

К НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ

В. И. Кляцкин

(Москва)

В конечномерной аппроксимации рассматривается нелинейная задача о двумерном движении неограниченной несжимаемой вязкой жидкости, возбуждаемой периодической в пространстве силой. Для ограниченного числа гармоник возмущений конечной амплитуды существует стационарное решение, соответствующее вторичному течению. Однако оно неустойчиво относительно более мелкомасштабных возмущений. Выводятся уравнения, суммирующие вклад всех наиболее неустойчивых гармоник. Эти уравнения не имеют стационарных решений.

Для описания первого шага образования возмущений конечной амплитуды в схеме Л. Д. Ландау [1] (см. также [2, 3]) в работах [4-7] предложена относительно простая приближенная процедура расчета равновесных потоков (вторичных течений), у которых напряжения Рейнольдса, обусловленные возмущениями конечной амплитуды, сбалансированы со средним потоком и диссипацией.

Вопрос о возникновении вторичных стационарных или периодических течений при потере устойчивости ламинарных течений вязкой несжимаемой жидкости рассматривался в работах [8-13].

В работе [14] было введено понятие механических систем гидродинамического типа, к которым также относятся конечномерные аппроксимации уравнений гидродинамики. В работе [15] построена механическая модель типа цепочек из простейших систем, имитирующая каскадный механизм передачи энергии в развитом турбулентном потоке и иллюстрирующая возможную наиболее простую реализацию схемы Л. Д. Ландау.

Ниже в конечномерной аппроксимации изучается равновесный режим вторичного потока для одного случая двумерного течения.

1. Рассмотрим двумерное движение в плоскости xu несжимаемой вязкой жидкости, возбуждаемое периодической в пространстве силой, направленной по оси x и равной $\gamma \sin py$ ($\gamma > 0$).

Система уравнений Навье — Стокса и неразрывности имеет стационарное решение, соответствующее ламинарному течению вдоль оси x со скоростью $p^{-2}\nu^{-1}\gamma \sin py$ при постоянном давлении (ν — коэффициент кинематической вязкости). Это решение, как показано в [11, 16] в линейной постановке, неустойчиво относительно малых возмущений.

Вводя масштабы длины p^{-1} , скорости $p^{-2}\nu^{-1}\gamma$ и времени $p^{-1}\nu^{-1}\gamma$ и переходя к безразмерным переменным, можно записать систему уравнений движения и неразрывности в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} &= - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{R} \Delta u + \frac{1}{R} \sin y & \left(R = \frac{\gamma}{\nu^2 p^3} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} &= - \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{R} \Delta v, & \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь u и v — проекции скорости на оси x и y , P — безразмерное давление, R — число Рейнольдса. Для функции тока получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\Delta}{R}\right) \Delta \psi - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} = \frac{1}{R} \cos y \quad (1.2)$$

$$(u = \partial \psi / \partial y, \quad v = -\partial \psi / \partial x)$$

Бесконечно малые возмущения ввиду линейной неустойчивости быстро растут во времени, благодаря чему растут напряжения Рейнольдса, описываемые нелинейными членами в (1.1), что приводит к уменьшению амплитуды ламинарного течения, пока не установится некоторое новое равновесное течение.

Представим гидродинамические поля в виде

$$u = U(y, t) + u'(x, y, t), \quad v = v'(x, y, t)$$

$$P = P_0 + P'(x, y, t), \quad \psi = \Psi(y, t) + \psi'(x, y, t) \quad (1.3)$$

Здесь $U(y, t)$ — новый профиль равновесного течения, подлежащий определению наряду с равновесными напряжениями Рейнольдса; штрихом обозначены соответствующие конечные возмущения. Будем считать возмущения гармоническими по x с длиной волны $2\pi/\alpha$ ($\alpha > 0$) и на первом этапе будем учитывать только нелинейное взаимодействие первой гармоники возмущений со средним потоком, пренебрегая генерацией высших гармоник и их взаимодействием как между собой, так и со средним потоком. Средний поток (имеется ввиду усреднение по x на расстоянии длины волны) в этом случае будет определяться величиной $U(y, t)$.

Представим возмущения в виде

$$\varphi'(x, y, t) = \varphi^{(1)}(y, t) \exp(i\alpha x) + \varphi^{(-1)}(y, t) \exp(-i\alpha x)$$

$$(\varphi' = u', v', P', \psi')$$

где величина $\varphi^{(-1)}$ комплексно сопряжена к $\varphi^{(1)}$. Тогда из (1.1) следует система уравнений для среднего потока и возмущений $v^{(1)}$ (после исключения величин P', u')

$$\frac{\partial}{\partial t} U + \frac{i}{\alpha} \left(v^{(-1)} \frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial y^2} - v^{(1)} \frac{\partial^2 v^{(-1)}}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{1}{R} \sin y$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\Delta}{R}\right) \Delta v^{(1)} + i\alpha \left[U \Delta v^{(1)} - v^{(1)} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right] = 0 \quad (1.4)$$

2. Остановимся на результатах линейной теории устойчивости. Стационарное решение линейной задачи соответствует профилю потока $U(y) = \sin y$. Получающееся при этом из второго уравнения (1.4) уравнение для возмущений $v^{(1)}$ изучалось в работах [11, 16]. Было показано, что для возмущений типа (периодических по y с периодом 2π)

$$v^{(1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n^{(1)} \exp\{\sigma t + iny\} \quad (2.1)$$

при некоторых ограничениях на волновое число α и число R существуют вещественные положительные значения σ , т. е. решения неустойчивы. Дисперсионное уравнение для σ имеет вид бесконечной цепной дроби. Критическое число Рейнольдса $R_* = \sqrt{2}$ при $\alpha \rightarrow 0$ [11].

Ограничимся конечным числом гармоник по y . В этом случае дисперсионное уравнение для σ будет иметь вид, соответствующий подходящей дроби для общей цепной дроби, полученной в [16], а критическим числом Рейнольдса будет $R_* = \sqrt{2}$ при $\alpha \rightarrow 0$, в соответствии с результатом работы [11]. Таким образом, наиболее неустойчивы длинноволновые возмущения вдоль оси x . Поэтому можно считать $\alpha \ll 1$. Тогда компоненты собственного вектора $\{v_n^{(1)}\}$, начиная с $n = \pm 2$, и более мелкомасштабные будут, по крайней мере, порядка α^4 .

Решение второго уравнения (1.4) при $U = \sin y$ можно искать и на других классах функций. Собственные значения σ и собственные векторы $\{v^{(1)}\}$ будут комплексными. Так, например, если искать решение на классе функций периодических по y с периодом 4π , то для гармоник вида

$$v^{(1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_{n+1/2}^{(1)} \exp \left\{ \sigma t + i \frac{2n+1}{2} y \right\} \quad (2.2)$$

получим систему уравнений, не содержащую гармоник других типов. Если ограничиться минимальным числом гармоник ($v_{\pm 3/2}^{(1)}, v_{\pm 1/2}^{(1)}$), то решение этой системы также соответствует неустойчивому режиму, $R_* \approx 6.5$, а наиболее неустойчивыми оказываются возмущения с волновым числом $\alpha \approx 0.44$. Собственное число σ и собственный вектор $\{v^{(1)}\}$ оказываются комплексными, что должно приводить к периодическому во времени и пространстве вторичному течению.

3. Перейдем к изучению системы (1.4). Рассмотрим возмущения типа (2.1), как наиболее неустойчивые. Учитывая, что наиболее неустойчивым возмущениям соответствует $\alpha \ll 1$, а также что $\sigma_{\pm 2}^{(1)}$ и более мелкомасштабные гармоники имеют более высокий по α порядок малости, можно ограничиться рассмотрением гармоник $v_0^{(1)}, v_{\pm 1}^{(1)}$. В этом случае

$$U(y, t) = U(t) \sin y \quad (3.1)$$

а уравнение для $v^{(1)}$ принимает вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\Delta}{R} \right) \Delta v^{(1)} + i\alpha U(t) \sin y [v^{(1)} + \Delta v^{(1)}] = 0 \quad (3.2)$$

Подставляя (3.1) в (1.4) и используя для $v^{(1)}$ разложение (2.1), получаем для функций

$$z_0 = v_0^{(1)}, \quad z_+ = v_1^{(1)} + v_{-1}^{(1)}, \quad z_- = (v_1^{(1)} - v_{-1}^{(1)}) / 2 \quad (3.3)$$

систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} U + \frac{4}{\alpha} z_0 z_- &= \frac{1}{R} - \frac{1}{R} U, & \frac{d}{dt} z_0 - \alpha U z_- &= -\frac{\alpha^2}{R} z_0 \\ \frac{d}{dt} z_- - \frac{\alpha}{2} U z_0 &= -\frac{1}{R} z_-, & \frac{d}{dt} z_+ &= -\frac{1}{R} z_+ \end{aligned} \quad (3.4)$$

Уравнение для величины z_+ отщепляется от остальных уравнений, и, следовательно, возмущения, соответствующие величине z_+ , могут только затухать со временем. Оставшиеся три уравнения образуют простейшую систему гидродинамического типа [14, 15]. Эта система уравнений эквивалентна динамическому описанию движения гироскопа с анизотропным трением, возбуждаемого моментом внешних сил относительно неустойчивой оси.

Стационарное решение системы (3.4) соответствует профилю среднего потока и равновесным напряжениям Рейнольдса

$$U = \frac{\sqrt{2}}{R}, \quad \frac{4}{\alpha} z_0 z_- = \frac{R - \sqrt{2}}{R^2}, \quad z_+ = 0 \quad (3.5)$$

$$[v_0^{(1)}]^2 = \frac{R - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}R^2}, \quad v_1^{(1)} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} v_0^{(1)}, \quad \alpha \ll 1, \quad R \geq \sqrt{2}$$

или, переходя к размерным величинам, получаем

$$U(y) = \sqrt{2} \nu p \sin py, \quad \langle u'v' \rangle = -\frac{\gamma}{p} \frac{R - \sqrt{2}}{R} \cos py \quad (3.6)$$

Отметим, что амплитуда установившегося равновесного среднего течения не зависит от амплитуды возбуждающей силы.

Функция тока установившегося равновесного течения имеет вид

$$\psi_1 = -\frac{\sqrt{2}}{R} \cos y - \frac{2}{\alpha} v_0^{(1)} [\sqrt{2} \alpha \sin y \cos \alpha x + \sin \alpha x] \quad (3.7)$$

Отметим, что в установившемся течении имеется элемент случайности, а именно, величина $v_0^{(1)}$ может быть как положительной, так и отрицательной в зависимости от знаков амплитуд начальных бесконечно малых возмущений.

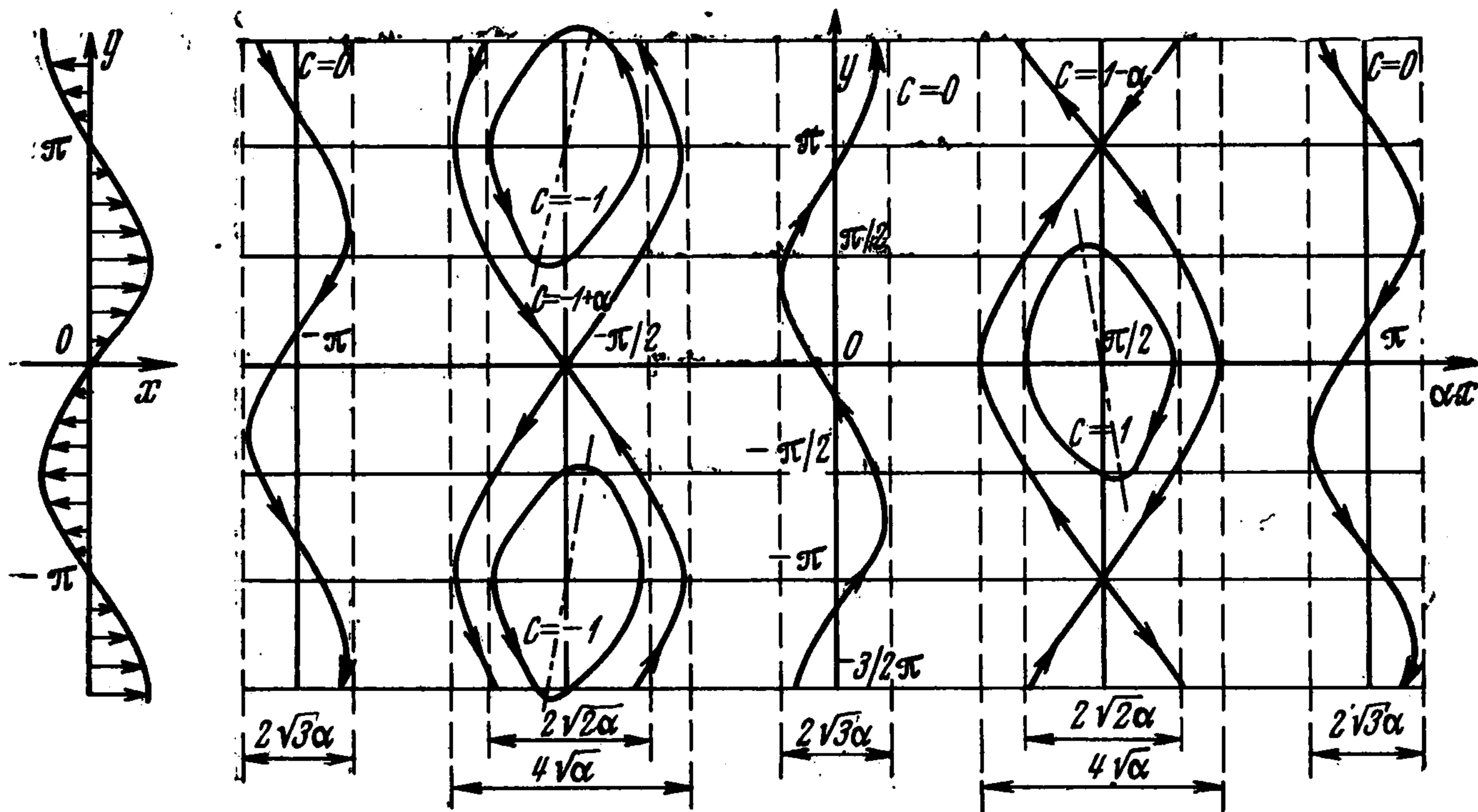
Линии тока, соответствующие течению при

$$R = 2R_* = 2\sqrt{2}(v_0^{(1)} > 0)$$

описываются уравнением

$$\alpha \cos y + \sqrt{2} \alpha \sin y \cos \alpha x + \sin \alpha x = C$$

На фигуре дано их схематическое изображение и изображение профиля среднего потока.



Если искать возмущения на классе функций (2.2), то получается система гидродинамического типа более высокого порядка относительно комплексных величин $v_k^{(1)}$. В этом случае генерируется также следующая гармоника в профиле среднего потока, а во взаимодействии гармоник между собой и со средним потоком, помимо взаимодействия, связанного с перекачкой энергии из одних масштабов в другие, присутствует взаимодействие, приводящее к колебательному характеру обмена энергии между гармониками одного и того же масштаба. Это приводит к периодическому во времени вторичному течению.

4. Исследуем устойчивость вторичного течения (3.7). Линеаризуя уравнение (1.2) относительно течения (3.7), получаем уравнение для возмущений

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\Delta}{R}\right) \Delta \psi' + (u_1 \Delta - \Delta u_1) \frac{\partial \psi'}{\partial x} + (v_1 \Delta - \Delta v_1) \frac{\partial \psi'}{\partial y} = 0$$

$$(\psi = \psi_1 + \psi', \quad u_1 = \partial \psi_1 / \partial y, \quad v_1 = -\partial \psi_1 / \partial x) \quad (4.1)$$

Будем искать решение уравнения (4.1) на классе функций, периодических по x (с периодом $2\pi / \alpha$) и y (с периодом 2π), т. е. представим решение в виде

$$\psi' = \sum_{n,k=-\infty}^{\infty} C_n^k \exp\{\sigma t + i(ny + \alpha kx)\}, \quad \bar{C}_n^k = C_{-n}^{-k}, \quad C_0^0 = 0 \quad (4.2)$$

Подставляя (4.2) в (4.1), получаем систему уравнений для коэффициентов C_n^k

$$\begin{aligned} & \left\{ iv_1^{(1)} (n-k) [n(n-2) + \alpha^2 k(k-2)] C_{n-1}^{k-1} + \frac{\alpha k}{\sqrt{2}R} [n(n-2) + \alpha^2 k^2] C_{n-1}^k - \right. \\ & \quad \left. - iv_1^{(1)} (n+k) [n(n-2) + \alpha^2 k(k+2)] C_{n-1}^{k+1} \right\} + \\ & + \left\{ inv_0^{(1)} [n^2 + \alpha^2 k(k-2)] C_n^{k-1} + \left(\sigma + \frac{n^2 + \alpha^2 k^2}{R}\right) (n^2 + \alpha^2 k^2) C_n^k + \right. \\ & \quad \left. + inv_0^{(1)} [n^2 + \alpha^2 k(k+2)] C_n^{k+1} \right\} + \\ & + \left\{ -iv_1^{(1)} (n+k) [n(n+2) + \alpha^2 k(k-2)] C_{n+1}^{k-1} - \frac{\alpha k}{\sqrt{2}R} [n(n+2) + \right. \\ & \quad \left. + \alpha^2 k^2] C_{n+1}^k + iv_1^{(1)} (n-k) [n(n+2) + \alpha^2 k(k+2)] C_{n+1}^{k+1} \right\} = 0 \quad (4.3) \end{aligned}$$

Здесь величины $v_1^{(1)}$, $v_0^{(1)}$ определяются соотношениями (3.5). Учитывая, что решение (3.7) получено с точностью до членов порядка α^2 (включительно), при решении системы уравнений (4.3) следует пренебречь членами порядка α^3 и выше.

Видно, что поток, описываемый функцией тока (3.7), будет устойчивым, если в системе (4.3) ограничиться гармониками $n = 0, \pm 1, k = 0, \pm 1$ (т. е. искать решение уравнения (4.1) того же вида, что и решение (3.7)). Поэтому течение (3.7) может быть неустойчивым только по отношению к более мелкомасштабным возмущениям. Ограничимся гармониками $n = 0, \pm 1, \pm 2; k = 0, \pm 1, \pm 2$ и будем учитывать только главные по α чле-

ны, пренебрегая членами порядка α^3 . Легко видеть из системы (4.3), что все гармоники, начиная с $n = \pm 2$ и более мелкомасштабные по y , будут, по крайней мере, порядка α^3 и поэтому в рассматриваемом приближении ими можно пренебречь.

Вместо амплитуд гармоник C_n^k введем их линейные комбинации

$$C_{-1}^k + C_1^k = z_+^k, \quad C_{-1}^k - C_1^k = z_-^k, \quad C_0^k = z_0^k \quad (4.4)$$

Тогда для величины z система уравнений (4.3) расщепляется на две системы седьмого порядка

$$\left\| \begin{array}{ccccc|cc} \sigma + \frac{1}{R} & -iv_0^{(1)} & 0 & 0 & 0 & -2iv_1^{(1)} & 0 \\ -iv_0^{(1)} & \sigma + \frac{1}{R} & -iv_0^{(1)} & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}\alpha}{R} & 0 \\ 0 & -iv_0^{(1)} & \sigma + \frac{1}{R} & -iv_0^{(1)} & 0 & -2iv_1^{(1)} & 2iv_1^{(1)} \\ 0 & 0 & -iv_0^{(1)} & \sigma + \frac{1}{R} & -iv_0^{(1)} & 0 & \frac{\sqrt{2}\alpha}{R} \\ 0 & 0 & 0 & -iv_0^{(1)} & \sigma + \frac{1}{R} & 0 & 2iv_1^{(1)} \\ \hline 3iv_1^{(1)} & -\frac{\alpha}{\sqrt{2}R} & -iv_1^{(1)} & 0 & 0 & \sigma + \frac{\alpha^2}{R} & 0 \\ 0 & 0 & iv_1^{(1)} & \frac{\alpha}{\sqrt{2}R} & -3iv_1^{(1)} & 0 & \sigma + \frac{\alpha^2}{R} \end{array} \right\| \times$$

$$\times \left\| \begin{array}{ccccccc} z_+^{-2} & z_-^{-1} & z_+^0 & z_-^1 & z_+^2 & z_0^{-1} & z_0^1 \end{array} \right\|' = 0 \quad (4.5)$$

$$\left\| \begin{array}{cccccc|cc} \sigma + \frac{4\alpha^2}{R} & 0 & -\frac{\sqrt{2}\alpha}{R} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma + \frac{4\alpha^2}{R} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}\alpha}{R} \\ -\frac{\sqrt{2}\alpha}{R} & 0 & \sigma + \frac{1}{R} & -iv_0^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4iv_1^{(1)} & 0 & -iv_0^{(1)} & \sigma + \frac{1}{R} & -iv_0^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -iv_0^{(1)} & \sigma + \frac{1}{R} & -iv_0^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 4iv_1^{(1)} & 0 & 0 & -iv_0^{(1)} & \sigma + \frac{1}{R} & -iv_0^{(1)} & 0 \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}\alpha}{R} & 0 & 0 & 0 & -iv_0^{(1)} & \sigma + \frac{1}{R} & 0 \end{array} \right\| \times$$

$$\times \left\| \begin{array}{ccccccc} z_0^{-2} & z_0^2 & z_-^{-2} & z_+^{-1} & z_-^0 & z_+^1 & z_-^2 \end{array} \right\|' = 0 \quad (4.6)$$

При выводе систем уравнений (4.5), (4.6) были опущены члены порядка α^2 в выражениях типа $-iv_0^{(1)}(1 - \alpha^2)$, $[\sigma + (1 + \alpha^2)/R](1 + \alpha^2)$ и т. д. Это связано с тем, что собственные значения σ для систем (4.5), (4.6), которые могут соответствовать неустойчивости потока (3.7), имеют порядок α^2 . Опущенные же члены не вносят никакого вклада в значение σ этого по-

рядка, а лишь проявляются в более высоких порядках по α , которыми, как было указано выше, пренебрегается. По этой причине для неустойчивых решений систем (4.5), (4.6) следует считать $\sigma = 0$ в первых пяти уравнениях системы (4.5) и в последних пяти уравнениях системы (4.6)

Рассмотрим систему уравнений (4.5). Систему (4.6) можно рассматривать аналогичным образом, причем собственные числа σ для этой системы соответствуют устойчивости потока (3.7) при всех $R > R_*$. Умножив (4.5) на матрицу, обратную к выделенной пунктиром и отделив действительные и мнимые части решения, получим две системы уравнений

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -\frac{2\sqrt{2}\alpha v_0^{(1)}}{R\Delta_5} \left[1 + \frac{(v_0^{(1)})^2}{R^2} \right] \\ 0 & 1 & \frac{\sqrt{2}\alpha}{R\Delta_5} \left[3(v_0^{(1)})^4 - \frac{2(v_0^{(1)})^2}{R^2} - \frac{1}{R^4} \right] \\ -3v_1^{(1)} & -\frac{\alpha}{\sqrt{2}R} & \sigma + \frac{\alpha^2}{R} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \text{Im } z_+^{-2} \\ \text{Re } z_-^{-1} \\ \text{Re } z_0^{-1} \end{vmatrix} = 0 \quad (4.7)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2\sqrt{2}\alpha v_0^{(1)}}{R\Delta_5} \left[\Delta_3 - \frac{(v_0^{(1)})^2}{R} \right] \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\sqrt{2}\alpha}{R\Delta_5} \left[3(v_0^{(1)})^4 + \frac{2(v_0^{(1)})^2}{R^2} - \frac{1}{R^4} \right] \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4\sqrt{2}\alpha v_0^{(1)}\Delta_2}{R^2\Delta_5} \\ 3v_1^{(1)} & -\frac{\alpha}{\sqrt{2}R} & -v_1^{(1)} & \sigma + \frac{\alpha^2}{R} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \text{Re } z_+^{-2} \\ \text{Im } z_-^{-1} \\ \text{Re } z_+^0 \\ \text{Im } z_0^{-1} \end{vmatrix} = 0 \quad (4.8)$$

Здесь

$$\Delta_n = \frac{1}{R} \Delta_{n-1} + (v_0^{(1)})^2 \Delta_{n-2} \quad (\Delta_1 = \frac{1}{R}, \quad \Delta_2 = \frac{1}{R^2} + (v_0^{(1)})^2)$$

Собственное значение σ , соответствующее системе (4.7), имеет вид

$$\sigma = \frac{\alpha^2}{R^2\Delta_5} \left[12(v_0^{(1)})^4 + \frac{4(v_0^{(1)})^2}{R^2} \right] \geq 0 \quad \text{при } R \geq \sqrt{2} \quad (4.9)$$

что соответствует неустойчивости течения (3.7) при всех $R > R_*$. Собственное же значение σ для системы (4.8) соответствует устойчивости потока (3.7) при всех $R > R_*$.

Если рассмотреть нелинейное уравнение для функции тока (1.2) и ограничиться не только взаимодействием возмущений со средним потоком, но и нелинейным взаимодействием возмущений (гармоник, рассмотренных в п. 3, 4), то при $R > R_*$ приходим к цепочке из двух систем уравнений типа (3.4), в которой стационарное решение уравнения (3.4) возбуждает не только более мелкомасштабные движения, но и движения того же масштаба. И в рассматриваемом случае к функции тока (3.7) добавятся члены

$$2 \text{Re } z_0^{-1} \cos \alpha x + \frac{2}{\alpha} \text{Im } z_+^{-2} \cos y \sin 2\alpha x - \frac{2}{\alpha} \text{Re } z_-^{-1} \sin y \sin \alpha x$$

При этом степень случайности решения по сравнению с (3.7) увеличивается, что связано со знаком амплитуд более мелкомасштабных бесконечно малых возмущений.

Таким образом, нелинейное взаимодействие бесконечно малых возмущений является здесь определяющим наряду с взаимодействием возмущений со средним потоком. При этом нельзя ограничиться конечным числом гармоник по x (что, по существу, представляет собой метод Галёркина с тригонометрическими мономерами в качестве координатных функций), а необходимо рассматривать весь бесконечный ряд гармоник по x . В то же время по оси y можно ограничиться гармониками с $n = \pm 1, 0$.

5. Представим функцию тока в виде

$$\begin{aligned} \psi(x, y, t) = & \psi_{-1}(x, t) \exp(-iy) + \psi_0(x, t) + \\ & + \psi_1(x, t) \exp(iy) \quad (\bar{\psi}_{-1} = \psi_1) \end{aligned} \quad (5.1)$$

где $\psi_i(x, t)$ — периодические функции по x с периодом $2\pi/\alpha$.

Подставляя (5.1) в уравнение (1.2), пренебрегая членами порядка α^3 во взаимодействии гармоник и членами порядка α^2 в диссипативных членах для гармоник $\psi_{\pm 1}$, после введения новых функций $\psi_{-1} + \psi_1 = 2\psi_+$, $\psi_{-1} - \psi_1 = 2i\psi_-$ получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{R}\right)\psi_+ - \psi_- \frac{\partial \psi_0}{\partial x} = -\frac{1}{2R}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{R}\right)\psi_- + \psi_+ \frac{\partial \psi_0}{\partial x} = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi_0 + 2\left(\psi_- \frac{\partial \psi_+}{\partial x} - \psi_+ \frac{\partial \psi_-}{\partial x}\right) = 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Эта система уравнений суммирует весь бесконечный ряд гармоник по x и является обобщением на бесконечномерный случай системы уравнений гироскопического типа (3.4). Характерно отсутствие стационарных решений, периодических по x (кроме решения, соответствующего ламинарному потоку), в то время как любая система с конечным числом гармоник по x имеет стационарное решение.

Автор благодарит А. М. Обухова за внимание к работе и полезное обсуждение.

Поступила 25 VI 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д. К проблеме турбулентности. Докл. АН СССР, 1944, т. 44, № 8.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М. Гостехиздат, 1954.
3. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика, ч. 1. М., «Наука», 1965.
4. Stuart J. T. On the non-linear mechanics of hydrodynamic stability. J. Fluid Mech., 1958, vol. 4, No. 1 (Русск. перев.: О нелинейной механике в теории гидродинамической устойчивости, Механика, Сб. перев. иностр. статей, 1959, № 3 (55)).
5. Stuart J. T. On the non-linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows, pt. 1. J. Fluid Mech., 1960, vol. 9, No. 3.
6. Watson J. On the non-linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows, pt. 2. J. Fluid Mech., 1960, vol. 9, No. 3.

7. Reynolds W. C., Potter M. C. Finite-amplitude instability of parallel shear flows. *J. Fluid Mech.*, 1967, vol. 27, № 3 (Русск. перев: Неустойчивость параллельных течений при возмущениях конечной амплитуды. *Механика*, Сб. перев. иностр. статей, 1968, № 2 (108)).
 8. Брушлинская Н. Н. О предельных циклах уравнений движения твердого тела и галеркинских уравнений гидродинамики. Докл. АН СССР, 1964, т. 157, № 5.
 9. Брушлинская Н. Н. О поведении решений уравнений гидродинамики при переходе числа Рейнольдса через критическое значение. Докл. АН СССР, 1965, т. 162, № 4.
 10. Брушлинская Н. Н. О рождении периодического течения и тора из ламинарного течения. В сб.: *Некоторые вопросы механики горных пород*, М., 1968, стр. 57.
 11. Юдович В. И. Пример рождения вторичного стационарного или периодического течения при потере устойчивости ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости. *ПММ*, 1965, т. 29, вып. 3.
 12. Юдович В. И. Пример потери устойчивости и рождения вторичного течения жидкости в замкнутом сосуде. *Матем. сб.*, 1967, т. 74 (116), № 4.
 13. Юдович В. И. Возникновение автоколебаний в жидкости. *ПММ*, 1971, т. 35, вып. 4.
 14. Обухов А. М. Об интегральных инвариантах в системах гидродинамического типа. Докл. АН СССР, 1969, т. 184, № 2.
 15. Обухов А. М. О некоторых общих характеристиках уравнений динамики атмосферы. *Изв. АН СССР. Физ. атмосферы и океана*, 1971, т. 7, № 7.
 16. Мешалкин Л. Д., Синай Я. Г. Исследование устойчивости стационарного решения одной системы уравнений плоского движения несжимаемой вязкой жидкости. *ПММ*, 1961, т. 25, вып. 6.
-