

ПОСТРОЕНИЕ УТОЧНЕННЫХ ПРИКЛАДНЫХ ТЕОРИЙ ДЛЯ ПЛИТЫ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

О. К. Аксентян, Ю. А. Устинов

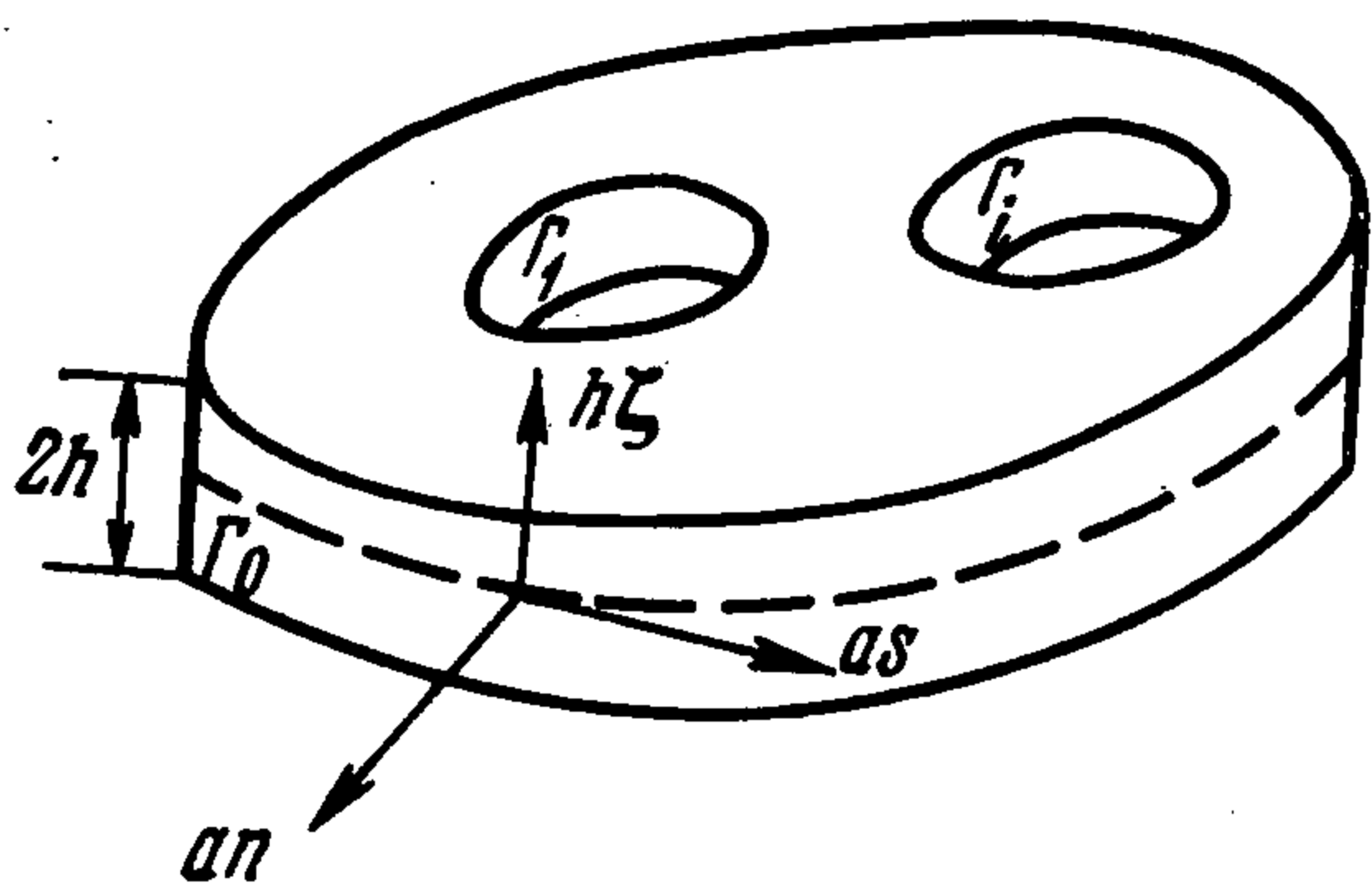
(Ростов-на-Дону)

Предлагается метод построения уточненных теорий для плиты с произвольным гладким контуром, позволяющий определять внутреннее напряженно-деформированное состояние плиты с любой степенью точности.

Асимптотический анализ решений задач теории упругости [1-3] показал, что напряженное состояние плиты можно расчленить на внутреннее и состояние типа пограничного слоя. Решение теории Кирхгофа является первым членом асимптотики внутреннего напряженного состояния плиты и имеет погрешность порядка λ (λ — относительная толщина плиты) при достаточно медленно меняющихся внешних нагрузках, приложенных к торцам плиты.

В работе [4] сформулированы краевые задачи для некоторых однородных условий на контуре плиты, решения которых имеют погрешность порядка λ^2 для внутреннего напряженного состояния. Фигурирующие в уточненных краевых условиях постоянные эффективно не определены. В работе [5] для круглой плиты, контур которой свободен от напряжений, сформулированы основные уравнения, обеспечивающие погрешность для внутреннего напряженного состояния порядка λ^3 .

1. Рассмотрим упругое равновесие многосвязной плиты (фигура). Будем предполагать, что расстояния между поверхностями Γ_i достаточно велики по сравнению с толщиной, так что взаимным влиянием краевых эффектов можно пренебречь. Считаем, что торцы плиты свободны от усилий а на поверхностях Γ_i могут быть заданы следующие типы краевых условий:



$$\begin{aligned} \sigma_n|_{\Gamma} &= N(s, \zeta), & \tau_{ns}|_{\Gamma} &= T(s, \zeta) \\ \tau_{nz}|_{\Gamma} &= Z(s, \zeta) \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$u_n|_{\Gamma} = u_s|_{\Gamma} = w|_{\Gamma} = 0 \quad (1.2)$$

$$\sigma_n|_{\Gamma} = \tau_{ns}|_{\Gamma} = w|_{\Gamma} = 0 \quad (1.3)$$

$$\sigma_n|_{\Gamma} = u_s|_{\Gamma} = w|_{\Gamma} = 0 \quad (1.4)$$

$$u_n|_{\Gamma} = U(s, \zeta), \quad \tau_{ns}|_{\Gamma} = T(s, \zeta), \quad \tau_{nz}|_{\Gamma} = Z(s, \zeta) \quad (1.5)$$

Вдали от края напряженно-деформированное состояние плиты определяется следующими выражениями:

в случае изгиба

$$\sigma_n^{\circ} = 2\mu \left\{ \lambda \zeta R_1(\psi) + \frac{1}{2} \left(\nu + \frac{1}{3} \right) \lambda^3 \left(\frac{3}{5} \zeta^2 - \zeta^3 \right) \frac{\partial^2 \Delta \psi}{\partial n^2} \right\} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned}
 \tau_{ns}^{\circ} &= 2\mu \left\{ (\nu + 1) \lambda \zeta R_2(\psi) + \frac{1}{2} \left(\nu + \frac{1}{3} \right) \lambda^3 \left(\frac{3}{5} \zeta - \zeta^3 \right) R_2(\Delta\psi) \right\} \\
 \tau_{nz}^{\circ} &= 2\mu \nu \lambda^2 (1 - \zeta^2) \frac{\partial \Delta\psi}{\partial n} \\
 u_n^{\circ} &= a \left\{ (\nu + 1) \lambda \zeta \frac{\partial \psi}{\partial n} + \frac{1}{2} \left(\nu + \frac{1}{3} \right) \lambda^3 \left(\frac{3}{5} \zeta - \zeta^3 \right) \frac{\partial \Delta\psi}{\partial n} \right\} \\
 u_s^{\circ} &= a \left\{ (\nu + 1) \lambda \zeta \frac{1}{H} \frac{\partial \psi}{\partial s} + \frac{1}{2} \left(\nu + \frac{1}{3} \right) \lambda^3 \left(\frac{3}{5} \zeta - \zeta^3 \right) \frac{1}{H} \frac{\partial \Delta\psi}{\partial s} \right\} \quad (1.7) \\
 w^{\circ} &= a \left\{ -(\nu + 1) \psi + \frac{\lambda^2}{2} \left[\frac{17\nu - 1}{5} - (\nu - 1) \zeta^2 \right] \Delta\psi \right\} \\
 R_1(\psi) &= 2\nu \frac{\partial^2 \psi}{\partial n^2} + (\nu - 1) \left(\frac{1}{H^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} + \frac{a}{RH} \frac{\partial \psi}{\partial n} + n \frac{aR'}{R^2 H^3} \frac{\partial \psi}{\partial s} \right) \\
 R_2(\psi) &= \frac{1}{H} \frac{\partial^2 \psi}{\partial n \partial s} - \frac{a}{RH^2} \frac{\partial \psi}{\partial s} \\
 \nu &= 1 / (1 - 2\sigma), \quad \lambda = h / a, \quad H = 1 + na / R
 \end{aligned}$$

в случае растяжения

$$\begin{aligned}
 \sigma_n^{\circ} &= 2\mu \left\{ \left[-l \frac{\partial}{\partial s} S_{12}^*(\varphi, \chi) + m \frac{\partial}{\partial s} S_{11}^*(\varphi, \chi) \right] - \right. \\
 &\quad \left. - \lambda^2 \left(\frac{1}{3} - \zeta^2 \right) \left[-l \frac{\partial}{\partial s} S_{22}(\varphi) + m \frac{\partial}{\partial s} S_{21}(\varphi) \right] \right\} \quad (1.8) \\
 \tau_{ns}^{\circ} &= 2\mu \left\{ \left[l \frac{\partial}{\partial s} S_{11}^*(\varphi, \chi) + m \frac{\partial}{\partial s} S_{12}^*(\varphi, \chi) \right] - \right. \\
 &\quad \left. - \lambda^2 \left(\frac{1}{3} - \zeta^2 \right) \left[m \frac{\partial}{\partial s} S_{22}(\varphi) + l \frac{\partial}{\partial s} S_{21}(\varphi) \right] \right\} \\
 \tau_{nz}^{\circ} &= 0
 \end{aligned}$$

$$u_n^{\circ} = a \left\{ \left[l S_{11}(\varphi, \chi) + m S_{12}(\varphi, \chi) \right] - \lambda^2 \left(\frac{1}{3} - \zeta^2 \right) \left[l S_{21}(\varphi) + m S_{22}(\varphi) \right] \right\} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned}
 u_s^{\circ} &= a \left\{ \left[l S_{12}(\varphi, \chi) - m S_{11}(\varphi, \chi) \right] - \lambda^2 \left(\frac{1}{3} - \zeta^2 \right) \left[l S_{22}(\varphi) - m S_{21}(\varphi) \right] \right\} \\
 w^{\circ} &= -2a^2 \frac{\nu - 1}{3\nu - 1} \lambda \zeta (\varphi' + \bar{\varphi}')
 \end{aligned}$$

$$S_{11}(\varphi, \chi) = -\frac{1}{2} \left[-\kappa (\varphi + \bar{\varphi}) + (z \bar{\varphi}' + \bar{z} \varphi') + (\chi + \bar{\chi}) \right]$$

$$S_{12}(\varphi, \chi) = \frac{i}{2} \left[-\kappa (\varphi - \bar{\varphi}) + (z \bar{\varphi}' - \bar{z} \varphi') + (\bar{\chi} - \chi) \right]$$

$$S_{21}(\varphi) = a^2 \frac{\nu - 1}{3\nu - 1} (\varphi'' + \bar{\varphi}''), \quad S_{22}(\varphi) = i a^2 \frac{\nu - 1}{3\nu - 1} (\varphi'' - \bar{\varphi}'')$$

$$S_{ij}^*(\varphi, \chi) = S_{ij}(\varphi, \chi) \Big|_{\kappa = \frac{3-\sigma}{1+\sigma}}, \quad \kappa = \frac{3-\sigma}{1+\sigma}, \quad z = x + iy, \quad l = \cos(nx), \quad m = \cos(ny)$$

Здесь $\psi(n, s)$ — бигармоническая функция; $\varphi(z), \chi(z)$ — аналитические функции комплексной координаты z ; n, s, ζ — безразмерные криволинейные координаты (см. фигуру); μ, σ — упругие постоянные; $2h$ — толщина плиты; a — некоторый характерный размер плиты в плане.

Цель работы — сформулировать в задачах (1.1) — (1.5) граничные условия для функций ψ, φ, χ так, чтобы найденные по ним внутренние напряженно-деформированные состояния имели бы погрешность $O(\lambda^n)$.

2. Рассмотрим случай граничных условий (1.1). Согласно [2,3], на границе Γ_i имеем

$$\begin{aligned} \sigma_n = \sigma_n^\circ|_{n=0} + 4\mu\lambda^2 \sum_{k=1}^{\infty} l_k(\zeta) \left(\frac{\partial^2 B_k}{\partial s \partial n} \Big|_{n=0} - \frac{a}{R} \frac{\partial b_k}{\partial s} \right) - \\ - \lambda\mu \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ 2\nu F_p'' \frac{c_p}{\lambda^2} - \frac{a}{R} \left[(\nu+1) \frac{F_p''}{\gamma_p^2} - (\nu-1) F_p \right] \frac{\partial C_p}{\partial n} \Big|_{n=0} \right\} \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \tau_{ns} = \tau_{ns}^\circ|_{n=0} + 2\mu\lambda^2 \sum_{k=1}^{\infty} l_k(\zeta) \left(\frac{\partial^2 b_k}{\partial s^2} + \frac{a}{R} \frac{\partial B_k}{\partial n} - \frac{\partial^2 B_k}{\partial n^2} \right) \Big|_{n=0} - \\ - \lambda\mu \sum_{p=1}^{\infty} \left[(\nu+1) \frac{F_p''}{\gamma_p^2} - (\nu-1) F_p \right] \left(\frac{\partial^2 C_p}{\partial n \partial s} \Big|_{n=0} - \frac{a}{R} \frac{\partial c_p}{\partial s} \right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\tau_{nz} = \tau_{nz}^\circ|_{n=0} + 2\mu\lambda \sum_{k=1}^{\infty} l_k'(\zeta) \frac{\partial b_k}{\partial s} + 2\mu\nu \sum_{p=1}^{\infty} F_p' \frac{\partial C_p}{\partial n} \Big|_{n=0} \quad (2.3)$$

$$u_n = u_n^\circ|_{n=0} + 2\lambda^2 a \sum_{k=1}^{\infty} l_k(\zeta) \frac{\partial b_k}{\partial s} - \frac{\lambda a}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \left[(\nu+1) \frac{F_p''}{\gamma_p^2} - (\nu-1) F_p \right] \frac{\partial C_p}{\partial n} \Big|_{n=0} \quad (2.4)$$

$$u_s = u_s^\circ|_{n=0} - 2\lambda^2 a \sum_{k=1}^{\infty} l_k(\zeta) \frac{\partial B_k}{\partial n} \Big|_{n=0} - \frac{\lambda a}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \left[(\nu+1) \frac{F_p''}{\gamma_p^2} - (\nu-1) F_p \right] \frac{\partial c_p}{\partial s} \quad (2.5)$$

$$w = w^\circ|_{n=0} + \frac{a}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \left[(\nu+1) \frac{F_p'''}{\gamma_p^2} + (3\nu+1) F_p' \right] c_p \quad (2.6)$$

Здесь $B_k(n, s)$, $C_p(n, s)$ — определяющие пограничный слой решения уравнений

$$\Delta B_k - \frac{\sigma_k^2}{\lambda^2} B_k = 0, \quad \Delta C_p - \frac{\gamma_p^2}{\lambda^2} C_p = 0 \quad (2.7)$$

В случае изгиба

$$\begin{aligned} F_p(\zeta) = \left(\sin \gamma_p - \frac{\cos \gamma_p}{\gamma_p} \right) \sin \gamma_p \zeta + \zeta \cos \gamma_p \cos \gamma_p \zeta, \quad l_k(\zeta) = \frac{\sin \sigma_k \zeta}{\sigma_k} \\ \sin 2\gamma_p - 2\gamma_p = 0, \quad \cos \sigma_k = 0 \end{aligned}$$

В случае растяжения

$$\begin{aligned} F_p(\zeta) = \left(\cos \gamma_p + \frac{\sin \gamma_p}{\gamma_p} \right) \cos \gamma_p \zeta + \zeta \sin \gamma_p \sin \gamma_p \zeta, \quad l_k(\zeta) = \cos \sigma_k \zeta \\ \sin 2\gamma_p + 2\gamma_p = 0, \quad \sin \sigma_k = 0 \end{aligned}$$

Здесь $F_p(\zeta)$ — функции Папковича. Для них имеет место следующее обобщенное условие ортогональности:

$$\int_{-1}^1 (F_p'' F_t'' - \gamma_p^2 \gamma_t^2 F_p F_t) d\zeta = \begin{cases} 4\gamma_t^4, & p=t \\ 0, & p \neq t \end{cases} \quad (2.8)$$

В работах [2,3] даны асимптотические представления решений уравнений (2.7) через их граничные значения $b_k(s)$, $c_p(s)$. В дальнейшем будем

предполагать, что эти функции представимы в виде

$$b_k(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i b_{ki}(s), \quad c_p(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i c_{pi}(s) \quad (2.9)$$

Коэффициенты этих разложений b_{ki} , c_{pi} определяются из рекуррентных бесконечных систем [2,3].

Рассмотрим сначала случай изгиба. Введем обозначения

$$M_n = \frac{1}{\lambda} \int_{-1}^1 N \zeta^n d\zeta, \quad G_n = \frac{1}{\lambda} \int_{-1}^1 T \zeta^n d\zeta \quad (n=1, 3), \quad Q_0 = \frac{1}{\lambda^2} \int_{-1}^1 Z d\zeta$$

$$Q_2 = \frac{1}{\lambda} \int_{-1}^1 Z \zeta^2 d\zeta, \quad T_k = \frac{1}{\lambda} \int_{-1}^1 T l_k(\zeta) d\zeta, \quad N_k^{(1)} = \frac{1}{\lambda} \int_{-1}^1 N l_k(\zeta) d\zeta \quad (k=1, 2, \dots)$$
(2.10)

$$N_p^{(2)} = \frac{1}{2\lambda} \int_{-1}^1 N \left[(\nu - 1) F_p - \frac{\nu + 1}{\gamma_p^2} F_p'' \right] d\zeta,$$

$$Z_p = \frac{1}{2\lambda} \int_{-1}^1 Z \left[(3\nu + 1) F_p' + \frac{\nu + 1}{\gamma_p^2} F_p''' \right] d\zeta \quad (p=1, 2, \dots)$$

Согласно [2], имеем

$$b_{k0} = 0, \quad b_{k1} = \frac{2(\nu + 1)(-1)^{k+1}}{\sigma_k^3} R_2(\psi) - \frac{1}{2\mu} T_k$$

$$b_{k2} = \frac{2(-1)^{k+1}}{\sigma_k^4} \left[\frac{\partial}{\partial s} R_1(\psi) - (\nu + 1) \frac{a}{2R} R_2(\psi) \right]_{n=0} + \frac{5a}{2R} \frac{b_{k1}}{\sigma_k} - \quad (2.11)$$

$$- \frac{2(-1)^{k+1}}{\sigma_k} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\cos^2 \gamma_p}{\gamma_p^2 - \sigma_k^2} \gamma_p \left(1 - \nu \frac{\gamma_p + \sigma_k}{\gamma_p - \sigma_k} \right) c_{p2}' - \frac{1}{2\mu\sigma_k} \left(\frac{\partial N_k^{(1)}}{\partial s} - \frac{a}{2R} T_k \right), \dots$$

$$c_{p0} = c_{p1} = 0, \quad c_{p2} = \alpha_p R_1(\psi) |_{n=0} + \frac{1}{2\mu} \beta_p, \dots \quad (2.12)$$

$$\alpha = -2(\nu - 1) M \mathbf{q}_1, \quad \beta = -M \mathbf{r}$$

Здесь M — обратная матрица бесконечных систем линейных алгебраических уравнений для определения c_{pi} , не зависящая от нагрузки и геометрии плиты; α , β , \mathbf{q}_1 , \mathbf{r} — бесконечномерные векторы с компонентами α_p , β_p , $\gamma_p^{-1} \sin^2 \gamma$, $Z_p + \gamma_p N_p^{(1)}$ ($p=1, 2, \dots$) соответственно.

На основании формул (2.1) — (2.3) построим выражения для изгибающего момента и обобщенной поперечной силы на Γ_i . Имеем с учетом (2.10)

$$M_1 = \frac{4}{3} \mu R_1(\psi) |_{n=0} + \lambda 2\mu \left\{ 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sigma_k^2} b_{k1}' - \frac{\nu - 1}{2} \frac{a}{R} \sum_{p=1}^{\infty} \gamma_p F_p^* c_{p2} \right\} +$$

$$+ \lambda^2 2\mu \left\{ -\frac{1}{5} \left(\nu + \frac{1}{3} \right) \frac{\partial^2 \Delta \psi}{\partial n^2} |_{n=0} + \right.$$

$$+ 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sigma_k^3} \left[\sigma_k b_{k2}' - \left(\frac{a}{R} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s} \frac{a}{2R} \right) b_{k1} \right] - \frac{\nu - 1}{2} \frac{a}{R} \sum_{p=1}^{\infty} \gamma_p F_p^* c_{p3} +$$

$$\left. + \frac{\nu - 1}{2} \left(\frac{a^2}{2R^2} - \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) \sum_{p=1}^{\infty} F_p^* c_{p2} \right\} + O(\lambda^3) \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned}
Q_0 + \frac{\partial G_1}{\partial s} &= \frac{4}{3} \mu \left[2\nu \frac{\partial \Delta \psi}{\partial n} + (\nu + 1) \frac{\partial}{\partial s} R_2(\psi) \right]_{n=0} + \\
&+ \lambda 2\mu \left\{ 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sigma_k^2} \frac{\partial}{\partial s} \frac{a}{R} b_{k1} + \frac{\nu-1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \sum_{p=1}^{\infty} \gamma_p F_p^* c_{p2} \right\} + \\
&+ \lambda^2 2\mu \left\{ -\frac{1}{5} \left(\nu + \frac{1}{3} \right) \frac{\partial}{\partial s} R_2(\Delta \psi) \Big|_{n=0} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sigma_k^3} \left[2\sigma_k \frac{\partial}{\partial s} \frac{a}{R} b_{k2} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\partial}{\partial s} \left(2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} - \frac{a^2}{R^2} \right) b_{k1} \right] + \frac{\nu-1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \sum_{p=1}^{\infty} \gamma_p F_p^* c_{p3} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\nu-1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial}{\partial s} \frac{a}{2R} + \frac{a}{R} \frac{\partial}{\partial s} \right) \sum_{p=1}^{\infty} F_p^* c_{p2} \right\} + O(\lambda^3) \quad (2.14)
\end{aligned}$$

$$F_p^* = \int_{-1}^1 \zeta F_p(\zeta) d\zeta = -4 \frac{\sin^2 \gamma_p}{\gamma_p^2}$$

Далее из (2.3) получим

$$\begin{aligned}
Q_2 &= \lambda \frac{8\mu\nu}{15} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial n} \Big|_{n=0} + 4\mu \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sigma_k^2 - 2}{\sigma_k^3} (\lambda b_{k1}' + \lambda^2 b_{k2}' + \dots) - \\
&- 4\mu\nu \sum_{p=1}^{\infty} F_p^* \left[\gamma_p c_{p2} + \lambda \left(\gamma_p c_{p3} - \frac{a}{2R} c_{p2} \right) + \dots \right] \quad (2.15)
\end{aligned}$$

Из (2.15) имеем

$$\begin{aligned}
\sum_{p=1}^{\infty} \gamma_p F_p^* c_{p2} &= -\frac{Q_2}{4\mu\nu} \\
\sum_{p=1}^{\infty} \gamma_p F_p^* c_{p3} &= \frac{2}{15} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial n} \Big|_{n=0} + \frac{1}{\nu} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sigma_k^2 - 2}{\sigma_k^3} b_{k1}' + \\
&+ \frac{a}{2R} \sum_{p=1}^{\infty} F_p^* c_{p2}, \dots \quad (2.16)
\end{aligned}$$

Подставив (2.11), (2.16) в (2.13), (2.14), с учетом (2.12) получим граничные условия для определения $\psi(n, s)$ с точностью до величин порядка λ^2 по сравнению с единицей

$$\begin{aligned}
R_1(\psi) \Big|_{n=0} + \lambda 12A (\nu + 1) \frac{\partial}{\partial s} R_2(\psi) \Big|_{n=0} + \lambda^2 \left[-\frac{3}{10} \left(\nu + \frac{1}{3} \right) \frac{\partial^2 \Delta \psi}{\partial n^2} + \right. \\
\left. + \frac{6}{5} (\nu + 1) \left(\frac{\partial}{\partial s} \frac{a}{R} - \frac{2}{3} \frac{a}{R} \frac{\partial}{\partial s} \right) R_2(\psi) \right]_{n=0} + O(\lambda^3) = \\
= \frac{1}{2\mu} \left\{ \frac{3}{2} M_1 + \lambda \left[6 \frac{d}{ds} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sigma_k^2} T_k - \frac{3(\nu-1)}{8\nu} \frac{a}{R} Q_2 \right] + \right. \\
\left. + \lambda^2 \left[\frac{1}{4} \left(\frac{3\nu+1}{2\nu} \frac{a}{R} \frac{d}{ds} - 3 \frac{d}{ds} \frac{a}{R} \right) (G_3 - 3G_1) - \frac{3(\nu-1)}{10\nu} \frac{a}{R} \frac{dG_1}{ds} - \right. \right. \\
\left. \left. - \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} \left(M_3 - \frac{3}{5} M_1 \right) + \frac{3}{40} \frac{\nu-1}{\nu} \frac{a}{R} Q_0 + \frac{d^2}{ds^2} L \right] + O(\lambda^3) \right\} \quad (2.17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[2\nu \frac{\partial \Delta \psi}{\partial n} + (\nu + 1) \frac{\partial}{\partial s} R_2(\psi) \right]_{n=0} + \lambda 12A (\nu + 1) \frac{\partial}{\partial s} \frac{a}{R} R_2(\psi) \Big|_{n=0} + \\
 & + \lambda^2 \left[-\frac{3}{10} \left(\nu + \frac{1}{3} \right) \frac{\partial}{\partial s} R_2(\Delta \psi) + \frac{6}{5} (\nu + 1) \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{a^2}{R^2} + \frac{2}{3} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) R_2(\psi) \right]_{n=0} + \\
 & + O(\lambda^3) = \frac{1}{2\mu} \left\{ \frac{3}{2} \left(Q_0 + \frac{dG_1}{ds} \right) + \lambda \left[6 \frac{d}{ds} \frac{a}{R} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sigma_k^2} T_k + \right. \right. \\
 & + \left. \frac{3(\nu-1)}{8\nu} \frac{d^2}{ds^2} Q_2 \right] + \lambda^2 \left[-\frac{1}{4} \left(\frac{3\nu+1}{2\nu} \frac{d^2}{ds^2} + 3 \frac{a^2}{R^2} \right) (G_3 - 3G_1) + \right. \\
 & + \frac{3(\nu-1)}{10\nu} \frac{d^3 G_1}{ds^3} - \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \frac{a}{R} \frac{d}{ds} \left(M_3 - \frac{3}{5} M_1 \right) - \\
 & \left. - \frac{3(\nu-1)}{40\nu} \frac{d^2 Q_0}{ds^2} + \frac{d}{ds} \frac{a}{R} \frac{d}{ds} L \right] + O(\lambda^3) \quad (2.18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L = & 3(1-\nu) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \gamma_p}{\gamma_p^2} \left(\beta_p + \frac{3}{2} M_1 \alpha_p \right) + \\
 & + 12 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\gamma_p \cos^2 \gamma_p}{\sigma_k^3 (\gamma_p^2 - \sigma_k^2)} \left(1 - \nu \frac{\gamma_p + \sigma_k}{\gamma_p - \sigma_k} \right) \left(\beta_p + \frac{3}{2} M_1 \alpha_p \right)
 \end{aligned}$$

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_k^5} \approx \begin{cases} 0.1050, & \sigma_k > 0 \\ -0.1050, & \sigma_k < 0 \end{cases}$$

Очевидно, процесс построения граничных условий для ψ можно продолжить сколь угодно далеко при достаточной гладкости контура и нагрузки. В первом приближении соотношения (2.17), (2.18) совпадают с граничными условиями теории Кирхгофа. Из (2.17), (2.18) видим также, что в общем случае заданных усилий при изгибе граничные условия для ψ могут быть построены с точностью до величин порядка λ по сравнению с единицей без обращения бесконечных систем.

В случае, когда поверхность Γ_i свободна от усилий, граничные условия для ψ могут быть построены с точностью до величин порядка λ^2 по сравнению с единицей без обращения бесконечных систем. В этом случае $\epsilon_{p2} = 0$ [6] и из (2.17), (2.18) получим

$$\begin{aligned}
 & R_1(\psi) \Big|_{n=0} + \lambda 12A (\nu + 1) \frac{\partial}{\partial s} R_2(\psi) \Big|_{h=0} + \lambda^2 \left[-\frac{3}{10} \left(\nu + \frac{1}{3} \right) \frac{\partial^2 \Delta \psi}{\partial n^2} + \right. \\
 & \left. + \frac{6(\nu+1)}{5} \left(\frac{\partial}{\partial s} \frac{a}{R} - \frac{2}{3} \frac{a}{R} \frac{\partial}{\partial s} \right) R_2(\psi) \right]_{n=0} + O(\lambda^3) = 0 \quad (2.19)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[2\nu \frac{\partial \Delta \psi}{\partial n} + (\nu + 1) \frac{\partial}{\partial s} R_2(\psi) \right]_{n=0} + \lambda 12A (\nu + 1) \frac{\partial}{\partial s} \frac{a}{R} R_2(\psi) \Big|_{n=0} + \\
 & + \lambda^2 \left[-\frac{3}{10} \left(\nu + \frac{1}{3} \right) \frac{\partial}{\partial s} R_2(\Delta \psi) + \frac{6}{5} (\nu + 1) \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{a^2}{R^2} + \frac{2}{3} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) R_2(\psi) \right]_{n=0} + \\
 & + O(\lambda^3) = 0
 \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь случай растяжения-сжатия плиты. Аналогично предыдущему можно построить процесс получения граничных условий для определения аналитических функций φ и χ с любой степенью точности. В данном случае без обращения бесконечных систем можно сформулировать три приближения граничных условий для плиты, нагруженной про-

извольной нагрузкой, (2.20) и пять приближений для свободного контура (2.21)

$$\begin{aligned}
 & - 2\mu \frac{\partial}{\partial s} [S_{12}^* (\varphi, \chi) - iS_{11}^* (\varphi, \chi)]_{n=0} + O(\lambda^3) = X_{n0} + iY_{n0} + \\
 & \quad + \lambda \frac{\nu-1}{2\nu} \left[\left(-l \frac{a}{R} - m \frac{d}{ds} \right) + i \left(-m \frac{a}{R} + l \frac{d}{ds} \right) \right] Z_1 + \\
 & + \lambda^2 \frac{\nu-1}{4\nu} \left\{ \left[\left(-l \frac{a}{R} - m \frac{d}{ds} \right) + i \left(-m \frac{a}{R} + l \frac{d}{ds} \right) \right] \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{3} T_0 - T_2 \right) + \right. \\
 & \quad \left. + \left[\left(l \frac{d}{ds} - m \frac{a}{R} \right) + i \left(m \frac{d}{ds} + l \frac{a}{R} \right) \right] \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{3} N_0 - N_2 \right) \right\} + O(\lambda^3) \quad (2.20) \\
 & - \frac{\partial}{\partial s} [S_{12}^* (\varphi, \chi) - iS_{11}^* (\varphi, \chi)]_{n=0} + \lambda^4 \frac{1-\nu}{45\nu} \left\{ (l + im) \left[\frac{\partial^2}{\partial s^2} S_3 (\varphi) + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{a}{R} \frac{\partial}{\partial s} S_4 (\varphi) \right]_{n=0} + (m - il) \left[\frac{\partial^2}{\partial s^2} S_4 (\varphi) - \frac{a}{R} \frac{\partial}{\partial s} S_3 (\varphi) \right]_{n=0} \right\} + O(\lambda^5) = 0 \quad (2.21)
 \end{aligned}$$

$$S_3 (\varphi) = -l \frac{\partial}{\partial s} S_{22} (\varphi) + m \frac{\partial}{\partial s} S_{21} (\varphi), \quad S_4 (\varphi) = l \frac{\partial}{\partial s} S_{21} (\varphi) + m \frac{\partial}{\partial s} S_{22} (\varphi)$$

Здесь обозначено

$$\begin{aligned}
 X_{n0} &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (Nl - Tm) d\zeta, \quad Y_{n0} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (Nm + Tl) d\zeta, \quad Z_1 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 Z\zeta d\zeta \\
 N_i &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 N\zeta^i d\zeta, \quad T_i = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 T\zeta^i d\zeta \quad (i = 0, 2)
 \end{aligned}$$

3. Рассмотрим случай, когда контур плиты Γ_i жестко заделан. В задаче изгиба, удовлетворяя граничным условиям (1.2), получаем

$$c_{p0} = c_{p1} = 0, \quad c_{p2} = \alpha_p R_1 (\psi) |_{n=0}, \dots \quad (3.1)$$

Подставляя (3.1) в выражения (2.4), (2.6) с учетом (1.2) (1.9), получим с точностью до величин порядка λ по сравнению с единицей граничные условия для определения $\psi (n, s)$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_{n=0} + \lambda \left[-\frac{6\nu(\nu-1)}{\nu+1} \Lambda \psi \Big|_{n=0} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \gamma_p}{\gamma_p} \alpha_p \right] + O(\lambda^2) &= 0 \\
 \psi \Big|_{n=0} + O(\lambda^2) &= 0 \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

Этот процесс, как и ранее, может быть продолжен сколь угодно далеко.

В случае растяжения аналогично строятся граничные условия для определения φ, χ

$$\begin{aligned}
 (m + il) [S_{12} (\varphi, \chi) - iS_{11} (\varphi, \chi)]_{n=0} + \lambda a (\varphi' + \bar{\varphi}') \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \gamma_p}{\gamma_p} \delta_p + O(\lambda^2) &= 0 \\
 \delta &= \delta \frac{\nu(\nu-1)^2}{3\nu-1} M_* q_2 \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

где δ, q_2 — бесконечномерные векторы с компонентами $\delta_p, \gamma_p^{-1} \sin^2 \gamma_p$ ($p = 1, 2, \dots$) соответственно, M_* — обратная матрица бесконечной системы, приведенной в [3].

4. Будем считать поверхность Γ_i шарнирно закрепленной, если на ней выполняются условия (1.3) или (1.4). В этих случаях матрицы систем уравнений для определения b_{ki} и c_{pi} оказываются диагональными [7], и граничные условия для определения проникающей части напряженного состояния могут быть получены в явном виде с любой степенью точности. Приведем по два члена разложений этих граничных условий для случаев (1.3) и (1.4) — соотношения (4.1), (4.3) и (4.2), (4.4) соответственно.

В задаче изгиба (4.1)

$$R_1(\psi)|_{n=0} + \lambda \left[12A(\nu+1) \frac{\partial}{\partial s} R_2(\psi) - \frac{6(\nu-1)^2}{\nu+1} \frac{a}{R} B_1 \Delta \psi \right]_{n=0} + O(\lambda^2) = 0$$

$$\psi|_{n=0} + O(\lambda^2) = 0, \quad B_1 = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin^4 \gamma_p}{\gamma_p^5} \approx \begin{cases} -0.01476, & \text{Re } \gamma_p > 0 \\ 0.01476, & \text{Re } \gamma_p < 0 \end{cases}$$

$$R_1(\psi)|_{n=0} + \lambda \left[-\frac{6(\nu-1)^2}{\nu+1} \frac{a}{R} B_1 \Delta \psi \right]_{n=0} + O(\lambda^2) = 0, \quad \psi|_{n=0} + O(\lambda^2) = 0 \quad (4.2)$$

В задаче растяжения

$$(l - im) \frac{\partial}{\partial s} [S_{12}^*(\varphi, \chi) - iS_{11}^*(\varphi, \chi)]_{n=0} + \lambda \left[\frac{(\nu-1)^2 4B_2}{(\nu+1)(3\nu-1)} \left(\frac{a}{R} - i \frac{\partial}{\partial s} \right) (\varphi' + \overline{\varphi}') \right]_{n=0} + O(\lambda^2) = 0 \quad (4.3)$$

$$\left[-l \frac{\partial}{\partial s} S_{12}^*(\varphi, \chi) + m \frac{\partial}{\partial s} S_{11}^*(\varphi, \chi) \right]_{n=0} + \lambda \left[-\frac{4(\nu-1)^2 B_2}{(\nu+1)(3\nu-1)} \frac{a}{R} (\varphi' + \overline{\varphi}') \right]_{n=0} + O(\lambda^2) = 0$$

$$[lS_{12}(\varphi, \chi) - mS_{11}(\varphi, \chi)]_{n=0} + O(\lambda^2) = 0 \quad (4.4)$$

$$B_2 = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin^4 \gamma_p}{\gamma_p^5} \approx \begin{cases} -0.002999, & \text{Re } \gamma_p > 0 \\ 0.002999, & \text{Re } \gamma_p < 0 \end{cases}$$

5. Интерес представляют смешанные граничные условия типа (1.5). К ним приходим, в частности, в случае насадки с натягом при наличии сил трения. Здесь, как и в предыдущем случае, можно построить граничные условия для ψ , φ , χ в явном виде с любой степенью точности. Приведем по два члена разложений для случаев изгиба и растяжения.

В задаче изгиба

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_{n=0} + O(\lambda^2) &= \frac{3}{2a(\nu+1)} \left[U_1 + \lambda \frac{\nu-1}{8\nu} \frac{a}{\mu} Q_2 + O(\lambda^2) \right] \quad (5.1) \\ \left[2\nu \frac{\partial \Delta \psi}{\partial n} + (\nu+1) \frac{\partial}{\partial s} R_2(\psi) \right]_{n=0} + \lambda 12A(\nu+1) \frac{\partial}{\partial s} \frac{a^2}{R^2} \frac{\partial \psi}{\partial s} \Big|_{n=0} + O(\lambda^2) &= \\ &= \frac{3}{4\mu} \left\{ Q_0 + \frac{dG_1}{ds} + \lambda \left[-8 \frac{\mu}{a} \frac{d}{ds} \frac{a}{R} \frac{d}{ds} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sigma_k^2} U_k^{(1)} + \right. \right. \\ &+ 4 \frac{d}{ds} \frac{a}{R} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sigma_k^2} T_k - \frac{\mu}{a} \frac{2(\nu-1)}{\nu+1} \frac{d}{ds} \frac{a}{R} \frac{d}{ds} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \gamma_p}{\gamma_p^5} U_p^{(2)} + \\ &\left. \left. + \frac{\nu-1}{4\nu} \frac{d^2 Q_2}{ds^2} \right] + O(\lambda^2) \right\} \end{aligned}$$

$$U_1 = \frac{1}{\lambda} \int_{-1}^1 U \zeta d\zeta, \quad U_k^{(1)} = \frac{1}{\lambda} \int_{-1}^1 U l_k(\zeta) d\zeta, \quad U_p^{(2)} = \frac{1}{\lambda} \int_{-1}^1 U F_p'' d\zeta \quad (5.2)$$

В задаче растяжения

$$\begin{aligned} a [l S_{11}(\varphi, \chi) + m S_{12}(\varphi, \chi)]_{n=0} + O(\lambda^2) &= U_0 + \lambda \frac{a}{\mu} \frac{\nu-1}{4\nu} Z_1 + O(\lambda^2) \\ 2\mu \left[l \frac{\partial}{\partial s} S_{11}^*(\varphi, \chi) + m \frac{\partial}{\partial s} S_{12}^*(\varphi, \chi) \right]_{n=0} + O(\lambda^2) &= T_0 + \\ + \lambda \frac{\nu-1}{2\nu} \left[\frac{d}{ds} Z_1 - \frac{4\nu}{\nu+1} \frac{\mu}{R} \frac{d}{ds} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \gamma_p}{\gamma_p^5} U_p^{(3)} \right] + O(\lambda^2) & \quad (5.3) \end{aligned}$$

$$U_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 U d\zeta, \quad U_p^{(3)} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 U F_p'' d\zeta$$

6. В заключение покажем, что при граничных условиях типа (1.1) и (1.5) в случае осесимметричной деформации проникающее решение можно определить точно без использования асимптотического метода.

Действительно, рассматривая граничные условия (1.1) и учитывая, что все функции напряжений не зависят от s , в случае изгиба имеем

$$\begin{aligned} \zeta N(\zeta) &= 2\mu \left[\lambda \zeta^2 R_1(\psi) + \frac{\lambda^3}{2} \left(\nu + \frac{1}{3} \right) \left(\frac{3}{5} \zeta^2 - \zeta^4 \right) \frac{d^2 \Delta \psi}{dn^2} \right]_{n=0} - \\ - \frac{2\mu \nu \zeta}{\lambda} \sum_{p=1}^{\infty} F_p'' c_p + \lambda \mu \zeta \sum_{p=1}^{\infty} \left[(1-\nu) F_p + (\nu+1) \frac{F_p''}{\gamma_p^2} \right] \frac{dC_p}{dn} \Big|_{n=0} & \quad (6.1) \end{aligned}$$

$$Z(\zeta) = 2\mu \nu \lambda^2 (1 - \zeta^2) \frac{d\Delta \psi}{dn} \Big|_{n=0} + 2\mu \nu \sum_{p=1}^{\infty} F_p' \frac{dC_p}{dn} \Big|_{n=0} \quad (6.2)$$

Из (6.2), интегрируя в пределах от нуля до ζ , получаем

$$\sum_{p=1}^{\infty} F_p \frac{dC_p}{dn} \Big|_{n=0} = \frac{1}{2\mu \nu} \int_0^{\zeta} Z d\zeta - \lambda^2 \left(\zeta - \frac{\zeta^3}{3} \right) \frac{d\Delta \psi}{dn} \Big|_{n=0} \quad (6.3)$$

Подставляя (6.3) в (6.1), (6.2), после интегрирования в пределах от -1 до 1 , получаем следующие граничные условия для ψ :

$$R_1(\psi) |_{n=0} = \frac{3}{4\mu \lambda} \left[M_1 - \lambda \frac{\nu-1}{\nu} \left(\frac{Q_2}{4} + \frac{Q_0}{5} \right) \right], \quad \frac{d\Delta \psi}{dn} \Big|_{n=0} = \frac{3}{8\mu \nu} \frac{Q_0}{\lambda^2} \quad (6.4)$$

В случае растяжения аналогичным образом получаем

$$\frac{\partial}{\partial s} [-S_{12}^*(\varphi, \chi) + i S_{11}^*(\varphi, \chi)]_{n=0} = \frac{1}{2\mu} \left[X_{n0} + i Y_{n0} + \lambda \frac{1-\nu}{2\nu} \frac{z}{a} \Big|_{n=0} Z_1 \right] \quad (6.5)$$

Формула (6.5) не учитывает осесимметричного кручения, граничные условия для которого имеют вид

$$\left[l \frac{\partial}{\partial s} S_{11}^*(\varphi, \chi) + m \frac{\partial}{\partial s} S_{12}^*(\varphi, \chi) \right]_{n=0} = \frac{T_0}{2\mu} \quad (6.6)$$

В случае, когда на контуре заданы условия (1.5), имеем:
при изгибе

$$\frac{d\psi}{dn} \Big|_{n=0} = \frac{1}{\lambda} \frac{3}{2(\nu+1)} \left[\frac{U_1}{a} + \frac{\lambda}{4\mu\nu} \left(\frac{\nu-1}{2} Q_2 + \frac{\nu+1}{5} Q_0 \right) \right]$$

$$\frac{d\Delta\psi}{dn} \Big|_{n=0} = \frac{3}{8\mu\nu} \frac{Q_0}{\lambda^2} \quad (6.7)$$

при растяжении

$$[lS_{11}(\rho, \chi) + mS_{12}(\rho, \chi)]_{n=0} = U_0 + \frac{a}{\mu} \frac{\nu-1}{4\nu} \lambda Z_1 \quad (6.8)$$

В приведенных формулах $\operatorname{Re} \gamma_p > 0$, $\sigma_k > 0$ для Γ_0 и $\operatorname{Re} \gamma_p < 0$, $\sigma_k < 0$ для Γ_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

Поступила 24 V 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Л у р ь е А. И. К теории толстых плит. ПММ, 1942, т. 6, вып. 2—3.
2. А к с е н т я н О. К., В о р о в и ч И. И. Напряженное состояние плиты малой толщины. ПММ, 1963, т. 27, вып. 6.
3. В о р о в и ч И. И., М а л к и н а О. С. Напряженное состояние толстой плиты. ПММ, 1967, т. 31, вып. 2.
4. К о л о с А. В. Методы уточнения классической теории изгиба и растяжения пластинок. ПММ, 1965, т. 29, вып. 4.
5. К о л о с А. В. Об области применения приближенных теорий изгиба пластин типа теории Рейсснера. Тр. 6 Всес. конф. по теории оболочек и пластин. М., «Наука», 1966.
6. А к с е н т я н О. К., В о р о в и ч И. И. Об определении концентрации напряжений на основе прикладной теории. ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.
7. А к с е н т я н О. К., Щ е п к и н Г. Г. Изгиб толстой плиты с шарнирно закрепленным отверстием. Тр. 7 Всес. конф. по теории оболочек и пластин. М., «Наука», 1970.