

## О СПЕКТРАХ ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

В. Н. Москаленко

(Москва)

Дается асимптотическое решение задачи об определении спектра частот собственных колебаний оболочек вращения. Порядок допускаемой при этом погрешности оценивается на примере вычисления нулей функций Бесселя. Обсуждается вопрос о плотности распределения частот. На примере цилиндрической и замкнутой сферической оболочек дается сопоставление с результатами В. В. Болотина [1], а также с эмпирической плотностью частот.

1. Пусть оболочка вращения колеблется с частотой  $\omega$ . Тогда форма колебаний может быть найдена из уравнений В. З. Власова [2], которые при пренебрежении тангенциальными силами инерции имеют вид

$$D\Delta\Delta w - \Delta_k\psi - \rho h\omega^2 w = 0, \quad (Eh)^{-1} \Delta\Delta\psi + \Delta_k w = 0 \quad (1.1)$$

Здесь  $w$  — функция нормального прогиба,  $\psi$  — функция усилий в срединной поверхности. Выбирая в качестве координат длину дуги  $x$  вдоль образующей и угол  $\theta$ , измеряемый в окружном направлении, приходим к выражениям для используемых в (1.1) операторов

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} \left( r \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad \Delta_k = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{r}{R_2} \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{1}{rR_1} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

где  $r(x)$  — расстояние до оси оболочки вращения,  $R_1, R_2$  — радиусы кривизны оболочки.

Решение уравнений (1.1) будем искать, выделяя быстро меняющийся множитель [3,4]

$$\omega(x, \theta) = W(x) \exp[if(x)] \cos n\theta, \quad \psi(x, \theta) = \Psi(x) \exp[if(x)] \cos n\theta \quad (1.2)$$

Функции  $W(x), \Psi(x)$  и производную  $df/dx = f'(x)$  будем считать медленно меняющимися, так что слагаемыми  $W', \Psi', f''$  можно пренебречь по сравнению с  $f'W, f'\Psi, (f')^2$ .

Подставляя (1.2) в уравнения (1.1), убеждаемся, что если функция  $f'(x)$  известна, то частота собственных колебаний может быть найдена из выражения

$$\rho h\omega^2 = D \left( f'^2 + \frac{n^2}{r^2} \right)^2 + Eh \left( \frac{f'^2}{R_2} + \frac{n^2}{r^2 R_1} \right)^2 \left( f'^2 + \frac{n^2}{r^2} \right)^{-2} \quad (1.3)$$

Величины  $f'$  и  $n/r$  являются аналогами волновых чисел  $k_1, k_2$ , используемых в работе [1]. При известной частоте (1.3) следует трактовать как уравнение для определения  $f'$ . Изучим это уравнение подробнее.

2. Пусть при некоторой частоте для части оболочки уравнение (1.3) не имеет действительных корней. Деформация этой части оболочки, называемой в дальнейшем зоной нулевого типа, носит характер, близкий к квазистатическому. Эта часть оболочки играет роль упругой заделки для остальной оболочки. Решения в зоне нулевого типа будут типа краевых эффектов. Из структуры формулы (1.3) вытекает, что возможны два типа колеблющихся зон оболочки. Первый тип характеризуется тем, что имеется лишь один положительный действительный корень. Для зон второго типа характерно наличие двух действительных положительных корней; имеет место случай вырождения динамического краевого эффекта [5].

Границы зон получим, полагая  $f' = 0$ , что дает

$$\rho h \omega^2 = D \frac{n^4}{r^4} + Eh \frac{1}{R_1^2} \quad (2.1)$$

Другие границы найдем, полагая, что существует действительный положительный корень кратности два. Уравнение границы имеет вид

$$a^2 (z^2 + 12 Kc^2) + (z^3 - 4Kc^2z + 18 Ka^2c^2) (2z^2 - 8Kc^2 - 3 a^2z) = 0$$

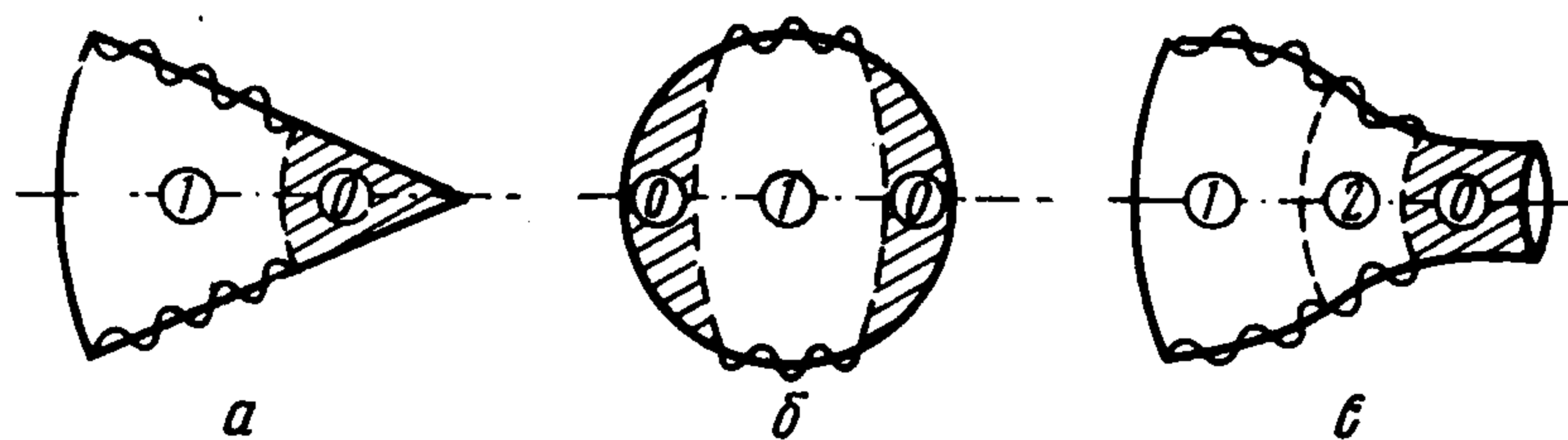
$$ac (z^2 + 12Kc^2) (z^3 - 4Kc^2z + 18Ka^2c^2)^{-1} + 1 < 0 \quad (2.2)$$

$$z = \frac{R^2}{R_2^2} - \frac{\rho h \omega^2 R^2}{Eh}, \quad a = \frac{R}{R_2}, \quad c = \frac{R}{R_1} - \frac{R}{R_2}, \quad K = \frac{DR^2 n^4}{Ehr^4}$$

Характерный радиус  $R$  может быть принят постоянным.

Линии, вдоль которых неравенство из (2.2) не выполняется, границами не будут.

Если число  $n$  мало, так что выполняется сильное неравенство  $Dn^4 r^{-4} \ll EhR_1^{-2}$ , то для определения корней в зоне второго типа может быть использовано вырожденное уравнение [6] (уравнение (1.3) без первого слагаемого в правой части).



Фиг. 1

Линии (2.1) могут быть границами между зонами нулевого типа и зонами первого типа, а также границами между зонами первого и второго типа. Линии (2.2) являются границами между зонами второго и нулевого типа. Примеры разбиения срединной поверхности оболочек вращения приведены на фиг. 1.

3. Приближенное определение частот собственных колебаний будет различным в зависимости от способа чередования зон нулевого, первого и второго типа.

Рассмотрим сначала простейший случай, когда зоны второго типа отсутствуют (фиг. 1, а, б). В каждой из зон первого типа функция  $f(x)$  получает некоторое приращение. Будем считать, что колебания возникают только в том случае, когда это приращение кратно числу  $\pi$ . Если зон первого типа несколько, то, как правило, при некоторой собственной частоте колебания будут наблюдаться лишь в одной из этих зон.

Рассмотрим общий случай, когда имеются зоны всех трех типов (фиг. 1, в). Пусть зона второго типа окружена зонами нулевого типа. В этом случае может быть сделана лишь оценка сверху для числа собственных частот. При оценке сверху будем считать, что собственные частоты соответствуют приращениям одной из функций  $f(x)$ , кратным  $\pi$ . В действительности часть найденных частот может не реализовываться. Если же зона второго типа граничит хотя бы с одной стороны с зоной первого типа, то реализуются все частоты. Пусть, например, зона второго типа граничит с зонами нулевого и первого типа, и пусть за зоной первого типа следует зона нулевого типа. В этом случае возможны два вида колебаний. Первый вид связан с меньшим корнем и соответствует колебаниям только во второй зоне. Приращение соответствующей функции  $f(x)$  должно быть кратно  $\pi$ . Вторым видом связан с наибольшим корнем и соответствует колебаниям в первой и второй зонах. Аналогично, в случае чередования зон нулевого, второго, первого, второго и нулевого типов, возможны колебания в каждой из зон второго типа, а также колебания одновременно в трех зонах.

Для оценки получаемой погрешности рассмотрим задачу о вычислении корней функции Бесселя  $I_n(y)$ . Уравнение имеет вид

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dw}{dx} + \left( y^2 - \frac{n^2}{x^2} \right) w = 0 \quad (3.1)$$

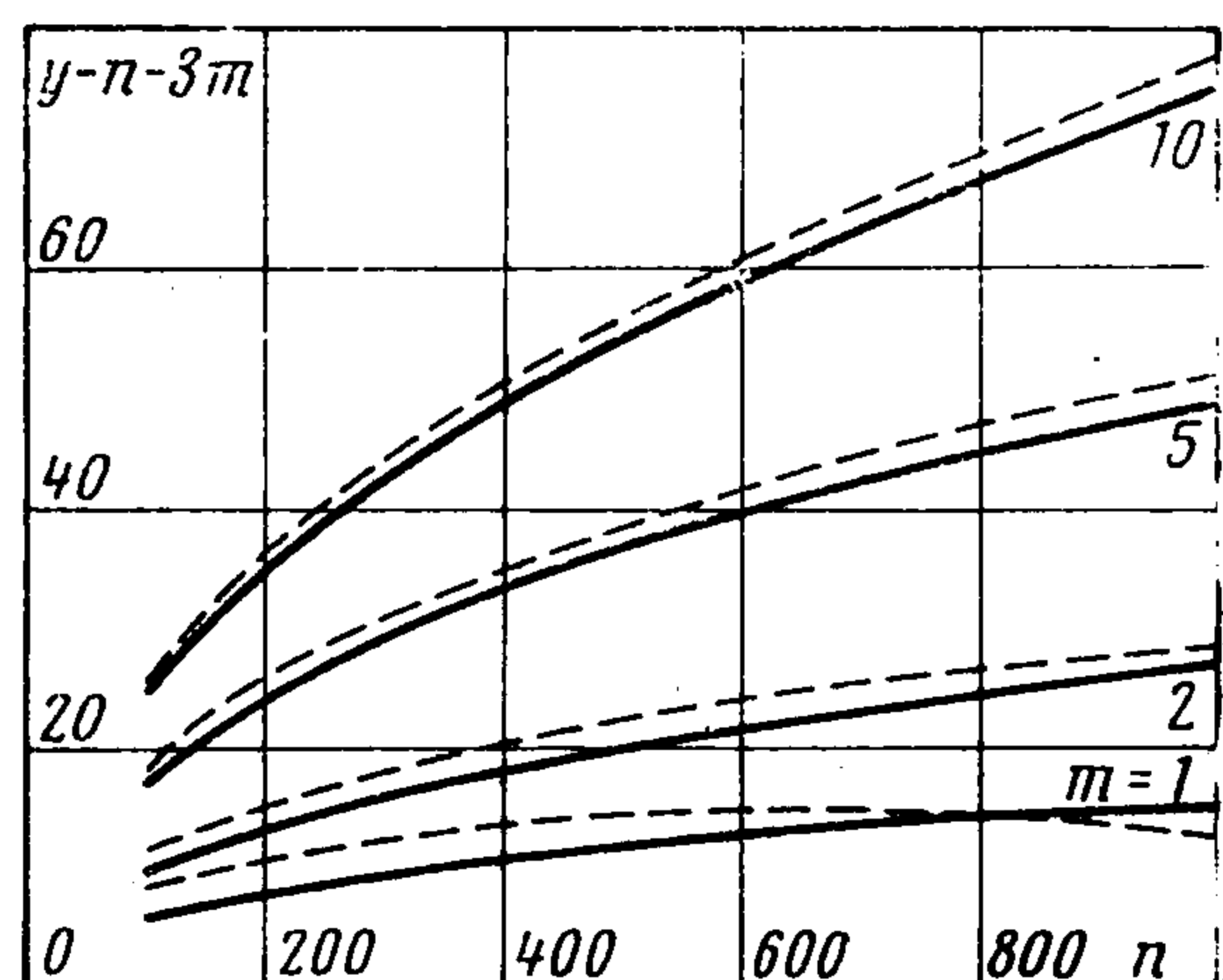
Рассматривая решение уравнения (3.1) на отрезке  $[0, 1]$  при условии ограниченности при  $x \rightarrow 0$  и условии  $w = 0$  при  $x = 1$ , получаем точное уравнение  $I_n(y) = 0$  и приближенное

$$n \left[ (y^2 n^{-2} - 1)^{1/2} - \arcsin (1 - n^2 y^{-2})^{1/2} \right] = m\pi \quad (3.2)$$

Результаты вычислений корней уравнения (3.2) приведены на фиг. 2 пунктирными линиями. Сплошными линиями даны точные зависимости. Сопоставление показывает, что погрешность приближенной формулы не превышает  $\pi$  при всех значениях  $m$  и  $n$ .

4. В качестве примеров рассмотрим колебания цилиндрической и замкнутой сферической оболочек.

Для круговой цилиндрической ( $R_1 = \infty$ ,  $R_2 = R$ ) оболочки длины  $l$  возможны два случая. В первом случае вся оболочка является зоной нулевого типа, во втором — зоной первого типа. Решение уравнения (1.3) относительно  $f'$  не будет зависеть от координат. Из условия, что приращение  $f(x)$  должно быть кратным числу  $\pi$ , получаем



Фиг. 2

$f' = \pi m l^{-1}$ . Для частот находим выражение

$$\omega = \omega_0 f(m, n)$$

Здесь

$$f(m, n) = [(\gamma^2 m^2 + n^2)^2 + m_*^4 \gamma^4 m^4 (\gamma^2 m^2 + n^2)^{-2}]^{1/2}$$

$$\gamma = \pi R l^{-1}, \quad \omega_0 = (D / \rho h R^4)^{1/2}, \quad m_* = (E h R^2 / D)^{1/4}$$

Число частот  $N(\omega)$ , меньших  $\omega$  и плотность частот  $n(\omega) = dN / d\omega$  даются приближенными формулами

$$N(\omega) = \iint_S dm dn \quad (S : f(m, n) < \omega / \omega_0)$$

$$\omega_0 n(\omega) = \begin{cases} \frac{2}{\gamma} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{1/2} K \left[ \left(\frac{2\omega_*}{\omega + \omega_*}\right)^{1/2} \right] & (\omega < \omega_*) \\ \frac{2}{\gamma} \left(\frac{\omega}{2\omega_*}\right)^{1/2} K \left[ \left(\frac{\omega + \omega_*}{2\omega_*}\right)^{1/2} \right] & (\omega > \omega_*) \end{cases} \quad (4.1)$$

Здесь  $\omega_* = \omega_0 m_*^2$ . Формула (4.1) совпадает с соответствующей формулой, полученной В. В. Болотиным [1]. Для учета кратности найденные плотности достаточно удвоить. При  $\omega = \omega_*$  имеется точка сгущения частот. Частота  $\omega_*$  равна частоте собственных осесимметричных безмоментных колебаний. Особые точки у плотностей распределения собственных частот тонких оболочек были указаны впервые в [1].

В случае замкнутой сферической оболочки  $R_1 = R_2 = R$  при  $n \neq 0$  вблизи полюсов будут зоны нулевого типа, которые граничат с зоной первого типа. Уравнение для определения  $f'(x)$  оказывается биквадратным.

Решение этого уравнения будет

$$f' = \left[ \left( \frac{\rho h \omega^2}{D} - \frac{E h}{R^2} \right)^{1/2} - \frac{n^2}{r^2} \right]^{1/2}, \quad r = R \sin \frac{x}{R}$$

Из условия  $f' = 0$  находим пределы интегрирования

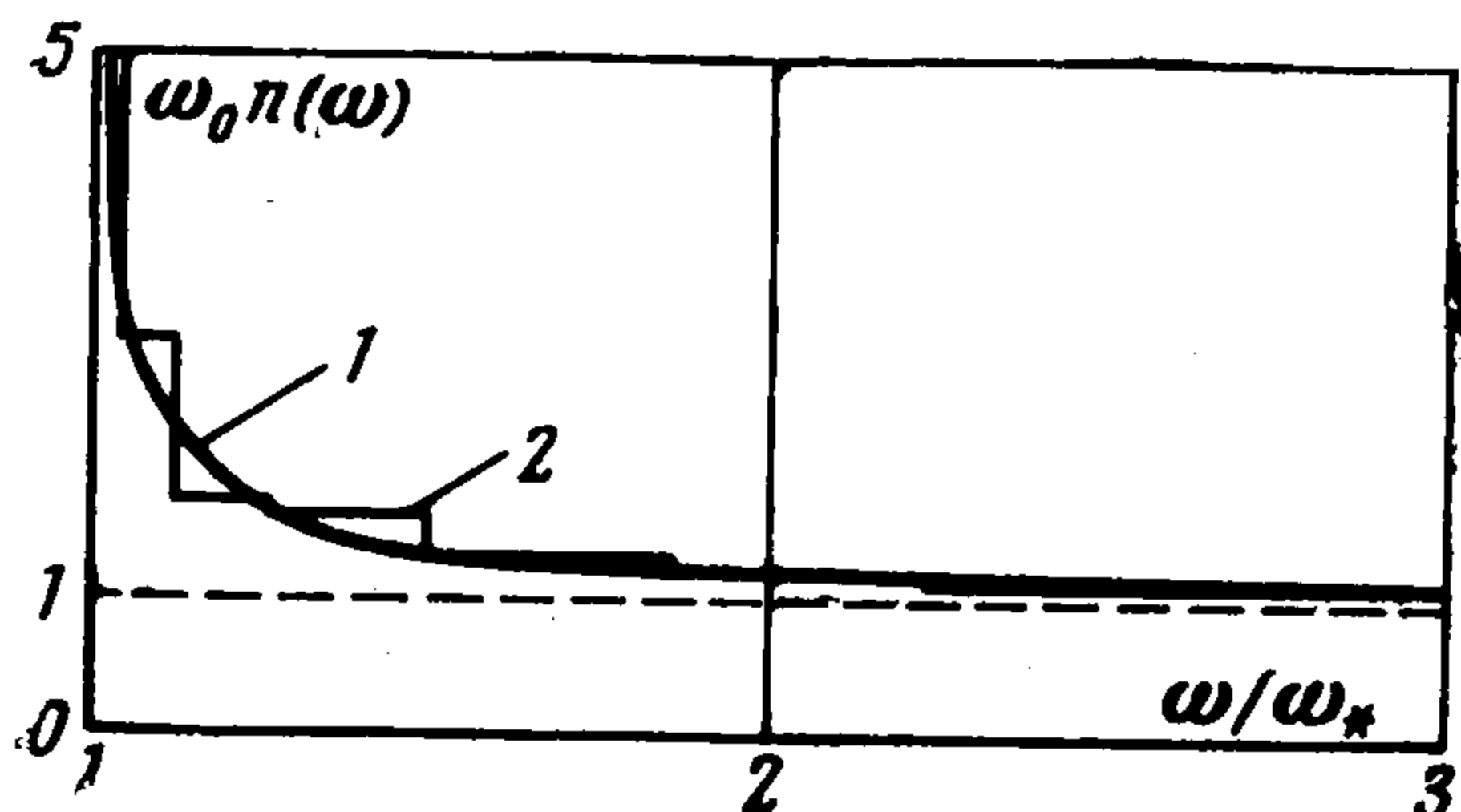
$$x_{1,2} = R \left\{ \frac{\pi}{2} \pm \left[ \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{n}{R} \left( \frac{D R^2}{\rho h^2 R^2 \omega^2 - E h} \right)^{1/4} \right] \right\}$$

Уравнение частот имеет вид

$$\int_{x_1}^{x_2} f'(x) dx = m\pi \quad (m = 1, 2, \dots)$$

Отсюда получаем приближенное выражение для частот

$$\omega = \omega_0 [(m+n)^4 + m_*^4]^{1/2}$$



Фиг. 3

Число частот  $N(\omega)$ , меньших  $\omega$ , дается формулой, учитывающей кратность частот

$$N(\omega) \approx 2 \iint_{(m+n) < (\omega^2 \omega_0^{-2} - m_*^4)^{1/4}} dm dn =$$

$$= \left( \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - m_*^4 \right)^{1/2}$$

Плотность спектра частот колебаний будет

$$n(\omega) = \frac{dN(\omega)}{d\omega} \approx \frac{\omega \omega_0^{-2}}{(\omega^2 \omega_0^{-2} - m_*^4)^{1/2}} \quad (4.2)$$

Плотность частот равна нулю при  $\omega < \omega_*$  и стремится к  $\omega_0^{-1}$  с ростом частоты. Частота  $\omega_*$  соответствует частоте безмоментных колебаний сферической оболочки. Предельное значение  $\omega_0^{-1}$  совпадает с плотностью частот для пластины площади  $4\pi R^2$ , т. е. площади всей сферической оболочки.

Формула (4.2) может быть получена также путем интегрирования плотности частот из работы [1] по площади поверхности оболочки.

На фиг. 3 приведены результаты вычислений приведенной плотности частот  $\omega_{0n}(\omega)$ . Кривая 1 получена по формуле (4.2). Кривая 2 соответствует осреднению по участкам числа частот, полученных путем точного интегрирования уравнений (1.1).

Поступила 6 V 1971

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Б о л о т и н В. В. О плотности частот собственных колебаний тонких упругих оболочек. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2.
2. В л а с о в В. З. Основные дифференциальные уравнения общей теории упругих оболочек. ПММ, 1944, т. 8, вып. 2.
3. М о и с е е в Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М., «Наука», 1969.
4. М о с к а л е н к о В. Н. О колебаниях конических оболочек. Сб. докл. Научно-техн. конференции по итогам научно-исслед. работ за 1966—1967 г. Моск. энерг. ин-т. Секц. энергомашиностроение. Подсекц. динамики и прочности машин. М., 1967.
5. Б о л о т и н В. В. Краевой эффект при колебаниях упругих оболочек. ПММ, 1960, т. 24, вып. 5.
6. К о р н е в В. М. Определение критических нагрузок и форм потери устойчивости упругих оболочек вращения. Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 2.