Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 539.3

# КРАЕВАЯ ЗАДАЧА АСИММЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В КВАЗИКЛАССИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Э. Л. Аэро

(Ленинград)

Рассматривается статическая краевая задача асимметрической теории упругости для сред, моментные эффекты в которых дают малый вклад в упругую энергию. Коэффициенты упругости в уравнениях равновесия, имеющие размерность квадрата длины, принимаются малыми по сравнению с квадратами характерных размеров тела. Получено решение уравнений равновесия, содержащее малые параметры при старших производных. Методом приближений построено решение для поля смещений и поворотов в виде суммы их классических пределов и моментных членов, имеющих вид функций погранслоя. Рассмотрены граничные условия кинематического типа, разработана схема их удовлетворения методом последовательных приближений.

Большинство сред, вязкоупругое поведение которых описывается в рамках асимметрической континуальной механики (жидкие кристаллы, ферромагнетики, в ряде случаев — дислокационные среды и суспензии) характеризуются малым вкладом моментных членов в общий энергетический баланс процессов деформирования и течения. Однако без учета моментных взаимодействий невозможна трактовка целого ряда тонких особенностей их упруговязкого поведения (эффекты упругого искажения поля направлений осей молекулярной ориентации в жидких кристаллах, возникновение спиновых волн в ферромагнетиках, эффекты упрочнения при пластическом деформировании, особенности течения крови и др.). В связи с этим возникает задача анализа упрощений, вводимых в асимметрической механике при рассмотрении слабомоментных сред.

Ниже рассматриваются упругие изотропные среды, характеризуемые дополнительными коэффициентами вращательной $\gamma$ и моментной упругости $\eta$, $\tau$, $\theta$ [1]. Энергетический вклад моментных членов в упругий потенциал определяется отношением этих коэффициентов к модулям классической упругости $\lambda$, $\mu$. Если эти отношения малы (в некотором смысле, который будет уточнен далее), то среда будет называться слабомоментной. Для таких сред анализируется краевая задача асимметрической теории упругости.

**1. Постановка задачи.** Уравнения равновесия в компонентах перемещений $\mathbf{U}$ и поворотов $\mathbf{\Omega}$ для изотропной негиротропной среды можно записать в виде [2]

$$\begin{gathered}(\lambda + 2\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{U} - (\mu - \gamma)\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{U} - 2\gamma\operatorname{rot}\mathbf{\Omega} = 0 \\ (\eta + \tau + \theta)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{\Omega} - \theta\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{\Omega} + 2\gamma\mathbf{\Omega} - \gamma\operatorname{rot}\mathbf{U} = 0\end{gathered} \tag{1.1}$$

Для краткости внешние объемные силы и моменты не рассматриваются. Ограничимся анализом лишь граничных условий кинематического типа: на границе $S$ односвязной области $V$ заданы смещения и повороты как функции координат $q_2$, $q_3$ граничной поверхности

$$\mathbf{U}\,|_s = \mathbf{V}(q_2, q_3), \qquad \mathbf{\Omega}\,|_s = \mathbf{G}(q_2, q_3) \tag{1.2}$$

Систему (1.1) удобно представить в приведенной форме [2]

$$(\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{U}^* - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{U}^* = 0 \tag{1.3}$$

$$k_1^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{\Omega}^* - k_2^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{\Omega}^* - \boldsymbol{\Omega}^* = 0 \tag{1.4}$$

Здесь

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}^* - m^2 \operatorname{rot} \boldsymbol{\Omega}^*, \qquad \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}^* + {}^1/_2 \operatorname{rot} \mathbf{U}^*$$

$$k_1^2 = -(2\gamma)^{-1}(\eta + \tau + \theta), \qquad k_2^2 = -(2\mu\gamma)^{-1}\theta(\mu - \gamma), \quad m^2 = \theta / \mu \tag{1.5}$$

Граничные условия (1.2) для новых неизвестных функций $\mathbf{U}^*$, $\boldsymbol{\Omega}^*$ примут вид

$$(\mathbf{U}^* - m^2 \operatorname{rot} \boldsymbol{\Omega}^*)|_S = \mathbf{V}, \qquad (\boldsymbol{\Omega}^* + {}^1/_2 \operatorname{rot} \mathbf{U}^*)|_S = \mathbf{G} \tag{1.6}$$

Отметим, что уравнение (1.3) совпадает с уравнением равновесия классической теории упругости

Уравнения равновесия асимметрической теории в приведенной форме 1.3), (1.4) и граничные условия (1.6) содержат три положительных [2] коэффициента $k_1^2$, $k_2^2$, $m^2$, представляющих собой отношения упругих модулей $\mu$, $\gamma$, $\eta$, $\tau$, $\theta$ и имеющих размерность квадрата длины. Действительные величины $k_1$, $k_2$, $m$ можно назвать характеристическими для данной среды длинами. Они служат мерой отклонения смещений и поворотов от их классических пределов и позволяют количественно определить слабомоментную среду.

Для введения соответствующих безразмерных параметров рассмотрим два характерных для данной краевой задачи линейных масштаба — масштаб изменения линейных размеров $v^\circ$ тела (например смещений какой-либо характерной точки тела) и пространственный масштаб $l$. Последним может служить характерный размер тела или области неоднородности поля напряжений. Тогда относительные величины $\mathbf{U}^* / v^\circ$, $\boldsymbol{\Omega}^*$ будут функциями следующих безразмерных аргументов: $x / l$, $y / l$, $z / l$, $\Gamma$, $\mu / \lambda$, $k_1^2 / l^2$, $k_2^2 / l^2$, $m^2 / lv^\circ$, где $\Gamma$ — совокупность безразмерных параметров, связанных с геометрией области $V$.

Слабомоментную среду можно определить условиями малости безразмерных параметров

$$k_1^2 / l^2, \quad k_2^2 / l^2, \qquad m^2 / lv^\circ \ll 1 \tag{1.7}$$

Действительно, при обращении этих величин в нуль из (1.4), (1.5) видно, что поле смещений точно равно своему классическому пределу, а повороты совпадают с вихрем этого поля. Однако второе граничное условие (1.6) в зависимости от вида функции $\mathbf{G}$ может не вырождаться в классическое соотношение при стремлении параметров (1.7) к нулю. Кроме того, как показано ниже, уравнение (1.4) имеет решения, не обращающиеся в нуль при таком предельном переходе. Это вырождение моментных эффектов при остаточных явлениях на границе области назовем квазиклассическим приближением в асимметрической теории, которое и будет исследоваться в дальнейшем.

Начнем исследование краевой задачи (1.3), (1.4), (1.6) при малых значениях параметров (1.7) с анализа уравнения (1.4) и далее — граничных условий (1.6). Решение этого уравнения можно свести [2] к решению скалярного и векторного уравнений Клейна — Гордона

$$k_1^2\nabla^2\varphi - \varphi = 0, \qquad k_2^2\nabla^2\mathbf{\Phi} - \mathbf{\Phi} = 0 \tag{1.8}$$

и представить в виде

$$\Omega^* = \mathbf{\Phi} + k_1^2 \operatorname{grad}\varphi, \qquad \operatorname{div}\mathbf{\Phi} = 0 \tag{1.9}$$

**2. Решение уравнения Клейна — Гордона с малым параметром при старшей производной.** Рассмотрим скалярное уравнение (1.8), из которого будет далее получено решение и векторного уравнения. Это уравнение содержит малый параметр $k_1$ при старшей производной, поэтому его решение не может быть представлено в виде степенного ряда по $k_1$ с равномерной сходимостью во всей области, включая границу. Решение следует искать в форме асимптотического ряда по функциям типа погранслоя [3,4].

Удобно представить решение первого уравнения (1.8) в виде

$$\varphi = \chi^+ \exp(k_1^{-1}\Delta q) + \chi^- \exp(-k_1^{-1}\Delta q) \tag{2.1}$$

где $\Delta q$ — расстояние от границы до данной точки, отсчитанное в направлении внешней нормали. Множители $\exp(k_1^{-1}\Delta q)$, $\exp(-k_1^{-1}\Delta q)$ — стандартные функции погранслоя для внутренней и внешней областей соответственно. По определению, они равны единице на границе ($\Delta q = 0$) при любых значениях $k_1$, включая и нуль. Функции $\chi^+$, $\chi^- = \chi(k_1, x, y, z)$ определяются методом последовательных приближений из (1.8) и обычно имеют вид асимптотических рядов по функциям погранслоя. Для их построения подбирается представление дифференциального уравнения в малой окрестности границы, дающее сходящийся иттерационный процесс [3].

Ниже предлагается представление первого уравнения (1.8) в конечной окрестности границы. Оно не только дает сходящийся процесс приближений, но и позволяет получить $\chi^+$, $\chi^-$ в виде не асимптотических, а степенных рядов по $k_1$. Это представление получается в так называемых «слоевых» криволинейных координатах $q_1$, $q_2$, $q_3$.

Построим в окрестности границы семейство поверхностей, эквидистантных по отношению к поверхности $S$. На последней определим ортогональную систему поверхностных криволинейных координат $q_2$, $q_3$ и построим координатные линии $q_1$, ортогональные семейству.

Очевидно, координатные линии $q_1$ — прямые. Коэффициенты Ляме $H_1 = 1$, $H_2 = H_2(q_1, q_2, q_3)$, $H_3 = H_3(q_1, q_2, q_3)$. Кроме того

$$\operatorname{grad}\Delta q = \mathbf{e}_1 \tag{2.2}$$

где $\mathbf{e}_1$ — орт координатной линии $q_1$, имеющий на границе направление внешней нормали. Орты координатных линий $q_2$, $q_3$ обозначим $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

Подставим теперь (2.1) в первое уравнение (1.8). С учетом (2.2) получим систему двух сопряженных уравнений для функций $\chi^+$, $\chi^-$

$$k_1\nabla^2\chi^+ + \frac{2}{H}\frac{\partial H\chi^+}{\partial q_1} = 0, \quad k_1\nabla^2\chi^- - \frac{2}{H}\frac{\partial H\chi^-}{\partial q_1} = 0 \quad (H = \sqrt{H_2H_3}) \tag{2.3}$$

Существенно, что решения этих уравнений обладают равномерной сходимостью по $k_1$ во всей области, включая границу.

Это видно из того, что при $k_1 = 0$ у системы (2.3) не происходит потери граничных условий, как это имеет место в случае уравнений, дающих решение типа погранслоя [3]. Действительно, при $k_1 = 0$ из (2.3) получаем систему двух уравнений первого порядка, характеристики которых нормальны к границе. Поэтому $\chi^+$, $\chi^-$ содержат по одной произвольной функции координат границы $q_2$, $q_3$. При помощи этих функций, как будет показано ниже, можно удовлетворить всем граничным условиям уравнения Клейна — Гордона.

Система (2.3) представляет первое уравнение (1.8) в конечной окрестности границы — «слоевой» зоне. Вообще говоря, рассматриваемые координаты не могут быть введены во всей области, безотносительно к геометрии ее границы, так как координатные прямые не должны пересекаться в пределах области. Зона, в которой эти пересечения отсутствуют (слоевая зона), в ряде случаев имеет ограниченную ширину, которая для гладких выпуклых поверхностей не должна превышать минимального положительного радиуса кривизны поверхности. Для негладких поверхностей необходимо исключать окрестности ребер.

Несмотря на ограниченность слоевой зоны, решение $\varphi$ первого уравнения (1.8) может быть распространено на всю область с учетом свойств решения типа погранслоя. Особенно просто это достигается в том случае, когда ширина погранслоя существенно меньше ширины $Q$ слоевой зоны

$$k_1 / Q, \qquad k_2 / Q \ll 1 \tag{2.4}$$

Асимптотические множители в (2.1) за пределами слоевой зоны ($|\Delta q| > Q$) могут быть приняты равными нулю. Тогда соотношение (2.1) с функциями $\chi^+$, $\chi^-$, найденными из (2.3), дает решение первого уравнения (1.8) во всей области.

Условие (2.4) для слабомоментных сред выполняется, как правило, с запасом (для ферромагнетика $k_I \sim 10^{-5}$ *см*). В противном случае их следует рассматривать в качестве дополнительных ограничений на геометрию границы.

Займемся теперь нахождением функций $\chi^+$, $\chi^-$. Представим их в соответствии с предыдущим утверждением в виде степенных рядов по $k_1$

$$\chi^\pm = \sum_{n=0}^{N} k_1{}^n\chi_n{}^\pm \tag{2.5}$$

Подставив эти ряды в (2.3), получим для $\chi_n{}^+$, $\chi_n{}^-$ цепочки уравнений

$$\frac{2}{H}\frac{\partial H\chi_n{}^\pm}{\partial q_1} = \mp\nabla^2\chi_{n-1}^\pm \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2.6}$$

Здесь и в дальнейшем верхние знаки соответствуют функции $\chi^+$, нижние — функции $\chi^-$.

Их решение дается рекуррентными формулами

$$\chi_n{}^\pm = \frac{1}{2H}\left(a_n^\pm \mp \int H\nabla^2\chi_{n-1}^\pm dq_1\right) \qquad (\chi_{-1}^\pm = 0) \tag{2.7}$$

Здесь $a_n^+$, $a_n^-$ — произвольные функции граничных координат $q_2$, $q_3$, определяемые из граничных условий.

Рассмотрим для простоты граничные условия Дирихле

$$\varphi\,|_s = \varphi^s(q_2, q_3) \tag{2.8}$$

вместе с условиями ограниченности в нуле для внутренней и на бесконечности — для внешней задачи. Тогда из (2.1) получаем для внутренней задачи

$$\chi^- = 0, \qquad \chi^+\,|_s = \varphi^s \qquad (\Delta q \leqslant 0) \tag{2.9}$$

для внешней задачи

$$\chi^+ = 0, \qquad \chi^-\,|_s = \varphi^s \qquad (\Delta q \geqslant 0) \tag{2.10}$$

Удовлетворяя этим граничным условиям в каждом из приближений при помощи (2.7), получим

$$\chi_0^+ = \chi_0^- = \frac{H^s}{H}\varphi^s, \qquad \chi_{n+1}^+ = \chi_{n+1}^- = \frac{1}{2H}\int\limits_0^{\Delta q} H\nabla^2\chi_n^{\pm}dq_1 \tag{2.11}$$

Эти выражения можно записать в виде

$$\chi_n^+ = \chi_n^- = \frac{1}{H}R^n\varphi^s H^s, \quad R\varphi^s H^s = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\Delta q} H\nabla^2(H^{-1}\varphi^s H^s)\,dq_1 \tag{2.12}$$

$$(R^\circ\varphi^s H^s = \varphi^s H^s)$$

где $R^n$ — $n$-я степень оператора $R$.

Подставим эти формулы в (2.5) и найдем функции $\chi^+$, $\chi^-$

$$\chi^+ = \chi^- = \frac{1}{H}\left(\sum_{n=0}^{\infty} k_1{}^n R^n\right)\varphi^s H^s = \frac{1}{H}(1 - k_1R)^{-1}\varphi^s H^s \qquad (H^s = H\,|_s) \tag{2.13}$$

Явного выражения для оператора $(1 - k_1R)^{-1}$ не имеется, поэтому следует пользоваться его разложением в ряд по $k_1$, ограничиваясь нужным числом членов.

Убедимся в сходимости рассмотренного процесса приближений. Пользуясь формулой для конечной суммы убывающей геометрической прогрессии, запишем остаточный член в (2.13)

$$g_{n+1} = \chi - H\,\frac{1 - k_1{}^n R^n}{1 - k_1R}\,\varphi^s H^s = \frac{Hk_1{}^n R^n}{1 - k_1R}\,\varphi^s H^s$$

Образуем остаточный член решения $\varphi$, т. е. $G_{n+1} = H^{-1}g_{n+1}\exp(k_1{}^{-1}\Delta q)$, и подставим его в первое уравнение (1.8). После преобразований получим

$$(k_1{}^2\nabla^2 - 1)\,G_{n+1} = k_1^{n+1}\exp(k_1{}^{-1}\Delta q)\,\frac{\partial}{\partial q_1}(R^n\varphi^s H^s)$$

Оператор $R$ содержит производные второго порядка по $q_2$, $q_3$ и производные первого порядка по $q_1$. Если граничная функция $\varphi^s$ и геометрический параметр $H^s$ дифференцируемы $2n$ раз по $q_2$, $q_3$, а $H$ дифференцируем $(n+1)$ раз по $q_1$, то остаточный член в уравнении имеет порядок $k_1^{n+1}$.

Таким образом, рассмотренное представление первого уравнения (1.8) в слоевой зоне позволяет получить его приближенное решение в относительно простой форме (2.1), (2.13). Оно удовлетворяет с заданной степенью точности уравнению и точно — граничным условиям.

Результаты, полученные для скалярного уравнения Клейна — Гордона, могут быть распространены и на случай векторного уравнения. Приведем основные результаты

$$\Phi = \mathbf{f}^+ \exp(k_2^{-1}\Delta q) + \mathbf{f}^- \exp(-k_2^{-1}\Delta q) \tag{2.14}$$

$$\mathbf{f}^\pm = \sum_{n=0}^{N} k_2^n \mathbf{f}_n^\pm, \quad \mathbf{f}_n^\pm = \frac{1}{2H}\left(\mathbf{A}_n^\pm \mp \int H\nabla^2 \mathbf{f}_{n-1}^\pm dq_1\right) \tag{2.15}$$

$$(\mathbf{A}_n^\pm = \mathbf{A}_n^\pm(q_2, q_3), \ \mathbf{f}_{-1}^\pm = 0, \ n = 0, 1, 2, \ldots)$$

**3. Решение основной задачи.** Получим решение уравнения (1.4) при малых $k_1$, $k_2$, воспользовавшись формами приближенных решений уравнений Клейна — Гордона

$$\varphi = k_1^{-1}\chi \exp(k_1^{-1}\Delta q), \quad \Phi = \mathbf{f} \exp(k_2^{-1}\Delta q) \ (\Delta q \leqslant 0) \tag{3.1}$$

Далее рассматривается лишь внутренная задача, поэтому верхний индекс плюс у величин $\varphi$, $\chi$, $\Phi$, $\mathbf{f}$, опущен. Кроме того, в первой формуле (3.1) введен для удобства нормировочный множитель $k_1^{-1}$. Амплитудные функции $\chi$, $f$ по-прежнему определяются формулами (2.5), (2.7), (2.15), однако произвольные функции $a_n$, $\mathbf{A}_n$ определяются теперь из граничных условий (1.6).

Напомним, что $\Omega^*$ выражается через $\varphi$ и $\Phi$ по формуле (1.9) при условии, что $\operatorname{div}\Phi = 0$. Рассмотрим это условие. На основании (3.1)

$$\operatorname{div}\Phi = (\operatorname{div}\mathbf{f} + k_2^{-1}f^{(1)})\exp(k_2^{-1}\Delta q) \quad (f^{(1)} = \mathbf{e}_1\mathbf{f}) \tag{3.2}$$

Функция $\operatorname{div}\Phi$ является, очевидно, решением скалярного уравнения Клейна — Гордона. Известно [5], что если на границе односвязной области решение этого уравнения равно нулю, то оно при $k_2^2 > 0$ равно нулю и внутри нее. Поэтому для выполнения условия $\operatorname{div}\Phi = 0$ достаточно положить

$$(\operatorname{div}\mathbf{f})|_s = -k_2^{-1}f^{(1)}|_s \tag{3.3}$$

Представив здесь $\mathbf{f}$, $f^{(1)}$ в форме ряда (2.15), получим в каждом из приближений

$$f_n^{(1)}|_s = -(\operatorname{div}\mathbf{f}_{n-1})|_s \quad (\mathbf{f}_{-1} = 0, \ n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{3.4}$$

Формулы (3.4) представляют собой граничное условие для $f_n^{(1)}$. Применяя их к (2.15), находим

$$A_n^{(1)} = \left(\mathbf{e}_1\int H\nabla^2\mathbf{f}_{n-1}dq_1\right)\Big|_s - 2H^s(\operatorname{div}\mathbf{f}_{n-1})|_s \ (A_n^{(1)} = \mathbf{e}_1\mathbf{A}_n) \tag{3.5}$$

Тогда из (2.15) получим

$$f_n^{(1)} = \frac{1}{2H}\left[\mathbf{e}_1 \int\limits_{\Delta q}^{0} H\nabla^2 \mathbf{f}_{n-1} dq_1 - 2H^s (\operatorname{div} \mathbf{f}_{n-1})|_s\right] \tag{3.6}$$

На основании (1.9), (3.1), (2.15), (2.5) решение уравнения (1.4) запишется в виде

$$\Omega^* = \exp(k_2^{-1}\Delta q) \sum_{n=0}^{N} k_2^n \mathbf{f}_n + \exp(k_1^{-1}\Delta q) \sum_{n=0}^{N} k_1^n (\mathbf{e}_1\chi_n + k_1 \operatorname{grad} \chi_n) \tag{3.7}$$

Это решение содержит три последовательности входящих в $\mathbf{f}_n$, $\chi_n$ произвольных функций $A_n^{(2)}$, $A_n^{(3)}$, $a_n$ $(A_n^{(i)} = \mathbf{e}_i\mathbf{A}_n)$, которые должны быть определены из граничных условий, накладываемых на $\Omega^*$ и содержащихся в (1.6).

При малом параметре $m$ член $m^2 \operatorname{rot} \Omega^*$ в первом условии (1.6) можно рассматривать как поверхностное возмущение граничного условия $\mathbf{U}^*|_s =$ $= \mathbf{V}$. Тогда $\Omega^*$, $\mathbf{U}^*$ как решения линейных уравнений могут быть представлены в виде

$$\Omega^* = \sum_{n=0}^{N} m^n \Omega_n^*, \qquad \mathbf{U}^* = \sum_{n=0}^{N} m^n \mathbf{U}_n^* \tag{3.8}$$

Относительно функций $\Omega_n^*$, $\mathbf{U}_n^*$ (но не относительно $\Omega^*$, $\mathbf{U}^*$!) граничные условия могут быть разделены. Практически удобнее получить сразу граничные условия для $\mathbf{U}_n^*$, $\chi_n$, $f_n$. С этой целью необходимо упорядочить (1.6) по степеням малых параметров $k_1$, $k_2$, $m$.

Запишем условия (1.6), выразив в них $\Omega^*$ из (3.7) и учитывая, что на границе экспоненциальные множители обращаются в единицу

$$\mathbf{U}^*|_s - m^2 (k_2^{-1} [\mathbf{e}_1 \times \mathbf{f}] + \operatorname{rot} \mathbf{f})|_s = \mathbf{V}(q_2, q_2) \tag{3.9}$$

$$(\mathbf{f} + \mathbf{e}_1\chi + k_1 \operatorname{grad} \chi + {}^1/_2 \operatorname{rot} \mathbf{U}^*)|_s = \mathbf{G}(q_2, q_3) \tag{3.10}$$

Рассмотрим далее случай, когда параметры $k_1$, $k_2$, $m$ одного порядка малости.

Представим $\chi$, $\mathbf{f}$ в виде рядов (2.5), (2.15), а $\mathbf{U}^*$ — в виде ряда (3.8). Тогда (3.9) дает цепочку условий на границе

$$\mathbf{U}_0^*|_s = \mathbf{V}, \ \mathbf{U}_1^*|_s = \frac{m}{k_2}[\mathbf{e}_1 \times \mathbf{f}_0]|_s, \quad \mathbf{U}_{n+2}^*|_s = \left(\frac{k_2}{m}\right)^n ([\mathbf{e}_1 \times \mathbf{f}_{n+1}] + \operatorname{rot} \mathbf{f}_n)|_s \tag{3.11}$$

Из (3.10) также следует цепочка условий на границе

$$(\mathbf{f}_0 + \mathbf{e}_1\chi_0)|_s = \mathbf{G} - {}^1/_2 (\operatorname{rot} \mathbf{U}_0^*)|_s \tag{3.12}$$

$$(k_2^{n+1}\mathbf{f}_{n+1} + \mathbf{e}_1 k_1^{n+1}\chi_{n+1})|_s = -(k_1^{n+1} \operatorname{grad} \chi_n + {}^1/_2 m^{n+1} \operatorname{rot} \mathbf{U}_{n+1}^*)|_s$$

Условия (3.11), (3.12) позволяют последовательно вычислить граничные значения функций $\mathbf{U}_n^*$, $\chi_n$, $\mathbf{f}_n$. Чтобы разделить условия (3.12) относительно $\chi_n$, $\mathbf{f}_n$, спроектируем их на направление $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, обозначив проекции верхними индексами (1) — (3) соответственно и учтем граничные соотношения (3.4) для $f_n^{(1)}$. Получим

$$\chi_0\,|_s = G^{(1)} - {}^1/_2\,(\mathrm{rot}^{(1)}\,\mathbf{U}_0{}^*)\,|_s, \qquad f_0^{(2,3)}\,|_s = G^{(2,3)} - {}^1/_2\,(\mathrm{rot}^{(2,3)}\mathbf{U}_0{}^*)\,|_s$$

$$k_1^{n+1}\chi_{n+1}\,|_s = \left(k_2^{n+1}\,\mathrm{div}\,\mathbf{f}_n - k_1^{n+1}\frac{\partial\chi_n}{\partial q_1} - {}^1/_2 m^{n+1}\,\mathrm{rot}^{(1)}\,\mathbf{U}_{n+1}^*\right)\Big|_s \tag{3.13}$$

$$k_2^{n+1} f_{n+1}^{(2,3)}\,|_s = \left(-\frac{k_1^{n+1}}{H_{2,3}}\frac{\partial\chi_n}{\partial q_{2,3}} - \frac{m^{n+1}}{2}\,\mathrm{rot}^{(2,3)}\mathbf{U}_{n+1}^*\right)\Big|_s$$

Соотношения (3.11), (3.13) представляют собой рекуррентные формулы, позволяющие вычислить последовательно граничные значения $\mathbf{U}_n{}^*\,|_s$, $\chi_n|_s$, $f_n|_s$. В каждом приближении при этом необходимо восстанавливать сами функции $\mathbf{U}_n{}^*$, $\chi_n$, $\mathbf{f}_n$, которые определяют граничные значения для $\mathbf{U}_{n+1}^*$, $\chi_{n+1}$, $\mathbf{f}_{n+1}$ в следующем приближении. Схема вычислений такова: $\mathbf{U}_0{}^* \to (\chi_0,\ f_0^{(2,3)}) \to \mathbf{U}_1{}^* \to (\chi_1,\ f_1^{(2,3)}) \to \ldots$ Функции $f_n^{(1)}$ находятся отдельно из соотношений (3.6).

Рассмотрим первые два приближения.

В нулевом приближении находятся функции $\mathbf{U}_0{}^*$, $\chi_0$, $\mathbf{f}_0$. Первая определяется путем решения граничной задачи классической теории при первом граничном условии (3.11). Отсюда вычисляется $(\mathrm{rot}\ \mathbf{U}_0{}^*)\,|_s$ и подставляется в (3.13), что дает граничные значения $\chi_0|_s$, $f_0^{(2,3)}|_s$. Далее по формулам (2.7), (2.15) находятся произвольные функции $a_0$, $A_0^{(2,3)}$, а с ними и сами функции $\chi_0$, $f_0^{(2,3)}$. К ним добавляется $f_0^{(1)}$ из (3.6). В результате

$$a_0 = 2H^s\,[G_0^{(1)} - {}^1/_2\,(\mathrm{rot}^{(1)}\mathbf{U}_0{}^*)\,|_s], \qquad A_0^{(2,3)} = 2H^s\,[G^{(2,3)} - {}^1/_2\,(\mathrm{rot}^{(2,3)}\,\mathbf{U}_0{}^*)\,|_s]$$

$$\chi_0 = H^s H^{-1}\,[G^{(1)} - {}^1/_2\,(\mathrm{rot}^{(1)}\mathbf{U}_0{}^*)\,|_s] \tag{3.14}$$

$$f_0^{(2,3)} = H^s H^{-1}\,[G^{(2,3)} - {}^1/_2\,(\mathrm{rot}^{(2,3)}\,\mathbf{U}_0{}^*)\,|_s], \qquad f_0^{(1)} = 0$$

Рассмотрим теперь приближение первого порядка. Подставив последние два соотношения (3.14) во второе условие (3.11), находим граничные условия для $\mathbf{U}_1{}^*$. Снова решается граничная задача классической теории и на основании найденной функции $\mathbf{U}_1{}^*$, а затем — функций $\chi_0$, $\mathbf{f}_0$ вычисляются из второго и третьего соотношений (3.13) граничные значения $\chi_1|_s$, $f_1^{(2,3)}|_s$.

В результате методом последовательных приближений можно удовлетворить граничным условиям (1.6) с любой степенью точности.

Итак, способ построения решения уравнения (1.4) с граничными условиями (1.6) сводится при малых коэффициентах $k_1$, $k_2$, $m$ к $n$-кратному решению уравнения равновесия классической теории (1.3) при граничных условиях кинематического типа, дающему вспомогательные функции $\mathbf{U}_n{}^*$, и к последующему нахождению из граничных условий функций $a_n$, $A_n^{(2)}$, $A_n^{(3)}$, по которым при помощи (2.7), (2.15) получаются $\chi_n$, $\mathbf{f}_n$, дающие $\Omega^*$.

Вернемся теперь к краевой задаче асимметрической упругости в первоначальной постановке — уравнениям равновесия (1.1) при граничных условиях (1.2). Ее решение, т. е. поле смещений $\mathbf{U}$ и поворотов $\Omega$, находится по функциям $\mathbf{U}_n^*$, $\chi_n$, $f_n$, если в (1.5) подставить $\Omega^*$ из (3.7) и $\mathbf{U}^*$ из второго соотношения (3.8), в виде

$$\mathbf{U} = \sum_{n=0}^{N} m^n \mathbf{U}_n^* - \frac{m^2}{k_2} \exp(k_2^{-1}\Delta q) \sum_{n=0}^{N} k_2^n ([\mathbf{e}_1 \times \mathbf{f}_n] + k_2 \operatorname{rot} \mathbf{f}_n) \quad (3.15)$$

$$\Omega = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N} m^n \operatorname{rot} \mathbf{U}_n^* + \exp(k_1^{-1}\Delta q) \sum_{n=0}^{N} k_1^n (\mathbf{e}_1 \chi_n + k_1 \operatorname{grad} \chi_n) +$$

$$+ \exp(k_2^{-1}\Delta q) \sum_{n=0}^{N} k_2^n \mathbf{f}_n \quad (\Delta q \leqslant 0) \quad (3.16)$$

Подчеркнем, что полученные решения справедливы при малых характеристических длинах $k_1$, $k_2$, $m$ одного порядка малости и достаточно пологих границах областей, т. е. при условиях (1.7), (2.4).

Рассмотрим полученные решения подробнее. Первые члены в каждом из выражений (3.15), (3.16), т. е. $\mathbf{U}_0^*$ и $^1/_2 \operatorname{rot} \mathbf{U}_0^*$ представляют собой «классические» составляющие полей смещений $\mathbf{U}$ и поворотов $\Omega$ соответственно. Все остальные члены являются «моментными» поправками. Они двоякой природы.

Одна группа членов, содержащих $\mathbf{U}_1^*$, $\mathbf{U}_2^*$, . . ., определяет искажение поля смещений и поворотов в объеме всего тела. Из второго граничного условия (3.11) и второго соотношения (3.13) видно, что источники членов, содержащих $\mathbf{U}_1^*$, являются повороты на границе $G$ и в объеме $^1/_2 \operatorname{rot} \mathbf{U}_0^*$. Последние связаны с неоднородностью классического поля деформаций. Член в (3.15), содержащий $\mathbf{U}_1^*$, имеет порядок $m^2 (k_2 v^\circ)^{-1}$, как это следует из второго соотношения (3.11) и второго соотношения (3.13). (Здесь под $v^\circ$ можно понимать наибольшее смещение в пределах тела.) Этот поправочный член может оказаться существенным, если $v^\circ$ достаточно мало, что может реализоваться, например, в поле ультразвуковой волны.

Вторая группа членов, содержащих экспоненциальные множители, дает приграничные эффекты различных порядков по $k_1$, $k_2$, $m$. Они существенно отличны от нуля лишь при $|\Delta q| \lesssim k_1, k_2$, т. е. сконцентрированы в приграничном слое толщиной $\sim k_1$, $k_2$ (отсюда следует физический смысл этих характеристических длин). Вблизи границы, как следует из (3.14), погранчлены нулевого порядка в (3.16) дают просто относительный угол закручивания $G - {}^1/_2 \operatorname{rot} \mathbf{U}_0^*$, который может быть немалым по сравнению с углом $^1/_2 \operatorname{rot} \mathbf{U}_0^*$. Таким образом, вырождение моментной среды по упругим свойствам в классическую сопровождается исчезновением моментных эффектов внутри тела, но не на его границе.

Поступила 15 VII 1970

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кувшинский Е. В., Аэро Э. Л. Континуальная теория асимметрической упругости. Учет внутреннего вращения. Физика твердого тела, т. 5, вып. 9. 1963.
2. Аэро Э. Л., Кувшинский Е. В. Континуальная теория асимметрической упругости. Равновесие изотропного тела. Физика твердого тела, 1964, т. 6, вып. 9.
3. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. Успехи матем. наук, 1957, т. 12, вып. 5.
4. Фридрихс К. Асимптотические явления в математической физике. Математика, сб. перев., 1957, т. 1, вып. 2.
5. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики, т. 2. М., Изд-во иностр. лит., 1958.