

## О ПЛОТНОСТИ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

П. Е. Товстик

(Ленинград)

Рассматриваются замкнутые в окружном направлении тонкие оболочки вращения с произвольной формой меридиана. При помощи асимптотического метода интегрирования [1-3] определяется плотность частот колебаний. Исследуется плотность в окрестностях точек сгущения частот. Вопрос о плотности частот колебаний тонких оболочек рассматривался в [4-7]. В [4, 5] рассматривались пологие прямоугольные в плане оболочки.

1. Исходные уравнения и их интегралы. Система трех уравнений равновесия оболочки в перемещениях [8] после введения инерционных членов и разделения переменных принимает вид

$$\begin{aligned} L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w + \lambda u &= 0 \\ L_{21}u + L_{22}v + L_{23}w + \lambda v &= 0 \quad \left( \lambda = \frac{(1-\sigma^2)\gamma\omega^2}{E} \right) \\ L_{31}u + L_{32}v + L_{33}w + \frac{h^2}{12} N_{33}w + \lambda w &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $u, v, w$  — проекции смещения на направления образующей, параллели и нормали. Линейные дифференциальные операторы  $L_{ij}, N_{33}$  зависят от переменных коэффициентов квадратичных форм срединной поверхности и от числа  $m$  волн по параллели;  $E$  — модуль Юнга,  $\sigma$  — коэффициент Пуассона,  $\gamma$  — плотность,  $\omega$  — частота колебаний.

В качестве единицы длины выбираем характерный размер срединной поверхности. Тогда толщина оболочки  $h$  будет малым числом. Вводим малый параметр  $\mu$  по формуле  $\mu^4 = h^2 / 12$ .

Основной вклад в величину плотности вносят формы колебаний с  $m \gg 1$ . Положим  $m = \mu^{-1}\rho$ , тогда все восемь интегралов системы (1.1) имеют большой показатель изменчивости (равный  $1/2$ ) и могут быть представлены в виде [1]

$$\begin{aligned} w_k(s, \mu) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n c_{nk}(s) \exp \left\{ \mu^{-1} \int_{s_k}^s q_k(t) dt \right\} \\ c_{0k}(s) &= \left( q_k^2 - \frac{\rho^2}{B^2} \right) \left( B \frac{\partial f}{\partial q_k} \right)^{-1/2} \quad (k = 1, 2, \dots, 8) \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$f(q) \equiv \left( q^2 - \frac{\rho^2}{B^2} \right)^4 - \lambda \left( q^2 - \frac{\rho^2}{B^2} \right)^2 + (1 - \sigma^2) \left( \frac{q^2}{R_2} - \frac{\rho^2}{B^2 R_1} \right)^2 = 0 \quad (1.3)$$

где  $q_k$  — корни характеристического уравнения,  $s$  — длина дуги образую-

щей,  $B(s)$  — расстояние до оси вращения,  $R_1(s)$ ,  $R_2(s)$  — главные радиусы кривизны ( $R_1$  — радиус кривизны меридиана). Считаем  $R_2 > 0$ , на знак  $R_1$  ограничений не накладываем. Другие неизвестные величины (перемещения  $u$ ,  $v$ , усилия  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $S$ ,  $N_1$ ,  $N_2$ , моменты  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $H$ ) также представляются рядами вида (1.2).

Решения (1.2) применимы в окрестностях тех точек  $s$ , в которых корни уравнения (1.3) попарно различны. Точки  $s = s_*$ , в которых  $q_k(s) = q_l(s)$ , называются точками поворота. В окрестностях этих точек решения (1.2) непригодны, ибо  $c_{0k}(s_*) = \infty$ . В [2,3] построены решения системы (1.1) в окрестностях точек поворота и найдены формулы, связывающие решения вида (1.2) при переходе через точки поворота. Результаты [2,3] используются ниже.

**2. О плотности частот при фиксированном  $m$ .** Рассмотрим оболочку, ограниченную параллелями  $s = s_1$  и  $s = s_2$ , на которых задано по четыре однородных граничных условия (в случае купола требуем ограниченности решений в вершине). Уравнением частот будет равенство нулю определителя восьмого порядка, полученного в результате подстановки линейной комбинации решений в граничные условия.

В зависимости от параметров  $m$ ,  $s$ ,  $\omega$  уравнение (1.3) может иметь разное число чисто мнимых корней. Оставляя в стороне случаи кратных корней, получим три случая, условно обозначенные через  $A_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ), где  $i$  — число пар мнимых корней. При

$$\lambda > \lambda_0 = \frac{m^4 h^2}{12B^4} + \frac{1 - \sigma^2}{R_1^2} \quad (2.1)$$

имеет место случай  $A_1$ , а при  $\lambda < \lambda_0$  — случай  $A_0$  или  $A_2$ . Если

$$\frac{m^4 h^2}{12B^4} > \frac{1 - \sigma^2}{R_1} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (2.2)$$

то случай  $A_0$  имеет место при всех  $\lambda < \lambda_0$ . В противном случае при  $\lambda_* < \lambda < \lambda_0$  имеет место случай  $A_2$ , а при  $\lambda < \lambda_*$  — случай  $A_0$ . Здесь

$$\lambda_* = \min_{\kappa \geq 0} \left\{ \frac{\rho^4 (\kappa + 1)^2}{B^4} + \frac{1 - \sigma^2}{(\kappa + 1)^2} \left( \frac{\kappa}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right) \right\} \quad (2.3)$$

Пусть  $m \gg 1$  фиксировано. В [1-3] показано, что если при всех  $s$  имеет место либо случай  $A_0$ , либо случай  $A_1$ , то уравнение частот имеет вид

$$\operatorname{tg} \left\{ \int_{D_1} \mu^{-1} |q_1(s, \omega)| ds + \varphi(\omega) \right\} = \Psi(\omega) \quad (2.4)$$

где  $q_1$  — чисто мнимый корень,  $D_1(m, \omega)$  — часть отрезка  $(s_1, s_2)$ , на которой он существует. В связи с тем, что функции  $\varphi(\omega)$  и  $\Psi(\omega)$  меняются медленно, плотность  $n(m, \omega)$  корней уравнения (2.4) равна

$$n(m, \omega) = \frac{1}{\pi \mu} \int_{D_1} \left| \frac{\partial q_1}{\partial \omega} \right| ds \quad (2.5)$$

Формула (2.5) была выведена для жестко закрепленных краев, однако имеет место и при других граничных условиях. От их вида зависят лишь функции  $\varphi$  и  $\Psi$ .

Если уравнение (1.3) имеет две пары чисто мнимых корней  $\pm q_1$  и  $\pm q_2$  (пусть  $|q_1| > |q_2|$ ), то при произвольных граничных условиях плотность  $n(m, \omega)$  найти не удалось. В случае граничных условий Навье ( $T_i = \nu = w = M_1 = 0$  при  $s = s_1, s = s_2$ ) уравнение частот распадается на два

$$\sin \left\{ \int_{D_k} \mu^{-1} |q_k(s, \omega)| ds \right\} + O(\mu) = 0 \quad (k = 1, 2) \quad (2.6)$$

где по-прежнему  $D_k$  — область существования мнимого корня  $q_k$ . Из (2.6) следует, что

$$n(m, \omega) = \frac{1}{\pi\mu} \left( \int_{D_1} \left| \frac{\partial q_1}{\partial \omega} \right| ds + \int_{D_2} \left| \frac{\partial q_2}{\partial \omega} \right| ds \right) \quad (2.7)$$

Формула (2.7) имеет место и для жестко закрепленных краев оболочки ( $u = v = w = w' = 0$ ), если  $m = O(\mu^{-1/2})$ . Действительно, если

$$R_1 R_2 < 0, \quad \lambda < (1 - \sigma^2) \min_s \{R_1^{-2}, R_2^{-2}\}$$

уравнение частот приводится к виду [1]

$$\begin{aligned} a_1 \cos \left[ \mu^{-1} \int_{s_1}^{s_2} (|q_2| - |q_1|) ds \right] &= 4 + a_2 \cos \left[ \mu^{-1} \int_{s_1}^{s_2} (|q_1| + |q_2|) ds \right] \\ q_{1,2} &= \frac{\mu m}{B} \left( \sqrt{\frac{\lambda}{1 - \sigma^2} \pm \frac{1}{R_1}} \right)^{1/2} \left( \sqrt{\frac{\lambda}{1 - \sigma^2} \pm \frac{1}{R_2}} \right)^{-1/2} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Формула (2.7) имеет место из-за того, что

$$a_1 > 4 + a_2, \quad \frac{\partial}{\partial \omega} |q_1| < 0, \quad \frac{\partial}{\partial \omega} |q_2| > 0$$

Рассмотрим случай небольших  $m = O(1)$  (в том числе  $m = 0$ ). Граничные условия произвольны. Положим

$$b(s, \omega) = \lambda - (1 - \sigma^2) R_2^{-2}, \quad \lambda^- = \min_s \left\{ \frac{1 - \sigma^2}{R_2^2} \right\}, \quad \lambda^+ = \max_s \left\{ \frac{1 - \sigma^2}{R_2^2} \right\}$$

Тогда при  $\lambda > \lambda^+$  плотность равна [1]

$$n(m, \omega) = \frac{1}{\pi\mu} \frac{\partial}{\partial \omega} \int_{s_1}^{s_2} b^{1/4} ds \quad (2.9)$$

а при выполнении условий  $\lambda^- < \lambda < \lambda^+$ ,  $R_2'(s) \neq 0$  ( $s_1 \leq s \leq s_2$ ) плотность определяется по формуле (2.9), в которой интегрирование нужно проводить по части промежутка  $(s_1, s_2)$ , где  $b \geq 0$ . Из (2.9) следует, что при  $\lambda > \lambda^-$  плотность возрастает с уменьшением толщины  $h$ . При  $\lambda < \lambda^- - \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$  число частот практически не зависит от  $h$ , поэтому считаем, что  $n(m, \omega) \approx 0$  при  $\lambda < \lambda^-$ .

3. Плотность частот в общем случае. Плотность  $n(\omega)$  равна

$$n(\omega) = n(0, \omega) + 2 \sum_{m \neq 0} n(m, \omega) \quad (3.1)$$

(плотности  $n(m, \omega)$  найдены в п. 2). Множитель два в (3.1) появляется из-за того, что при  $m \neq 0$  каждому корню уравнения частот соответствуют две формы колебаний ( $w(s) \cos m\varphi$  и  $w(s) \sin m\varphi$ , где  $\varphi$  — долготный угол).

Будем считать приближенно, что плотность  $n(m, \omega)$  определяется по формуле (2.7) при всех  $m$  (формулу (2.5) рассматриваем как частный случай (2.7)). При этом для слагаемых с  $m = 0$  (1) будет сделана ошибка, порядок которой оценивается ниже. Получим

$$n(\omega) = \frac{2}{\pi\mu} \sum_m \left( \int_{D_1} \left| \frac{\partial q_1}{\partial \omega} \right| ds + \int_{D_2} \left| \frac{\partial q_2}{\partial \omega} \right| ds \right) \quad (3.2)$$

Введем обозначения

$$q = i \frac{\mu m r}{B}, \quad D = \frac{E h^3}{12(1-\sigma^2)}, \quad \omega_k(s) = \left( \frac{E}{\gamma} \right)^{1/2} \frac{1}{R_k(s)} \quad (k=1, 2), \quad \chi = R_2 R_1^{-1} \quad (3.3)$$

( $\omega_1 < 0$  при  $R_1 < 0$ ). Тогда (1.3) можно переписать в виде

$$\Phi(r, s, m, \omega) = \frac{D m^4}{\gamma h B^4} (r^2 + 1)^4 - \omega^2 (r^2 + 1)^2 + (\omega_2 r^2 + \omega_1)^2 = 0 \quad (3.4)$$

В (3.2) приближенно заменим суммирование по  $m$  интегрированием

$$n(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \int_0^{m_1} \frac{m r_1}{B} dm - \int_{m_2}^{m_1} \frac{m r_2}{B} dm \right) ds \quad (3.5)$$

где  $r_k(s, m, \omega)$  — положительные корни (3.4) ( $r_1 \geq r_2$ ). Пределы интегрирования определяют области (может быть, пустые) существования этих корней. Величина  $dr_2 / d\omega < 0$ , поэтому в (3.5) стоит минус. Пользуясь тождеством

$$\frac{\partial r}{\partial \omega} = \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial m} \right)^{-1} \frac{\partial r}{\partial m} \quad (3.6)$$

приведем (3.5) к виду

$$n(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{s_1}^{s_2} B (\gamma h D^{-1})^{1/2} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{\infty} [\omega^2 (r^2 + 1)^2 - (\omega_2 r^2 + \omega_1)^2]^{-1/2} \omega dr \right\} ds \quad (3.7)$$

где  $\operatorname{Re}\{z\}$  — вещественная часть числа  $z$ . Из (3.7) получаем

$$n(\omega) = \frac{1}{2} \int_{s_1}^{s_2} B (\gamma h D^{-1})^{1/2} G(\omega, s) ds \quad (3.8)$$

$$G = \begin{cases} \frac{2}{\pi} H(\omega, s) F[k(\omega, s)] & \text{при } R_1(s) \neq R_2(s) \\ (1 - a_1^{-2})^{-1/2} & \text{при } R_1(s) = R_2(s) \end{cases} \quad (3.9)$$



При переходе от (3.1) к (3.2) были отброшены члены вида (2.9). Порядок допускаемой при этом ошибки определяется отношением плотностей (2.9) и (3.11)

$$n(m, \omega) / n_0 = O(\mu) = O[(h/R)^{1/2}] \quad (3.13)$$

где  $R$  — характерный размер срединной поверхности.

Можно предположить, что с той или иной степенью точности формула (3.8) имеет место во всех случаях независимо от частоты  $\omega$ , вида граничных условий и формы срединной поверхности. Однако обоснована (3.8) не всегда.

Формула (3.8) была получена из (2.7), которая доказана при всех  $m$  в следующих случаях:

- 1) для любых  $\omega$  и граничных условий, если  $0 \leq \chi(s) < 1$ ;
- 2) для любых граничных условий и оболочек любой формы, если выполнено одно из неравенств

$$\omega < \omega_- = \min_s \{\omega_1, \omega_2\}, \quad \omega > \omega_+ = \max_s \{\operatorname{Re}(\omega_2 \sqrt{2\chi^2 - \chi})\}$$

- 3) для любых  $\omega$  и оболочек любой формы, если имеют место граничные условия Навье.

В случаях 1) и 2) уравнение (1.3) имеет при всех  $s$  не более одной пары чисто мнимых корней, и для вычисления плотности используется (2.5). Во всех остальных случаях уравнение (1.3) имеет при некоторых  $m$ ,  $s$  две пары чисто мнимых корней, и формула (2.7) обоснована лишь для граничных условий Навье. Как и в [10], будем говорить, что в этих случаях имеет место вырождение краевого эффекта. Последнее обстоятельство затрудняет обоснование формулы для плотности при  $\omega < \omega_+$  как для оболочек вращения, так и для пологих прямоугольных в плане оболочек [6]. Если  $B$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  постоянны, неравенство  $\omega < \omega_+$  лишь обозначениями отличается от неравенства (8) из [6].

Обсудим (3.8) с другой точки зрения. В [4, 5] отмечено, что  $G(s, \omega)$  обращается в бесконечность при  $\omega = \max\{\omega_1, \omega_2\}$  в случае  $\chi \geq 0$  и при  $\omega = -\omega_1$ ,  $\omega = \omega_2$  в случае  $\chi < 0$ . Для оболочки вращения  $G(s, \omega)$  получается при вычислении внутреннего интеграла в (3.7). Он несобственный и расходится при указанных выше значениях  $\omega$  либо при  $r = 0$  (в случае  $\omega = |\omega_1|$ ), либо при  $r = \infty$  (в случае  $\omega = \omega_2$ ). Из (3.3) имеем  $q/\mu = imrB^{-1}$ . Следовательно, при  $r = 0$  интеграл (1.2) не является интегралом с большим показателем изменчивости, и вблизи  $r = 0$  метод построения уравнения частот становится неточным.

При  $r = \infty$  имеем  $m = 0$ ; при выводе (3.8) предполагалось, что основной вклад вносят слагаемые с  $m = O(\mu^{-1})$ , а в данном случае это не так.

Итак, в обоих случаях бесконечные разрывы  $G(s, \omega)$  являются следствием несовершенств метода. В том случае, когда  $R_1(s)$  и  $R_2(s)$  отличны от констант, после интегрирования в (3.8) разрывы исчезают, и формула (3.8), по-видимому, должна давать удовлетворительные результаты.

Ниже рассмотрены случаи, когда (3.8) дает бесконечные разрывы, и получены выражения для плотности, более точные, чем (3.8). При этом в окрестностях точек сгущения частот основной вклад дают формы с  $m = O(\mu^{-2/3})$ .

В силу (3.13) вклад форм с  $m = O(1)$  мал.

Случай  $m = O(\mu^{-t})$  ( $1 < t < 2$ ) может быть получен из рассмотренного случая  $m = \mu^{-1}\rho$  при  $\rho \gg 1$  и соответствует частотам, для которых плотность близка к плотности Куранта.

4. Сферическая оболочка. Для сферической оболочки радиуса  $R_1$  формула (3.8) дает

$$\frac{n(\omega)}{n_0} = \begin{cases} 0, & \omega < \omega_1 = (E/\gamma)^{1/2} R_1^{-1} \\ [1 - (\omega_1/\omega)^2]^{-1/2}, & \omega > \omega_1 \end{cases} \quad (4.1)$$

Для пологой прямоугольной в плане оболочки (4.1) получена в [4,5]. Ниже в окрестности точки сгущения частот  $\omega = \omega_1$  рассматривается оболочка, ограниченная двумя параллелями, в форме купола или замкнутая оболочка.

В [11] получена формула для определения частот вида (2.4), откуда находим

$$n(m, \omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \omega} \int_{D_1} \left( p_1 - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right)^{1/2} d\theta \quad (4.2)$$

где  $\theta$  — широтный угол на сфере ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ),  $D_1$  — часть интервала  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ , на которой подкоренное выражение неотрицательно,  $p_1$  — положительный корень уравнения

$$\begin{aligned} \mu_1^4 p^3 + (1 - \sigma^2 - \lambda_1) (p - 2 - \lambda_1) - (1 + \sigma) (2 + \sigma) \lambda_1 &= 0 \\ (\lambda_1 = \lambda R_1^2, \mu_1^4 = h^2 / (12 R_1^2)) & \end{aligned} \quad (4.3)$$

Как и в п. 3, суммируя по  $m$ , находим

$$n(\omega) = \frac{S}{4\pi R_1^2} \frac{dp_1}{d\omega}, \quad S = 2\pi R_1^2 (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \quad (4.4)$$

Для замкнутой сферы та же формула может быть получена и путем прямого подсчета числа ограниченных в полюсах решений, соответствующих частотам, меньшим  $\omega$ .

Приближенное представление  $p_1(\omega)$  при  $\omega \approx \omega_1$  и  $\omega > \omega_1$  дается параметрическими формулами [11]

$$\begin{aligned} p_1 = \mu_1^{-4/3} y, \quad \omega^2 = \omega_1^2 \left[ 1 + \frac{\mu_1^{4/3} (y^3 - c)}{(1 - \sigma^2) y} \right] \\ (c = (1 + \sigma) (2 + \sigma) (1 - \sigma^2)) \end{aligned} \quad (4.5)$$

где параметр  $y$  меняется в пределах  $0 < y < \infty$ . Тогда (4.4) дает

$$\frac{n(\omega)}{n_0} = f(y) = \frac{y^2}{y^3 + c/2} [(1 - \sigma^2) \mu_1^{-4/3} + (y^3 - c) y^{-1}]^{1/2} \quad (4.6)$$

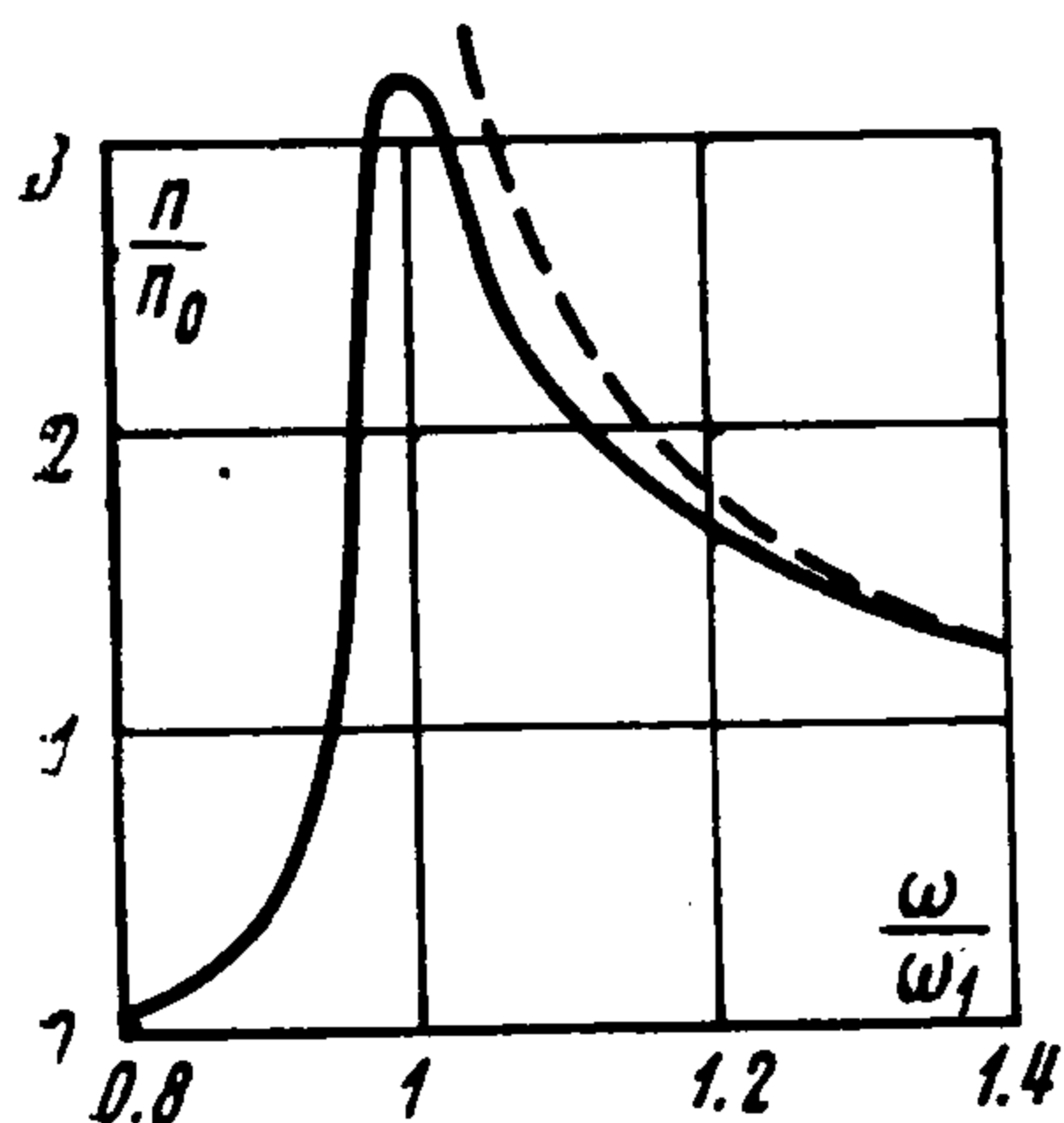
При  $\omega = \omega_1$  коэффициент концентрации  $f(y)$  максимален

$$f_+ = \max \{f(y)\} = (12 R_1^2 / h^2)^{1/6} 2^{2/3} (1 - \sigma^2)^{1/2} c^{-1/3} \quad (4.7)$$

а при  $\omega \rightarrow \infty$  имеем  $y \rightarrow \infty$  и  $f(y) \rightarrow 1$ , т. е. в пределе получается плотность Куранта.

При  $R_1/h = 100$ ,  $\sigma = 0.3$  имеем  $f_+ = 3.2$ , а функция  $f(y)$  показана на фиг. 2 сплошной линией (пунктир — (4.1)).

5. Цилиндрическая оболочка. У цилиндрической оболочки радиуса  $R_2$  при  $\omega = \omega_2$  плотность имеет бесконечный разрыв вида  $n(\omega) = O(\ln|\omega - \omega_2|)$  [4,5]. Тот же результат следует и из (3.8).



Фиг. 2

Более детально плотность в окрестности  $\omega = \omega_2$  исследована в [7], где показано, что максимальный коэффициент концентрации имеет порядок

$$n(\omega) / n_0 = O[\ln(R_2 / h)] \quad (5.1)$$

В [5] было проведено «экспериментальное» построение плотности  $n(\omega)$  для цилиндрической и сферической оболочек. Полученные результаты качественно согласуются с (5.1) и (4.7).

6. Торoidalная оболочка. Рассмотрим часть тора, образованную вращением вокруг оси дуги окружности радиуса  $-R_1$  ( $R_1 < 0$ ) и имеющую отрицательную гауссову кривизну. Из (3.8) следует, что при  $\omega = -\omega_1$  плотность  $n(\omega) = \infty$ .

При  $\omega = -\omega_1$  из (2.8) получаем  $q_1(s) \equiv 0$ , что говорит о существовании у системы (1.1) интегралов с небольшим показателем изменяемости. Построим их. Пусть

$$R_2 < -R_1, \quad 1 \ll m \ll \mu^{-1}, \quad \lambda = (1 - \sigma^2) / R_1^2 + \lambda_2 / m^2 \quad (6.1)$$

Тогда два решения системы (1.1) можно представить в виде рядов по степеням  $m^{-1}$

$$\begin{aligned} u(s) &= \frac{1}{m^2} \left( B \frac{d}{ds} \left( \left( \frac{1}{R_1} + \frac{\sigma}{R_2} \right) \frac{y}{B} \right) - \frac{2(1+\sigma)}{R_1} \frac{dy}{ds} \right) + O\left(\frac{1}{m^3}\right) \\ v(s) &= \frac{1}{m} \left( \frac{1}{R_2} + \frac{\sigma}{R_1} \right) y + O\left(\frac{1}{m^2}\right), \quad w(s) = \frac{y}{B} + O\left(\frac{1}{m}\right) \end{aligned} \quad (6.2)$$

где  $y(s)$  удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} y'' + g(s, \omega) y &= 0, \quad g = m^6 h^2 g_1 - m^2 (\lambda - (1 - \sigma^2) R_1^{-2}) g_2 - g_3 \\ g_1(s) &= \frac{R_1^2 R_2}{24(1 - \sigma^2) B^6 (R_2 - R_1)}, \quad g_2(s) = 12B^4 g_1(s) \\ g_3(s) &= \frac{3R_1^2 + (3\sigma - 1) R_1 R_2 + \sigma^2 R_2^2}{2R_1^2 R_2 (R_2 - R_1)} - \left( \frac{B'}{B} \right)^2 \end{aligned} \quad (6.3)$$

Считаем  $m = O(h^{-1/3})$ , тогда  $g = O(1)$ . Остальные шесть интегралов (1.1) имеют большой показатель изменяемости [1]. Два из них имеют показатель  $1/3$  и осциллируют, а четыре — показатель  $1/2$  и имеют характер интегралов краевого эффекта.

В случае граничных условий Навье частотное уравнение в первом приближении распадается на произведение двух уравнений, первое из которых приводит к краевой задаче

$$y'' + g(s, \omega) y = 0, \quad y(s_1) = y(s_2) = 0 \quad (6.4)$$

а второе дает

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{m}{B} \left( \frac{\omega - \omega_1}{\omega_2 - \omega} \right)^{1/2} ds = k\pi \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (6.5)$$

Найдем  $n(-\omega_1)$ . Здесь нет единой формулы, пригодной для всех  $m$ . Для решений с большим показателем изменчивости будем пользоваться формулой (3.7), а с небольшим — формулами (6.4) и (6.5). Результаты сложим

$$n(\omega) = n_1(\omega) + n_2(\omega) + n_3(\omega) \quad (6.6)$$

Воспользуемся (3.7) при  $\omega = -\omega_1$  ( $r \gg r_0 > 0$ )

$$n_1(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{s_1}^{s_2} \left( \frac{\gamma h B^2 R_2^2}{D(R_1^2 - R_2^2)} \right)^{1/2} \int_{r_0}^{b_2} \frac{dr}{r(b_2^2 - r^2)^{1/2}} ds \quad \left( b_2^2 = -\frac{2R_2}{R_1 + R_2} \right) \quad (6.7)$$

Как и в п. 2,3, из (6.4) находим

$$n_2(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_{s_1}^{s_2} \int_{m_1}^{m_2} \left| \frac{\partial}{\partial \omega} g^{1/2} \right| dm ds \quad (6.8)$$

где предел  $m_1$  находим из условия  $g \geq 0$ , а предел  $m_2$  — из условия, чтобы промежуток интегрирования в (6.8) охватывал область  $r < r_0$ , пропущенную в (6.7)

$$m_1^6 = \frac{g_3}{h^2 g_1}, \quad g = \left( \frac{m_2 r_0}{B} \right)^2, \quad m_2^4 = \frac{r_0^2}{B^2 h^2 g_1} + \frac{g_3}{m_2^2 h^2 g_1} \quad (6.9)$$

При  $r_0^2 \gg m^{-2}$  вторым слагаемым в выражении для  $m_2^4$  можно пренебречь. Число  $m$  попадает в область  $m \ll \mu^{-1}$  при  $r_0 \ll 1$ .

Из (6.8) при  $\omega = -\omega_1$  находим

$$n_2(\omega) = \frac{1}{3\pi} \int_{s_1}^{s_2} \left( \frac{2\gamma h R_2 B^2}{D(R_2 - R_1)} \right)^{1/2} \ln \left[ \left( \frac{m_2}{m_1} \right)^3 + \left( \left( \frac{m_2}{m_1} \right)^6 - 1 \right)^{1/2} \right] ds \quad (6.10)$$

Наконец, убеждаемся, что при  $r_0 < 1$  уравнение (6.5) не дает вклада в области  $r < r_0$ , т. е.  $n_3(\omega) = 0$ .

Если  $(m_2/m_1)^3 \gg 1$ , выражение (6.10) упрощается и в сумме с (6.7) дает

$$n(-\omega_1) = \frac{1}{4\pi} \int_{s_1}^{s_2} \left( \frac{2\gamma h R_2 B^2}{D(R_2 - R_1)} \right)^{1/2} \ln \left( \frac{16R_2 2^{1/3}}{B^2 |R_1 + R_2| (h^2 g_1 g_3^2)^{1/3}} \right) ds \quad (6.11)$$

При получении (6.11) были отброшены величины порядка  $r_0^2$  по сравнению с единицей. В результате при  $\mu^{2/3} \ll r_0 \ll 1$  плотность не зависит от  $r_0$ , что говорит о существовании области значений  $r$ , в которой интегралы (1.2) и (6.2) пригодны одновременно. В данном случае коэффициент концентрации плотности имеет порядок  $\ln |R_1/h|$ .

Рассмотрим пример. Пусть

$$R_1 = -R, R = 100h, B = R(1.3 - \cos \theta), |\theta| \leq \pi/6, \sigma = 0.3$$

Тогда формула (6.11) дает  $n/n_0 = 5.0$ .

Поступила 22 VI 1971

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Т о в с т и к П. Е. Интегралы системы уравнений неосесимметричных колебаний тонкой оболочки вращения. В сб.: Исследования по упругости и пластичности, сб. 5. Изд-во ЛГУ, 1966.
2. Т о в с т и к П. Е. О спектре частот колебаний оболочек вращения с большим числом волн по параллели в особом случае. В сб.: Исследования по упругости и пластичности, сб. 5. Изд-во ЛГУ, 1966.
3. Т о в с т и к П. Е. О спектре частот колебаний оболочек вращения с большим числом волн по параллели. Тр. 6-ой Всес. конф. по теории оболочек и пластин (Баку, 1966), М., «Наука», 1967.
4. Б о л о т и н В. В. О плотности частот собственных колебаний тонких упругих оболочек. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2.
5. B o l o t i n V. V. The density of eigenvalues in vibration problems of elastic plates and shells. Warsaw, Proc. vibration problems, 1965, vol. 6, No 4.
6. Г о л ь д е н в е й з е р А. Л. О плотности частот колебаний тонкой оболочки. ПММ, 1970, т. 34, вып. 5.
7. С к у ч и к Е. Простые и сложные колебательные системы. М., «Мир», 1971.
8. Г о л ь д е н в е й з е р А. Л. Некоторые математические проблемы линейной теории упругих тонких оболочек. Успехи матем. н., 1960, т. 15, вып. 5.
9. К у р а н т Р., Г и л ь б е р т Д. Методы математической физики, т. 1. М.—Л., Гостехиздат, 1951.
10. Б о л о т и н В. В. Краевой эффект при колебаниях упругих оболочек. ПММ, 1960, т. 24, вып. 5.
11. Т о в с т и к П. Е. Свободные колебания тонкого сферического купола. В сб.: Исследования по упругости и пластичности, сб. 6. Изд-во ЛГУ, 1967.