагранжевых координатах. Интегрируя уравнения (2.1), (2.2) с начальным условием $\Pi(\xi^i,\,t_0)=\Pi_0(\xi^i)$, можно получить наследственные соотношения, определяющие напряженное состояние в момент времени t через начальный тензор Π_0 и историю деформации $g_{ij}(t')$ на интервале $t_0<t'<t$.

В вязкоупругих жидкостях максвелловского типа можно рассматривать мгновенные деформации, отвечающие скачкообразному изменению базисных векторов $\mathfrak{э}_i$. Это свойство сред, обладающих мгновенной упругостью, предсказывает, в частности, линейная теория вязкоупругости [10]. Концепция мгновенного деформирования в вязкоупругих средах при наличии конечных деформаций нашла отражение в работах [11,12].

Установим общий вид связи между напряжениями и мгновенными деформациями для моделей Олдройда. Интегрируя реологические уравнения (2.1), получим

$$\pi^{ij}(t)=\pi^{ij}(t_0)\exp\left(\frac{t_0-t}{\lambda}\right)-\mu\int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{t'-t}{\lambda}\right)\frac{dg^{ij}(t')}{dt'}dt' \tag{2.3}$$

$$\pi_{ij}(t)=\pi_{ij}(t_0)\exp\left(\frac{t_0-t}{\lambda}\right)+\mu\int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{t'-t}{\lambda}\right)\frac{dg_{ij}(t')}{dt'}dt'$$

Произведем в формулах (2.3) формальную замену $t_0\to t-\Delta t$, $t\to t+\Delta t$ и рассмотрим такой непрерывный закон изменения компонент метрического тензора $g_{ij}=g_{ij}(t',\,\Delta t)$, чтобы предельные функции

$$g_{ij}(t')=\lim_{\Delta t\to 0}g_{ij}(t',\,\Delta t)$$

имели разрыв при $t'=t$, так что $\{g_{ij}\}=g_{ij}(t+0)-g_{ij}(t-0)$. Тогда, переходя в формулах (2.3) к пределу при $\Delta t\to 0$, получим для контравариантной и ковариантной моделей соответственно

$$\begin{gathered}\pi^{ij}=\pi_0{}^{ij}+2\mu\varepsilon^{ij*}\\ \pi^{ij}=\pi^{ij}(t+0),\quad \pi_0{}^{ij}=\pi^{ij}(t-0),\quad 2\varepsilon^{ij*}=-\{g^{ij}\}\\ \pi_{ij}=\pi_{ij}{}^{\circ}+2\mu\varepsilon_{ij*}\\ \pi_{ij}=\pi_{ij}(t+0),\quad \pi_{ij}{}^{\circ}=\pi_{ij}(t-0),\quad 2\varepsilon_{ij*}=\{g_{ij}\}\end{gathered} \tag{2.4}$$

Заметим, что соотношения между напряжениями и мгновенными деформациями (2.4) такие же, как и соотношения между напряжениями и деформациями в гипоупругих средах. Уравнения гипоупругих сред получаются отбрасыванием членов π^{ij} / λ или π_{ij} / λ в уравнениях (2.1). Отброшенные члены моделируют вязкие составляющие в элементах Максвелла и несущественны при мгновенных деформациях, так как для развития вязкой деформации нужно конечное время.

Пусть начальный лагранжев базис ортонормален и направлен вдоль главных осей тензора Π_0. Тогда из соотношений (2.4) видно, что матрицы $\| \pi^{ij} \|$ или $\| \pi_{ij} \|$ будут диагональными в том и только том случае, когда начальный ортонормальный базис $\mathfrak{s}_i^\circ$, направленный по главным осям тензора Π_0, переходит в результате деформации в ортогональный базис $\mathfrak{s}_i$. Таким образом, после мгновенного деформирования главные оси напряжений и деформаций могут оказаться различными. Этот факт выпадал из поля зрения исследований по мгновенным деформациями из-за тенденции рассматривать изотропное начальное напряженное состояние [11]. Между тем, анизотропное напряженное состояние вязкоупругого материала сильно влияет на его дальнейшее поведение [5], особенно при мгновенных деформациях, когда начальное состояние не успевает сгладиться в памяти среды.

В случае изотропного тензора $\Pi_0 = \pi_0 G_0$ главные оси тензоров Π, ε^* и ε_* совпадают. В базисе $\mathfrak{s}_i$, направленном по этим главным осям, могут быть отличны от нуля только диагональные элементы матриц $\| \pi^{ij} \|$ и $\| \varepsilon^{ij*} \|$, а также матриц $\| \pi_{ij} \|$ и $\| \varepsilon_{ij*} \|$. В этом случае из (2.4) получим соответственно

$$\pi_i = \pi_0 + 2(\mu + \pi_0)\,\varepsilon_i{}^* = \pi_0 + (\mu + \pi_0)(e^{2h_i} - 1)$$

$$\pi_i = \pi_0 + 2(\mu - \pi_0)\,\varepsilon_{i*} = \pi_0 + (\mu - \pi_0)(1 - e^{-2h_i})$$

При выводе написанных соотношений использовались правила перехода от контравариантных и ковариантных компонент тензора Π в ортогональных базисах $\mathfrak{s}_i$ и $\mathfrak{s}^i$ к главным значениям этого тензора

$$\pi_\alpha = \pi^{\alpha\alpha} g_{\alpha\alpha} = \pi^{\alpha\alpha}(1 + 2\varepsilon_\alpha{}^*), \qquad \pi_\alpha = \pi_{\alpha\alpha} g^{\alpha\alpha} = \pi_{\alpha\alpha}(1 - 2\varepsilon_{\alpha*})$$

В последних формулах суммирование по повторяющимся индексам не производится.

Из установленных соотношений видно, что в случае $\pi_0 < -\mu$ дополнительное сжимающее усилие в главном направлении $\pi_i < \pi_0$ должно приводить к упругому удлинению волокна в материале, отвечающем контравариантной модели. В случае же $\pi_0 > \mu$ дополнительное растягивающее усилие $\pi_i > \pi_0$ приведет к сокращению главного волокна в ковариантной модели. Полученный результат не согласуется с обычными свойствами упругих сред, хотя и не противоречит законам механики. Из дальнейшего будет видно, что такое аномальное поведение вязкоупругих сред запрещено требованиями устойчивости локального термодинамического равновесия.

Будем предполагать, что мгновенные деформации не приводят к нарушению первоначально евклидовой метрики пространства, связанного с материальным континуумом. Тогда главные значения тензоров мгновенной деформации ε^*, ε_* и H должны лежать в следующих пределах [3]:

$$\varepsilon_i{}^* > -{}^1/_2, \qquad \varepsilon_{i*} < {}^1/_2, \qquad -\infty < h_i < \infty$$

Эти неравенства для главных значений тензоров мгновенных деформаций представляют собой предельные следствия аналогичных неравенств, которые должны быть выполнены для сколь угодно быстрых непрерывных конечных деформаций. Отсчитывая компоненты тензора H от состояния, отвечающего изотропному вязкоупругому давлению π_0, получим

$$e^{\pm 2h_i} = (\pi_i \pm \mu)/(\pi_0 \pm \mu) > 0 \qquad (2.5)$$

Здесь и всюду в дальнейшем верхние знаки соответствуют контравариантной модели, нижние — ковариантной.

Используя условие несжимаемости мгновенных деформаций, можно однозначно определить изотропное вязкоупругое давление π_0, которое может быть достигнуто путем мгновенной деформации из состояния с заданным тензором П

$$\pi_0 = \mp \mu + [(\pi_1 \pm \mu)(\pi_2 \pm \mu)\ (\pi_3 \pm \mu)]^{1/3} \qquad (2.6)$$

При термодинамическом выводе уравнений состояния сплошных сред обычно задается какой-нибудь из термодинамических потенциалов в зависимости от соответствующего набора равновесных параметров [3]. При постулировании определяющих уравнений возникает задача отыскания внутренней или свободной энергии по заданным уравнениям состояния. Эта задача сводится к интегрированию уравнения Гиббса

$$dU = -dA_i^r + Tds = \rho^{-1}\pi^{ij}\, d\varepsilon_{ij*} + Tds$$

Здесь $d\varepsilon_{ij*}$ — приращения ковариантных компонент тензора обратимых деформаций ε_*, dA_i^r — элементарная работа внутренних напряжений на обратимых деформациях.

Реологические уравнения (2.1), (2.2) не содержат абсолютную температуру или энтропию. Фактически эти уравнения используются в таком диапазоне температур, когда реологические константы λ и η можно считать постоянными. Обратимая работа внутренних сил dA_i^r в этом случае не зависит от энтропии, поэтому величина Tds должна быть полным дифференциалом, т. е. энтропия должна зависеть только от температуры и может быть определена, если задана удельная теплоемкость несжимаемой среды $c_V(T)$.

Модели (2.1), (2.2) часто используются при описании течений растворов и расплавов полимеров. В литературе можно встретить указания на энтропийный характер упругости в некоторых полимерных жидкостях. При этом обычно имеют в виду, что в изотермических течениях изменение внутренней энергии пренебрежимо мало, и обратимая работа внутренних напряжений приводит только к изменению энтропии. Тогда выполняются соотношения

$$dU = 0, \qquad -dF_{T_0} = T_0\, ds = dA_i^r \qquad (F = U - Ts)$$

Таким образом, при постоянной внутренней энергии изменение энтропии перестает быть независимым от деформационных процессов.

Подчеркнем, что нетривиальные условия устойчивости термодинамического состояния, по существу, определяются поведением обратимой работы внутренних напряжений в исследуемых средах. В самом деле, в случае адиабатических виртуальных возмущений неравенство Клаузиуса (1.5) примет вид

$$\delta U_s - \delta A_e = -\delta A_i^r - \delta A_e > 0$$

Если же упругость имеет энтропийную природу, то неравенство (1.5) можно записать в виде

$$-\delta A_e - T_0\delta s = -\delta A_e - \delta A_i^r > 0$$

В обоих случаях именно анализ вариации δA_i^r позволит выделить класс неустойчивых состояний.

Из вида реологических уравнений (2.1), (2.2) и соотношения Гиббса следует, что в выражение для внутренней энергии аддитивным образом входит деформационная часть, которая не зависит от энтропии, и часть, зависящая только от энтропии.

Рассмотрим обратимый адиабатический процесс мгновенного деформирования для сред Олдройда. Обратимый характер мгновенных деформаций следует из соотношений (2.4). Эти соотношения предсказывают сохранение длины dl произвольного материального волокна в скачкообразном процессе «нагрузка — разгрузка». Для бесконечно малого адиабатического мгновенного деформирования уравнение Гиббса имеет вид

$$dU_s = dF_T = (2\rho)^{-1}\pi^{ij}\,dg_{ij} \tag{2.7}$$

Для контравариантной и ковариантной моделей получим соответственно

$$\pi^{ij}\,dg_{ij} = d\,(\pi^{ij}g_{ij}) = d\Pi_1 \qquad (\Pi_1 = \mathrm{Sp}\,\mathbf{\Pi})$$
$$\pi^{ij}\,dg_{ij} = -\pi_{ij}dg^{ij} = -d\,(\pi_{ij}g^{ij}) = -d\Pi_1$$

При выводе двух последних формул использовалось условие несжимаемости $g^{ij}dg_{ij} = 0$, а также равенства $g_{ij}d\pi^{ij} = 0$ или $g^{ij}\,d\pi_{ij} = 0$, следующие из первой или второй группы соотношений (2.4). Поэтому формула (2.7) примет вид

$$dU_s = dF_T = \pm(2\rho)^{-1}d\Pi_1$$

Следовательно, справедливы следующие формулы для конечных изменений деформационных частей внутренней и свободной энергии в средах Олдройда:

$$\Delta U_s = \Delta F_T = \pm(2\rho)^{-1}\Delta\Pi_1 \tag{2.8}$$

Используя формулы (2.4), можно выразить ΔU_s через инварианты начального тензора Π_0 и тензоров деформации. Для контравариантной и ковариантной моделей получим соответственно

$$\Delta U_s = \rho^{-1}\,\mathrm{Sp}\,(\mu\boldsymbol{\varepsilon}^* + \mathbf{\Pi}_0\boldsymbol{\varepsilon}_0), \qquad \boldsymbol{\varepsilon}_0 = \varepsilon^{ij*}\,\mathfrak{s}_0{}^i\mathfrak{s}_0{}^j$$
$$\Delta U_s = \rho^{-1}\,\mathrm{Sp}\,(\mu\boldsymbol{\varepsilon}_* - \mathbf{\Pi}_0\boldsymbol{\varepsilon}^\circ), \qquad \boldsymbol{\varepsilon}^\circ = \varepsilon^{ij*}\,\mathfrak{s}_i{}^\circ\mathfrak{s}_j{}^\circ$$

Главные значения тензоров $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ и $\boldsymbol{\varepsilon}^\circ$ равны $\varepsilon_i{}^*$ и ε_{i*}. Пусть $\mathfrak{s}_i{}^*$, $\mathfrak{s}_i{}^\circ$ — ортонормальные базисы главных осей тензоров $\mathbf{\Pi}_0$, $\boldsymbol{\varepsilon}_0$, соответственно. Преобразование от базиса $\mathfrak{s}_i{}^\circ$ к базису $\mathfrak{s}_i{}^*$ задается ортогональной матрицей $C = \| c_{\cdot j}{}^{i\cdot} \|$, так что $\mathfrak{s}_i{}^* = c_{\cdot i}{}^{j\cdot}\,\mathfrak{s}_j{}^\circ$. Тогда выражение для ΔU_s в контравариантной модели можно представить в виде

$$\Delta U_s = \rho^{-1}\left(\mu\sum_{i=1}^{3}\varepsilon_i{}^* + \sum_{i,\,j=1}^{3}(c^{i}_{\cdot j})^2\pi_j{}^\circ\varepsilon_i{}^*\right)$$

Таким образом, ΔU_s зависит не только от главных значений тензора обратимых деформаций ε_0, но и от главных напряжений π_i° в начальном состоянии, а также от углов, которые составляют между собой главные оси тензоров ε_0 и Π_0. (Девять компонент ортогональной матрицы C зависят от трех углов Эйлера, определяющих поворот триэдра $\mathrm{э}_i{}^*$ относительно триэдра $\mathrm{э}_i{}^\circ$.) Для ковариантной модели также можно выразить ΔU_s через главные значения тензоров Π_0 и ε° и углы, определяющие поворот главных осей деформации относительно начальных главных осей напряжений.

Отсчитывая тензор обратимых деформаций H и функцию U_s от начального состояния с изотропным тензором $\Pi_0 = \pi_0 G_0$, получим

$$U_s = \frac{1}{2\rho}(\mu \pm \pi_0)(e^{\pm 2h_1} + e^{\pm 2h_2} + e^{\pm 2h_3} - 3) \tag{2.9}$$

В среде Де Уитта связь между напряжениями и обратимыми деформациями может быть установлена путем яуманновского интегрирования соотношений (2.2) [13, 14] и последующего предельного перехода к мгновенной деформации. Поскольку при таком переходе члены π_{ij} / λ не дадут вклада в искомую связь, то соотношения между напряжениями и мгновенными деформациями можно получить интегрированием уравнений гипоупругого тела

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\pi_{ij}}{dt} + g_{ir}g_{js}\frac{d\pi^{rs}}{dt}\right) = \mu\frac{dg_{ij}}{dt}$$

с последующим предельным переходом к мгновенной деформации. Для бесконечно малых приращений матриц $\Pi = \| \pi_{\cdot j}^{i} \|$ и $G = \| g_{ij} \|$ уравнения гипоупругой среды эквивалентны соотношению

$$2\, d\Pi + G^{-1}dG\, \Pi - \Pi G^{-1}dG = 2\, \mu G^{-1}dG \tag{2.10}$$

Дифференциальная матричная связь (2.10) неголономна. В этом состоит существенное отличие модели Де Уитта от моделей Олдройда, где аналоги соотношения (2.10) имеют вид

$$d\,(\Pi\, G^{-1}) = -\, \mu dG^{-1}, \quad d\,(G\,\Pi) = \mu dG$$

и являются уравнениями в полных дифференциалах. Поэтому напряжения в модели (2.2) не определяются однозначно заданием начального напряженного состояния и окончательной обратимой деформации, но однозначно определяются историей обратимого деформирования. В случае мгновенных деформаций под историей деформирования следует понимать характер предельного перехода от непрерывной деформации к мгновенной. В этом смысле существует зависимость напряжений от структуры мгновенной деформации.

Поясним указанное свойство модели Де Уитта примерами, полезными при последующем изложении. Пусть на всех стадиях непрерывного деформирования главные оси деформации неизменны в материале. Обозначим через $(\pi_{ij}{}^\circ)$ физические компоненты тензора Π_0 в базисе $\mathfrak{э}_i^\circ$ и через (π_{ij}) физические компоненты тензора Π в базисе $\mathfrak{э}_i$. Здесь $\mathfrak{э}_i^\circ$ и $\mathfrak{э}_i$ — начальный и текущий базисы главных осей деформации. В рассматриваемом случае интегрирование соотношений (2.10) приводит к формулам

$$(\pi_{\alpha\alpha}) = (\overset{\circ}{\pi}_{\alpha\alpha}) + 2\mu h_\alpha, \qquad (\pi_{\alpha\beta}) = (\overset{\circ}{\pi}_{\alpha\beta}) \qquad (\alpha \neq \beta) \tag{2.11}$$

Последние соотношения явно не зависят от времени и останутся справедливыми при переходе к мгновенной деформации. При нарушении требования неизменности главных осей деформации в материале формулы (2.11) неверны.

Рассмотрим непрерывную деформацию простого сдвига, которая характеризуется вращением главных осей деформации в материале. Для простоты ограничимся случаем плоского напряженного и деформируемого состояния. Ортонормальный двумерный базис $\mathfrak{э}_i^\circ$ направим по главным осям тензора Π_0 так, чтобы $\pi_1^\circ \geqslant \pi_2^\circ$. В процессе деформации сдвига вектор $\mathfrak{э}_1(t)$ остается равным $\mathfrak{э}_1^\circ$, а вектор $\mathfrak{э}_2(t)$ удлиняется и составляет угол $\varphi(t)$ с вектором $\mathfrak{э}_2^\circ$, так что величина сдвига равна $a(t) = \operatorname{tg}\varphi(t)$. Напряженное состояние в момент времени t в гипоупругом теле определяется интегрированием матричного уравнения (2.10) с заданным начальным тензором Π_0 и заданной историей деформации:

$$\Pi_0 = \begin{Vmatrix} \pi_1^\circ & 0 \\ 0 & \pi_2^\circ \end{Vmatrix}, \qquad G = \begin{Vmatrix} 1 & a \\ a & 1 + a^2 \end{Vmatrix} \qquad (a(t_0) = 0)$$

Матрица G удовлетворяет условию несжимаемости: $\det G = 1$. Поскольку G зависит только от величины сдвига $a(t)$, то, принимая $a(t)$ за новую независимую переменную, проинтегрируем уравнение (2.10), которое эквивалентно системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно элементов матрицы Π. В результате получим

$$\begin{aligned} &\pi_{\cdot 1}^{1\cdot} = {}^1\!/_2(\pi_1^\circ + \pi_2^\circ) + \mu - [{}^1\!/_2(\pi_2^\circ - \pi_1^\circ) + \mu](\cos a + a \sin a) \\ &\pi_{\cdot 1}^{2\cdot} = [{}^1\!/_2(\pi_2^\circ - \pi_1^\circ) + \mu]\sin a, \qquad \pi_{\cdot 2}^{1\cdot} = \pi_{\cdot 1}^{2\cdot}(1 + a^2) + (\pi_{\cdot 1}^{1\cdot} - \pi_{\cdot 2}^{2\cdot})\, a \\ &\pi_{\cdot 2}^{2\cdot} = \pi_1^\circ + \pi_2^\circ - \pi_{\cdot 1}^{1\cdot} \end{aligned} \tag{2.12}$$

Формулы (2.12) справедливы для мгновенной деформации, если при переходе от непрерывной деформации к мгновенной матрица G имеет указанный выше вид. Однако та же самая мгновенная деформация сдвига может быть получена предельным переходом от непрерывной деформации растяжения — сжатия вдоль главных осей тензора ε_0 и последующего квазитвердого вращения. Тогда будут справедливы формулы (2.11), которые дают отличное от (2.12) описание окончательного напряженного состояния при одинаковых начальных условиях для напряжений и той же самой величине окончательной деформации.

Универсальная формула для ΔU_s в модели (2.2) получается следующим образом. Имея в виду приращения dg_{ij} в обратимом процессе, запишем уравнение (2.7) в виде

$$\rho dU_s = {}^1\!/_2\, \pi^{ij}\, dg_{ij} = {}^1\!/_2 \operatorname{Sp}(\Pi G^{-1} dG)$$

Умножим уравнение (2.10) на матрицу Π слева и возьмем след от обеих частей получившегося уравнения, используя тождество

$$\operatorname{Sp}(\Pi G^{-1} dG\, \Pi) = \operatorname{Sp}(\Pi^2 G^{-1} dG)$$

В результате получим

$$\operatorname{Sp}(\Pi G^{-1} dG) = \frac{1}{\mu} \operatorname{Sp}(\Pi d\Pi) = \frac{1}{2\mu} d\Pi_2, \qquad \Pi_2 = \pi_{\cdot j}^{i} \pi_{\cdot i}^{j}$$

Следовательно

$$\Delta U_s = \frac{1}{4\rho\mu} \Delta \Pi_2 \qquad (2.13)$$

Формула (2.13) справедлива для любых процессов в среде Де Уитта, где, как и в средах Олдройда, термодинамическое состояние определяется тензором вязкоупругих напряжений и абсолютной температурой. Сравнивая (2.13) с (2.8), видим, что в отличие от моделей Олдройда внутренняя энергия в модели с яуманновской производной зависит от второго, а не от первого инварианта тензора П. Более принципиальным отличием является нелокальная зависимость внутренней энергии от обратимых деформаций. т. е. отсутствие однозначной зависимости внутренней энергии в среде (2.2) от окончательной обратимой деформации. Эта неоднозначность может быть устранена только путем привлечения данных о структуре мгновенной деформации.

В частном случае, когда мгновенной деформации соответствует предельный переход от непрерывной деформации с «вмороженными» в материал главными осями, из (2.11), (2.13) следует

$$\Delta U_s = \Delta F_T = \frac{\mu}{\rho} \Delta (h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) \qquad (2.14)$$

Последняя формула приведена в работах [14, 15]. В отличие от выражения (2.13) эта формула не универсальна и справедлива только для частного вида процесса обратимого деформирования. По существу, предположения о коаксиальной связи тензора П с тензором обратимых деформаций Н и о независимости реологического поведения материала от «упругих» поворотов, выдвинутые в [14, 15], оказываются более жесткими, чем следствия определяющих уравнений (2.2).

3. Термодинамический вывод условий эволюционности. Установим необходимые условия устойчивости термодинамического состояния в моделях Олдройда. Пусть дано произвольное состояние с параметрами Π_0, T_0. Рассмотрим такое возмущенное состояние с параметрами $\Pi_0 + \delta\Pi$, $T_0 + \delta T$, для которого обратимая деформация, отвечающая переходу $\Pi_0 \to \Pi_0 + \delta\Pi$, сводится к растяжению — сжатию вдоль главных осей тензора Π_0. В случае коаксиального деформирования можно применить неравенство Клаузиуса в форме (1.9). Величина δA_e — линейная форма относительно вариаций δh_i. В то же время приращение δU, согласно формулам (2.8), будет линейной формой относительно $\delta\pi_i$. Однако между виртуальными приращениями $\delta\pi_i$ и δh_i существует нелинейная связь, следующая из соотношений между напряжениями и мгновенными деформациями Поэтому разложение левой части неравенства (1.9) либо по независимым вариациям δh_i, либо по независимым вариациям $\delta\pi_i$ будет содержать члены второго и более высоких порядков относительно этих вариаций.

В рассматриваемом случае удобно разлагать приращение δU по переменным δh_i, используя представление (2.9) для деформационной части внутренней энергии. Из условия несжимаемости мгновенных деформаций следует $h_3 = -(h_1 + h_2)$. Поэтому будем для определенности считать $U = U(h_1, h_2, s)$. Разложим приращение δU вблизи значений $h_i = h_i^\circ$,

$s = s_0$, удерживая в разложении члены второго порядка малости

$$\delta U = \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial U}{\partial h_i}\right)_0 \delta h_i + \left(\frac{\partial U}{\partial s}\right)_0 \delta s + \frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial h_i \partial h_j}\right)_0 \delta h_i \delta h_j + $$
$$+ \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial h_i \partial s}\right)_0 \delta h_i \delta s + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial s^2}\right)_0 (\delta s)^2$$

Нулевой индекс при производных означает, что они вычисляются при значениях $h_i = h_i^\circ$, $s = s_0$, отвечающих невозмущенному состоянию. Используя выражения (2.9), связи между величинами π_i°, h_i° и изотропным давлением разгрузки π_0, а также условие $h_3 = -(h_1 + h_2)$ получим формулу, справедливую для обеих моделей Олдройда

$$\sum_{i=1}^{2} (\partial U / \partial h_i)_0 \, \delta h_i = \rho^{-1} [(\pi_1^\circ - \pi_3^\circ) \delta h_1 + (\pi_2^\circ - \pi_3^\circ) \delta h_2] \qquad (3.1)$$

Легко проверить, что правая часть равенства (3.1) равна δA_e. Используя, кроме того, условие $(\partial U / \partial s)_0 = T_0$, видим, что сумма членов первого порядка в неравенстве (1.9) равна нулю. Поскольку $\partial^2 U \,/\, \partial h_i \partial s \equiv 0$, приходим к требованию

$$\sum_{i,\,j=1}^{2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial h_i \partial h_j}\right)_0 \delta h_i \delta h_j + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial s^2}\right)_0 (\delta s)^2 > 0 \qquad (3.2)$$

Условия положительной определенности квадратичной формы (3.2) в случае контравариантной и ковариантной моделей имеют вид

$$\mu \pm \pi_0 > 0, \quad (dT \,/\, ds)_0 > 0 \qquad (3.3)$$

Учитывая теперь (2.5), видим, что для выполнения первого неравенства (3.3) необходимо и достаточно выполнение условия:

для контравариантной модели

$$\pi_3^\circ > -\mu \qquad (3.4)$$

для ковариантной модели

$$\pi_1^\circ < \mu \qquad (3.5)$$

Неравенства (3.4), (3.5) совпадают с условиями эволюционности уравнений гидродинамики соответствующих олдройдовских сред, установленных в [5] на основании анализа дисперсионных уравнений для малых возмущений.

Следовательно, возможная неэволюционность уравнений динамики олдройдовских сред (2.1) связана с потерей устойчивости локального термодинамического равновесия. Условие $dT \,/\, ds > 0$ означает положительность удельной теплоемкости $c_V = T ds \,/\, dT$ несжимаемого материала и обычно выполняется для реальных сред.

Условие эволюционности уравнений динамики модели (2.2) при несколько иных предположениях также выводится из неравенства Клаузиуса.

Если структура мгновенного деформирования такова, что главные оси быстро меняющейся непрерывной деформации все время вморожены в материал, то для ΔU_s верна формула (2.14). Применение этой формулы в неравенстве Клаузиуса приводит к тривиальному условию: $\mu > 0$. Этот результат можно было предвидеть на основании формул (2.11), которые показывают, что при вмороженных главных осях деформации невозможно аномальное упругое удлинение волокна при увеличении сжимающего усилия.

Неэволюционность уравнений динамики модели с яуманновской производной может проявляться только при исследовании течений с вращением главных осей деформации относительно жидкости. Поэтому причины неэволюционности уравнений, отвечающих этой модели, следует искать в поведении внутренней энергии при обратимых деформациях, структура которых связана с вращением главных осей деформации в материале.

Учитывая последнее замечание, применим неравенство (1.5) к виртуальной мгновенной деформации, получающейся предельным переходом из непрерывной деформации простого сдвига. Для такой деформации изменение δU_s можно выразить через главные значения тензора Π_0 и величину сдвига a, используя формулы (2.12), (2.13). В результате получим

$$\delta U_s = \rho^{-1} [{}^1/_2 (\pi_2{}^\circ - \pi_1{}^\circ) + \mu] (1 - \cos a) \tag{3.6}$$

Виртуальная работа δA_e на обратимых деформациях равна

$$\delta A_e = \frac{1}{2\rho} \int\limits_{g_{ij}(0)}^{g_{ij}(a)} (\pi_1{}^\circ b^{i}_{\cdot 1} b^{j}_{\cdot 1} + \pi_2{}^\circ b^{i}_{\cdot 2} b^{j}_{\cdot 2})\, dg_{ij}$$

Здесь матрица $\| b_{\cdot j}{}^{i\cdot} \|$ определяет переход от базиса э_i к базису $\text{э}_i{}^0$

$$\text{э}_i{}^\circ = b^{j}_{\cdot i} \text{э}_j, \qquad \| b^{i}_{\cdot j} \| = \begin{Vmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

Нетрудно проверить, что в рассматриваемом случае $\delta A_e = 0$. Удерживая в разложении δU члены первого и второго порядка малости относительно возмущений δa, δs, приведем неравенство (1.5) к виду

$$(\partial^2 U / \partial a^2)_0 (\delta a)^2 + (\partial^2 U / \partial s^2)_0 (\delta s)^2 > 0 \tag{3.7}$$

Снабженные нулевым индексом производные в (3.7) вычисляются при невозмущенных значениях параметров $a = 0$, $s = s_0$. При выводе (3.7) были использованы условия

$$\delta A_e = 0, \quad (\partial U / \partial a)_0 = 0, \quad (\partial U / \partial s)_0 = T_0, \quad \partial^2 U / \partial a \partial s \equiv 0$$

Учитывая выражение (3.6), приходим к требованию

$$\rho^{-1} [\mu - {}^1/_2 (\pi_1{}^\circ - \pi_2{}^\circ)] (\delta a)^2 + (dT / ds)_0 (\delta s^2) > 0$$

Отсюда получим

$${}^1/_2 (\pi_1{}^\circ - \pi_2{}^\circ) < \mu, \qquad (dT / ds)_0 > 0 \tag{3.8}$$

Первое из неравенств (3.8) ограничивает величину максимального касательного напряжения в среде Де Уитта и совпадает с условием эволюционности уравнений гидродинамики этой среды [5].

Итак, для модели с яуманновской производной условие эволюционности выводится из неравенства Клаузиуса в предположении о применимости этого неравенства для виртуальных деформаций с произвольной структурой мгновенного деформирования. В частности, локальное термодинамическое состояние должно быть устойчивым при вращении главных осей деформации в материале.

Таким образом, для рассмотренных вязкоупругих моделей неэволюционность уравнений оказывается следствием некорректного задания внутренней энергии для адиабатических процессов или свободной энергии для изотермических процессов. Аналогичной является природа неэволюционности, обнаруженной в уравнениях динамики нелинейно упругой среды [16].

Существует, однако, и другой аспект неэволюционности, связанный с произволом при моделировании диссипативных процессов, например, в модели неньютоновской жидкости с нелинейной вязкостью [17]. По-видимому, для таких сред условия эволюционности могут быть следствиями экстремальных принципов термодинамики необратимых процессов.

Автор выражает глубокую благодарность Л. И. Седову за внимание к работе и ценные указания, а также А. Г. Куликовскому и С. А. Региреру за полезное обсуждение работы.

Поступила 30 XII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Oldroyd J. G. On the formulation of rheological eguations of state. Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1950, vol. 200, No 1063.
2. De Witt T. W. A rheological eguation of state which predicts non-Newtonian viscosity, normal stresses and dynamic moduli. J. Appl. Phys., 1955, vol. 26, No 7.
3. Седов Л. И. Введение в механику сплошной среды. М., Физматгиз, 1962.
4. Руткевич И. М. Некоторые общие свойства уравнений динамики вязкоупругой несжимаемой жидкости. ПММ, 1969, т. 33, вып. 1.
5. Руткевич И. М. О распространении малых возмущений в вязкоупругой жидкости. ПММ, 1970, т. 34, вып. 1.
6. Вергеланд Г., Тер Хаар Д. Элементарная термодинамика. М., «Мир», 1968.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика, т. 5, Статистическая физика. М., «Наука», 1964.
8. Glansdorff P., Prigogine I. Sur la theorie generale de la stabilite de l'equilibre thermodynamique. В сб.: Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды (К шестидесятилетию академика Л. И. Седова), М., «Наука», 1969.
9. Гельфанд И. М. Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений. Успехи матем. наук, 1959, т. 14, № 2.
10. Бленд Д. Теория линейной вязкоупругости. М., «Мир», 1965.
11. Лодж А. Эластичные жидкости. М., «Наука», 1969.
12. Coleman B. D., Gurtin M. E., Herrera I. R. Waves in materials with memory. I. The velocity of one-dimensional shock and acceleration waves. Arch. Rat. Mech. Anal., 1965, vol. 19, No 1.
13. Goddard J. D., Miller Ch. An inverse for the Jaumann derivative and some applications to the rheology of viscoelastic fluids. Rheol. Acta, 1966, Bd. 5, H. 3.
14. Городцов В. А., Леонов А. И. О кинематике, неравновесной термодинамике и реологических соотношениях в нелинейной теории вязкоупругости. ПММ, 1968, т. 32, вып. 1.
15. Буевич Ю. А. О кинематике упруговязких сред с конечными деформациями. ПММ, 1968, т. 32, вып. 2.
16. Hayes M.. Revlin R. S. Propagation of a plane wave in an isotropic elastic material subjected to pure homogeneous deformation Arch. Rat. Mech Anal., 1961, vol. 8, No 1.
17. Регирер С. А., Руткевич И. М. Некоторые особенности уравнений гидродинамики неньютоновских сред. ПММ, 1968, т. 32, вып. 5.